UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Oddelek za matematiko in računalništvo

MAGISTRSKO DELO

Vanda Štern

Maribor, 2020

UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Oddelek za matematiko in računalništvo

Magistrsko delo

GRINBERGOV IZREK

na študijskem programu 2. stopnje Matematika

Mentor:

doc. dr. Bojan Hvala

Kandidatka:

Vanda Štern

Maribor, 2020

ZAHVALA

Zahvaljujem se mentorju za vse napotke in pomoč pri delu.

Posebna hvala še mojim staršem za spodbujanje in podporo.

PROGRAM MAGISTRSKEGA DELA

GRINBERGOV IZREK

V magistrskem delu bo predstavljena tako imenovana krožna cevianska konjugacija v geometriji trikotnika, ki točki P v ravnini priredi točko $\phi(P)$ na naslednji način. Točki P najprej priredimo njen Cevov trikotnik $A_P B_P C_P$ in mu očrtamo krožnico. Ta nosilke stranic a, b, c trikotnika poleg v točkah A_P, B_P, C_P seka tudi v točkah A'_P, B'_P, C'_P. Izkaže se, da se premice AA'_P, BB'_P, CC'_P sekajo v skupni točki, ki jo označimo s $\phi(P)$. To je omenjena slika točke P s krožno ceviansko konjugacijo.

Grinbergov izrek trdi, da se ta konjugacija na preprost način izraža kot kompozitum, v katerem nastopajo pogosto nastopajoče preslikave v geometriji trikotnika: izogonalna in izotomična konjugacija, razteg s središčem v težišču G in koeficientom $-\frac{1}{2}$ ter njegov inverz. V magistrskem delu bosta predstavljena originalni Grinbergov dokaz tega rezultata in kasnejši sintetični dokaz avtorjev Minevicha in Mortona.

Literatura:

1. D. Grinberg: Hyacinthos Message # 6423. Dostopno na spletu: `https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos /conversations/messages/6423`
2. I. Minevich, P. Morton, *Synthetic Foundations of Cevian Geometry I, fixed points of affine maps*, Journal of Geometry, Vol 108 (April 2017), št. 1, str. 45 – 60.

doc. dr. Bojan Hvala

ŠTERN, V. : GRINBERGOV IZREK
Magistrsko delo, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Oddelek za matematiko in računalništvo, 2020.

IZVLEČEK

Grinbergov izrek trdi, da se krožna cevianska konjugacija izraža kot kompozitum, v katerem nastopajo izotomična in izogonalna konjugacija, razteg s središčem v težišču G in koeficientom $-\frac{1}{2}$ ter njegov inverz. V magistrskem delu bosta predstavljena sintetični dokaz in direkten dokaz s pomočjo trilinearnih koordinat.

Obravnavali bomo vse preslikave, predstavili trilinearne koordinate in poiskali enačbe različnih krožnic v trikotniku.

Ključne besede: geometrija trikotnika, krožna cevianska konjugacija, izotomična konjugacija, izogonalna konjugacija, Grinberg

Math. Subj. Class. (2010): 51M04, 51M15, 51N15

ŠTERN, V. : Grinberg's theorem.
Master Thesis, University of Maribor, Faculty of Natural Scicences and Mathematics, Department of Mathematics and Computer Science, 2020.

ABSTRACT

Grinberg's theorem states that cyclocevian conjugation can be expressed as a composition of transformations, in which occur the following transformations: isotomic conjugate, isogonal conjugate, complement and anticomplement. The master's thesis will present synthetic proof and direct proof using trilinear coordinates.

We will consider all the mappings involved, present trilinear coordinates and derive equations of diffrent circles in triangle geometry.

Keywords: triangle geometry, cyclocevian conjugate, isotomic conjugate, isogonal conjugate, Grinberg

Math. Subj. Class. (2010): 51M04, 51M15, 51N15

Kazalo

Uvod **1**

1 Osnovni pojmi in definicije **2**

1.1 Trilinearne koordinate 2

2 Krožnice **9**

2.1 Očrtana krožnica 9

2.2 Krožnica devetih točk 10

2.3 Krožnica z danim središčem in polmerom 12

2.4 Splošna krožnica 15

3 Preslikave v geometriji trikotnika **18**

3.1 Izogonalna konjugacija 18

3.2 Izotomična konjugacija 20

3.3 Komplement in antikomplement 24

3.4 Krožna cevianska konjugacija 27

4 Grinbergov izrek **31**

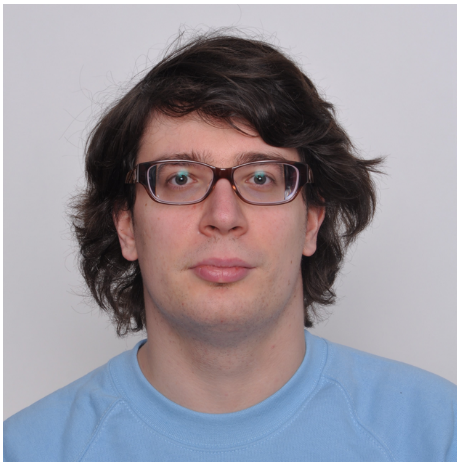
4.1 Dokaz z uporabo trilinearnih koordinat 32

4.2 Sintetični dokaz Minevicha in Mortona 33

Literatura **49**

Uvod

Darij Grinberg je matematik, rojen leta 1988 v Moskvi. Znan je po svojem delu na področju geometrije trikotnika. Leta 1996 se je s starši iz Moskve preselil v Nemčijo. V letih 2004 - 2006 je prejel dve srebrni in eno zlato medaljo na Mednarodni matematični olimpijadi in še mnogo drugih nagrad na Nemških državnih matematičnih tekmovanjih. Študiral je matematiko in računalništvo na Univerzi LMU v Munchnu. Leta 2008 je zmagal na Mednarodnem matematičnem tekmovanju študentov matematike Vojtech Jarnik v Ostravi, ki se ga udeležujejo tudi študentje matematike iz naše univerze. Diplomiral je leta 2011. Nato je bil podiplomski študent na MIT v Bostonu, kjer je doktoriral leta 2016. Trenutno je docent na Univerzi Drexel v Philadelphiji.



Slika 1: Darij Grinberg

Trenutno se največ ukvarja z algebraično kombinatoriko in sorodnimi temami. V določenem obdobju pa se je zelo posvečal tudi geometriji. Tako je obravnaval lastnosti nekaterih značilnih točk trikotnika, na primer Kosnitove točke, ki je izogonalna konjugiranka središča krožnice devetih točk. Poleg tega je odkril tudi nekaj novih značilnih točk trikotnika in predstavil koncept Blaikiejevih točk in transformacij. V Kimberlingovi Enciklopediji značilnih točk trikotnika je po njem imenovanih šest točk.

Poglavje 1

Osnovni pojmi in definicije

1.1 Trilinearne koordinate

V magistrskem delu bomo računali s trilinearnimi koordinatami, zato jih bomo v tem poglavju na kratko opisali.

Imamo podan trikotnik ABC. Za dano točko P v ravnini definiramo dejanske trilinearne koordinate $(\alpha_d, \beta_d, \gamma_d)$, kjer so α_d, β_d, γ_d predznačene razdalje od točke do nosilke stranice.

$$\alpha_d = \begin{cases} +d(P,a) & \text{, če je } P \text{ na istem bregu nosilke stranice } a \text{ kot trikotnik,} \\ -d(P,a) & \text{, sicer.} \end{cases}$$

Za β_d, γ_d naredimo podobno.

Dejanske trilinearne koordinate so med seboj povezane s formulo:

$$a\alpha_d + b\beta_d + c\gamma_d = 2S.$$

Trojici (α, β, γ), ki jo zapisujemo $\alpha : \beta : \gamma$, rečemo homogene trilinearne koordinate točke P, če obstaja tak $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, da velja:

$$\alpha = k\alpha_d, \qquad \beta = k\beta_d, \qquad \gamma = k\gamma_d.$$

Če poznamo homogene trilinearne koordinate, lahko realno število k izrazimo na naslednji način:

$$a\alpha_d + b\beta_d + c\gamma_d = 2S,$$

$$a\frac{1}{k}\alpha + b\frac{1}{k}\beta + c\frac{1}{k}\gamma = 2S.$$

Izrazimo k :

$$k = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{2S}.$$

Dejanske koordinate so torej:

$$\alpha_d = \frac{2S}{a\alpha + b\beta + c\gamma}\alpha, \qquad \beta_d = \frac{2S}{a\alpha + b\beta + c\gamma}\beta, \qquad \gamma_d = \frac{2S}{a\alpha + b\beta + c\gamma}\gamma.$$

To se lahko zgodi natanko tedaj, ko je $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$. Ko to ne velja, pridemo do točke v neskončnosti. Enačba premice v neskončnosti je zato :

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0.$$

Poglejmo si trilinearne koordinate nekaterih znanih točk, ki jih bomo uporabljali.

1. Oglišča trikotnika

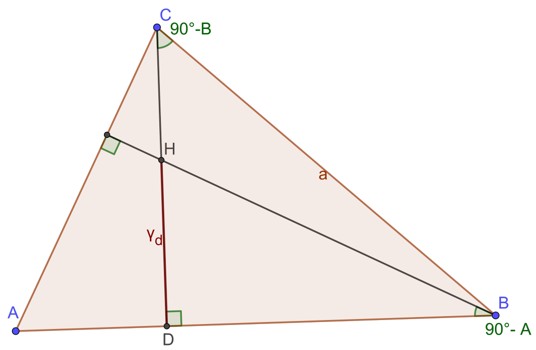
   Vsako oglišče leži na dveh nosilkah stranic, do nasprotne stranice pa ima razdaljo ravno višino. Torej:

$$A = (v_a, 0, 0) = 1 : 0 : 0,$$

$$B = (0, v_b, 0) = 0 : 1 : 0,$$

$$C = (0, 0, v_c) = 0 : 0 : 1.$$

2. Višinska točka H



Slika 1.1: Izračun trilinearnih koordinat točke H

Iz zgornje slike vidimo, da je $\sin(90^\circ - B) = \frac{|BD|}{a}$ oziroma $|BD| = a\sin(90^\circ - B) = a\cos B$ in da je $\tan(90^\circ - A) = \frac{|HD|}{|BD|}$. Iz tega izrazimo $|HD|$, ki je enak γ_d. Torej:

$$\gamma_d = |HD| = |BD|\tan(90^\circ - A) = a\cos B\frac{\sin(90^\circ - A)}{\cos(90^\circ - A)} = \frac{a\cos B\cos A}{\sin A}.$$

Uporabimo sinusni izrek in sledi, da je

$$\gamma_d = 2R\cos B\cos A.$$

Podobno izračunamo α_d in β_d in dobimo dejanske trilinearne koordinate višinske točke:

$$H = (2R\cos B\cos C, 2R\cos A\cos C, 2R\cos B\cos A),$$

$$H = \frac{1}{\cos A} : \frac{1}{\cos B} : \frac{1}{\cos C}.$$

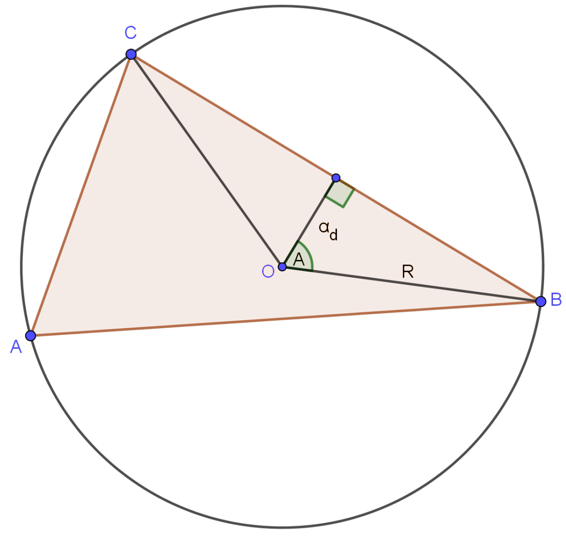
3. Težišče G

   Če povežemo težišče z oglišči, dobimo tri trikotnike. Vsak ima ploščino $\frac{S}{3}$. Dejanske trilinearne koordinate so višine, ki jih izrazimo iz formule za ploščino:

$$G = (\frac{2S}{3a}, \frac{2S}{3b}, \frac{2S}{3c}),$$

$$G = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

4. Središče očrtane krožnice O



Slika 1.2: Izračun trilinearnih koordinat točke O

Kot A je obodni kot nad lokom BC, središčni pa je $\angle BOC$, ki torej meri $2A$. Trikotnik BOC je enakokrak, zato njegova višina razpolavlja kot pri vrhu. Torej imamo dva enaka pravokotna trikotnika, ki imata kateto α_d, hipotenuzo R, kot med njima pa je A. Torej je $\cos A = \frac{\alpha_d}{R}$ oziroma $\alpha_d = R\cos A$. Podobno izračunamo drugi dve koordinati in dobimo, da je

$$O = (R\cos A, R\cos B, R\cos C),$$

$$O = \cos A : \cos B : \cos C.$$

5. Središče včrtane krožnice I
   Očitno je, da so razdalje od I do stranic vse enake polmeru včrtane krožnice. Torej, je:
   $$I = (r, r, r),$$
   $$I = 1 : 1 : 1.$$
6. Enačbe nosilk stranic a, b in c se glasijo $\alpha = 0$, $\beta = 0$ in $\gamma = 0$.
7. Simetrale kotov A, B in C imajo enačbe $\beta = \gamma$, $\alpha = \gamma$ in $\beta = \alpha$.

V nadaljevanju bomo pripravili nekaj rezultatov, povezanih z analitično geometrijo v trilinearnih koordinatah. Vse navedeno smo natančno obravnavali pri predmetu Analitični pristopi v geometriji, kjer smo tudi izpeljali vse dokaze, zato jih na tem mestu ne bomo navajali.

Izrek 1.1 *Premica skozi točki $P_1 = \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$ in $P_2 = \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2$ ima enačbo*

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Izrek 1.2 *Premici $k_1\alpha_1 + l_1\beta_1 + m_1\gamma_1 = 0$ in $k_2\alpha_2 + l_2\beta_2 + m_2\gamma_2 = 0$ se sekata v točki*

$$l_1m_2 - l_2m_1 : k_2m_1 - k_1m_2 : k_1l_2 - k_2l_1.$$

Te koordinate so koeficienti pred i, j, k v enačbi:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ k_1 & l_1 & m_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 \end{vmatrix} = i(l_1m_2 - l_2m_1) + j(k_2m_1 - k_1m_2) + k(k_1l_2 - k_2l_1).$$

Izrek 1.3 *Premice $k_i\alpha_i + l_i\beta_i + m_i\gamma_i = 0, i \in \{1, 2, 3\}$ se sekajo v skupni točki, natanko tedaj, ko je*

$$\begin{vmatrix} k_1 & l_1 & m_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 \\ k_3 & l_3 & m_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Definicija 1.4 *Naj bo ABC trikotnik in P poljubna točka. Vsako oglišče trikotnika s premicami povežemo s P. Te premice sekajo nosilke stranic v točkah, ki se imenujejo sledi točke P. Sledi so oglišča trikotnika, ki ga imenujemo Cevov trikotnik točke P.*

Izrek 1.5 *Naj bo $P = \alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0$. Potem so*

$$A_P = 0 : \beta_0 : \gamma_0, \qquad B_P = \alpha_0 : 0 : \gamma_0, \qquad C_P = \alpha_0 : \beta_0 : 0$$

sledi točke P na nosilkah stranic a, b, c.

Dokaz. Sledi točke $P = \alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0$ na nosilkah stranic dobimo na naslednji način. S pomočjo izreka 1.1 izračunajmo enačbo premice PA:

$$PA : \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \beta\gamma_0 - \gamma\beta_0 = 0.$$

Nosilka stranice a ima enačbo $\alpha = 0$. Uporabimo formulo za presečišče dveh premic.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -\gamma_0 & \beta_0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = i0 + j\beta_0 + k\gamma_0.$$

Iz tega sledi, da je $A_P = 0 : \beta_0 : \gamma_0$. Na podoben način dobimo B_P in C_P. □

Izrek 1.6 *Naj bodo $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ dejanske trilinearne koordinate točk P_i, $i \in \{1, 2\}$ v ravnini. Dejanske trilinearne koordinate točke T, ki deli daljico P_1P_2 v razmerju $\lambda : \mu$ so*

$$\Big(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\alpha_1 + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\alpha_2, \frac{\mu}{\lambda+\mu}\beta_1 + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\beta_2), \frac{\mu}{\lambda+\mu}\gamma_1 + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\gamma_2\Big).$$

Izrek 1.7 *Dani sta premici $k_i\alpha_i + l_i\beta_i + m_i\gamma_i = 0, i \in \{1, 2\}$ in naj bo φ kot med njima. Kot med premicama se izračuna po formuli:*

$$\tan\varphi = \frac{\sin A(l_1m_2 - l_2m_1) + \sin B(k_2m_1 - k_1m_2) + \sin C(k_1l_2 - k_2l_1)}{k_1k_2 + l_1l_2 + m_1m_2 - \cos A(l_1m_2 - l_2m_1) - \cos B(k_2m_1 - k_1m_2) - \cos C(k_1l_2 - k_2l_1)}.$$

Premici sta pravokotni, ko je imenovalec enak 0.

Izrek 1.8 *Naj bodo $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ dejanske trilinearne koordinate točk P_i, $i \in \{1, 2\}$. Tedaj se razdalja med točkama izračuna na naslednji način:*

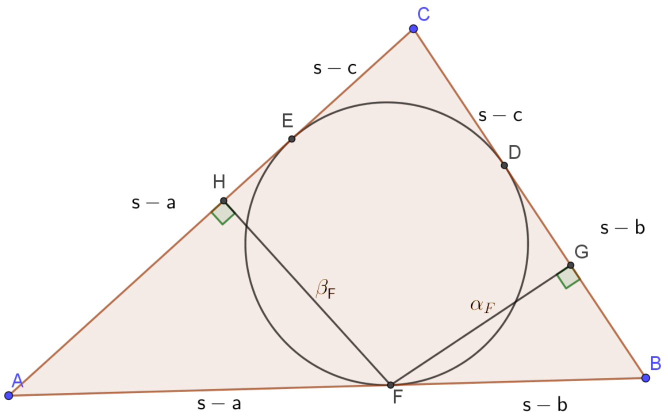
$$d(P_1, P_2) = \frac{\sqrt{abc}}{2S}\sqrt{a\cos A(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + b\cos B(\beta_1 - \beta_2)^2 + c\cos C(\gamma_1 - \gamma_2)^2}.$$

S pomočjo teh izrekov lahko izpeljemo koordinate dveh znanih točk v trikotniku:

Gergonnova točka:
Naj bodo D, E, F dotikališča včrtane krožnice z nosilkami stranic. Premice AD, BE, CF se sekajo v Gergonnovi točki. Pri predmetu Ravninska in prostorska geometrija smo dokazali, da velja:

- $|AE| = |AF| = s - a$,
- $|BD| = |BF| = s - b$,
- $|CD| = |CE| = s - c$,

kjer je $s = \frac{a+b+c}{2}$ polovični obseg trikotnika. Izračunajmo trilinearne koordinate točke $F = (\alpha_F, \beta_F, \gamma_F)$. Ker je F točka na nosilki stranice c, je njena tretja koordinata $\gamma_F = 0$.



Slika 1.3: Izračun trilinearnih koordinat Gergonnove točke

Na sliki vidimo, da imamo dva pravokotna trikotnika AFH in FBG. Uporabimo kotne funkcije, da dobimo $\sin B = \frac{\alpha_F}{s-b}$ in $\sin A = \frac{\beta_F}{s-a}$ in izrazimo α_F in β_F:

$$F = ((s - b)\sin B, (s - a)\sin A, 0).$$

Delimo z $2(s-a)(s-b)\sin A \sin B$ in vstavimo $s=\frac{a+b+c}{2}$:

$$F = \frac{1}{(-a+b+c)\sin A} : \frac{1}{(a-b+c)\sin B} : 0.$$

Uporabimo sinusni izrek:

$$F = \frac{R}{(-a+b+c)a} : \frac{R}{(a-b+c)b} : 0$$

in delimo z R:

$$F = \frac{1}{a(-a+b+c)} : \frac{1}{b(a-b+c)} : 0.$$

Na podoben način dobimo:

$$D = 0 : \frac{1}{b(a-b+c)} : \frac{1}{c(a+b-c)}$$

in

$$E = \frac{1}{a(-a+b+c)} : 0 : \frac{1}{c(a+b-c)}.$$

To so sledi Gergonnove točke, zato je:

$$Ge = \frac{1}{a(-a+b+c)} : \frac{1}{b(a-b+c)} : \frac{1}{c(a+b-c)}.$$

Nagelova točka:
Označimo z D, E, F dotikališča pričrtanih krožnic z nosilkami stranic. Premice AD, BE, CF se sekajo v Nagelovi točki. Velja:

- $|CE| = |BF| = s-a$,
- $|CD| = |AF| = s-b$,
- $|BD| = |AE| = s-c$,

kar smo dokazali pri Ravninski in prostorski geometriji. Sedaj podobno, kot pri Gergonnovi točki, uporabimo kotne funkcije v dveh pravokotnih trikotnikih in izračunamo koordinate točk D, E, F, ki so sledi Nagelove točke:

$$Na = \frac{-a+b+c}{a} : \frac{a-b+c}{b} : \frac{a+b-c}{c}.$$

Poglavje 2

Krožnice

Krožnica je množica točk v ravnini, ki so enako oddaljene od določene točke, ki ji rečemo središče. V magistrski nalogi krožnice igrajo pomembno vlogo. Njihov predpis v trilinearnih koordinatah in postopek s katerim pridemo do njega bo opisan v tem poglavju.

2.1 Očrtana krožnica

Najprej bomo poiskali enačbo očrtane krožnice trikotnika ABC, saj bomo kasneje videli, da je v tesni povezavi z vsemi drugimi krožnicami v ravnini. Pomagali si bomo z naslednjo lemo, ki smo jo dokazali na predavanjih.

Lema 2.1 *Naj bo ABC trikotnik in P točka v ravnini z dejanskimi trilinearnimi koordinatami (α, β, γ). Za nožiščni trikotnik $A_P B_P C_P$ trikotnika ABC glede na točko P velja:*

$$(A_P B_P C_P) = \frac{1}{4R}(a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta),$$

kjer je $(A_P B_P C_P)$ orientirana ploščina trikotnika $A_P B_P C_P$.

Izrek 2.2 *Enačba očrtane krožnice v trilinearnih koordinatah se glasi:*

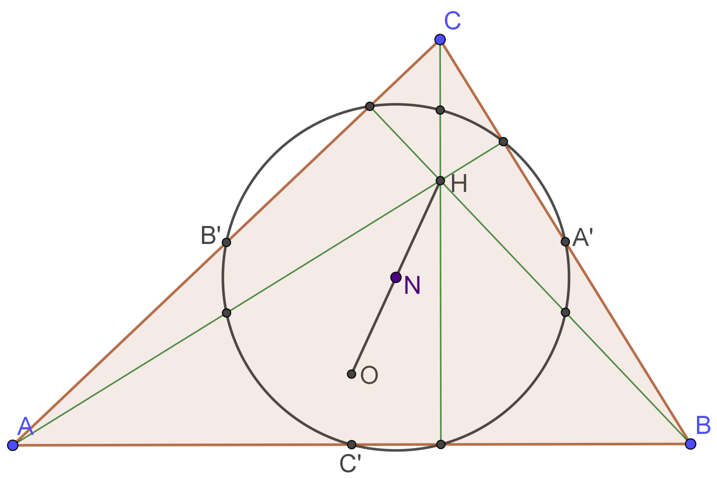
$$a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta = 0.$$

Dokaz. Če točka P leži na očrtani krožnici trikotnika ABC, potem je nožiščni trikotnik degeneriran, oziroma točke A_P, B_P, C_P ležijo na premici, ki ji rečemo Simsonova premica. To pomeni, da je ploščina enaka $(A_P, B_P, C_P) = 0$. Ker je $R \neq 0$, bo ploščina enaka 0 natanko tedaj, ko bo $a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta = 0$. Torej točka, ki zadošča tej enačbi, leži na očrtani krožnici, zato je to enačba očrtane krožnice. $\square$

2.2 Krožnica devetih točk

Krožnica devetih točk je krožnica, ki gre skozi razpolovišča stranic, skozi nožišča in skozi razpolovišča daljic AH, BH in CH. Njeno središče N je razpolovišče daljice OH in ima trilinearne koordinate enake:

$$N = \cos(B - C) : \cos(C - A) : \cos(A - B).$$



Slika 2.1: Krožnica devetih točk

Poglejmo si, kako zapišemo njeno enačbo. Vemo, da se očrtana krožnica z raztegom s središčem G in koeficientom $-\frac{1}{2}$ preslika v krožnico devetih točk. Naj bo $P = (\alpha, \beta, \gamma)$ točka na krožnici devetih točk in naj bo $Q = (\alpha', \beta', \gamma')$ točka na očrtani krožnici. Izračunajmo njene koordinate. Težišče G deli daljico QP v razmerju $2 : 1$, torej je:

$$\left(\frac{2s}{3a}, \frac{2s}{3b}, \frac{2s}{3c}\right) = \left(\frac{1}{3}\alpha' + \frac{2}{3}\alpha, \frac{1}{3}\beta' + \frac{2}{3}\beta, \frac{1}{3}\gamma' + \frac{2}{3}\gamma\right).$$

Dobimo tri enačbe, ena izmed njih je:

$$\frac{2s}{3a} = \frac{1}{3}\alpha' + \frac{2}{3}\alpha.$$

Izrazimo iskano koordinato:

$$\alpha' = \frac{2s}{a} - 2\alpha = \frac{2s - 2a\alpha}{a} = \frac{b\beta + c\gamma - a\alpha}{a}.$$

Podobno dobimo:

$$\beta' = \frac{a\alpha + c\gamma - b\beta}{b},$$

$$\gamma' = \frac{a\alpha + b\beta - c\gamma}{c}.$$

To so koordinate točke, ki leži na očrtani krožnici, zato jih lahko vstavimo v enačbo očrtane krožnice:

$$0 = a\frac{(a\alpha + c\gamma - b\beta)(a\alpha + b\beta - c\gamma)}{cb} + b\frac{(b\beta + c\gamma - a\alpha)(a\alpha + b\beta - c\gamma)}{ac}$$

$$+c\frac{(b\beta + c\gamma - a\alpha)(a\alpha + c\gamma - b\beta)}{ab}.$$

Pomnožimo z abc:

$$0 = a^2(a\alpha + c\gamma - b\beta)(a\alpha + b\beta - c\gamma) + b^2(b\beta + c\gamma - a\alpha)(a\alpha + b\beta - c\gamma)$$

$$+c^2(b\beta + c\gamma - a\alpha)(a\alpha + c\gamma - b\beta).$$

Pomnožimo oklepaje in poenostavimo:

$$0 = a^2\alpha^2(a^2 - b^2 - c^2) + 2a^2bc\beta\gamma$$

$$+b^2\beta^2(b^2 - a^2 - c^2) + 2b^2ac\alpha\gamma$$

$$+c^2\gamma^2(c^2 - a^2 - b^2) + 2c^2ab\alpha\beta.$$

Delimo z $2abc$ in uporabimo kosinusni izrek:

$$0 = -a\alpha^2 \cos A - b\beta^2 \cos B - c\gamma^2 \cos C + a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta.$$

Sedaj upoštevamo sinusni izrek in trigonometrično identiteto $2\cos x \sin x = \sin 2x$:

$$0 = -R\alpha^2 \sin 2A - R\beta^2 \sin 2B - R\gamma^2 \sin 2C + \beta\gamma 2R \sin A + \alpha\gamma 2R \sin B + \alpha\beta 2R \sin C.$$

Delimo z $-R$ in dobimo enačbo krožnice devetih točk:

$$0 = \alpha^2 \sin 2A + \beta^2 \sin 2B + \gamma^2 \sin 2C - 2(\beta\gamma \sin A + \alpha\gamma \sin B + \alpha\beta \sin C).$$

2.3 Krožnica z danim središčem in polmerom

Poglejmo si, kako zapišemo enačbo krožnice, ki ima za središče točko $C = (\alpha', \beta', \gamma')$, njen polmer pa je r. V nadaljevanju bomo potrebovali formulo za razdaljo med točkama, ki smo jo navedli v prejšnjem poglavju v izreku 1.8.

Naj bo (α, β, γ) poljubna točka na krožnici. Razdalja med to točko in središčem C je enaka r. Naše podatke vstavimo v formulo in jo kvadriramo:

$$r^2 = \frac{abc}{4S^2}(a\cos A(\alpha-\alpha')^2 + b\cos B(\beta-\beta')^2 + c\cos C(\gamma-\gamma')^2).$$

Uporabimo sinusni izrek, ki nam pove, da je

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

in osamimo oklepaj:

$$\frac{r^2 4S^2}{abc} = (2R\sin A\cos A(\alpha-\alpha')^2 + 2R\sin B\cos B(\beta-\beta')^2 + 2R\sin C\cos C(\gamma-\gamma')^2).$$

Izpostavimo R, ki ga damo na levo stran in upoštevamo, da je $2\sin x\cos x = \sin 2x$. Dobimo:

$$\frac{r^2 4S^2}{Rabc} = (\sin 2A(\alpha-\alpha')^2 + \sin 2B(\beta-\beta')^2 + \sin 2C(\gamma-\gamma')^2).$$

Ob upoštevanju sinusnega izreka in formule za ploščino $S = \frac{abc}{4R}$ posebej uredimo člen na levi strani:

$$\frac{r^2 4S^2}{Rabc} = \frac{r^2 4\frac{(abc)^2}{16R^2}}{Rabc} = \frac{r^2 abc}{4R^3} = \frac{2r^2 abc}{2R2R2R} = \frac{2r^2 abc}{\frac{abc}{\sin A\sin B\sin C}} = 2r^2\sin A\sin B\sin C.$$

Celotna enačba:

$$\sin 2A(\alpha-\alpha')^2 + \sin 2B(\beta-\beta')^2 + \sin 2C(\gamma-\gamma')^2 = 2r^2\sin A\sin B\sin C.$$

Naj bo $k = \frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{2S}$. Enačbo preoblikujemo in jo homogeniziramo. To pomeni, da proste člene pomnožimo s k^2, linearne s k, kvadratne člene pa pustimo. To lahko naredimo, saj so koordinate dejanske in je v tem primeru $k = 1$, saj je $a\alpha + b\beta + c\gamma = 2S$.

Enačba je sedaj videti tako:

$$\begin{aligned}0 =& \alpha^2 \sin 2A + \beta^2 \sin 2B + \gamma^2 \sin 2C \\ & - 2k(\alpha\alpha' \sin 2A + \beta\beta' \sin 2B + \gamma\gamma' \sin 2C) \\ & + k^2(\alpha'^2 \sin 2A + \beta'^2 \sin 2B + \gamma'^2 \sin 2C - 2r^2 \sin A \sin B \sin C). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Če vstavimo $k = \frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{2S}$, pomnožimo in izpostavimo α^2, β^2 in γ^2, dobimo enačbo oblike:

$$l\alpha^2 + m\beta^2 + n\gamma^2 + p\alpha\beta + t\alpha\gamma + u\beta\gamma = 0.$$

Na preprost način se iz dejanskih trilinearnih koordinat dobi homogene. Prišli smo do homogene enačbe stopnje 2, torej je enačba 2.1 res enačba krožnice s središčem C in polmerom r.

Izrek 2.3 *Če je $O = 0$ enačba poljubne krožnice, potem ima vsaka krožnica, ki ji je koncentrična, enačbo $O + tk^2 = 0$, kjer je t neka konstanta.*

Dokaz. To velja zato, ker polmer r v enakosti 2.1 nastopa le v koeficientu pri k^2. □

Izrek 2.4 *Če je $O = 0$ enačba poljubne krožnice, potem je vsaka druga krožnica predstavljena z enačbo $O + uk = 0$, kjer je $u = 0$ enačba neke premice.*

Dokaz. Podobno kot prej, v enakosti 2.1 členi, ki so neodvisni od k, ne vključujejo ne r, niti α', β', γ'. To pomeni, da bodo ti pri vseh krožnicah enaki, drugi pa se bodo spremenili. □

Izrek 2.5 *Naj bosta $O = 0$ in $O + uk = 0$ enačbi dveh krožnic. Potem je $u = 0$ enačba potenčne premice teh dveh krožnic.*

Dokaz.

Pogledali si bomo dve možnosti. Prva je ta, da se krožnici sekata v dveh točkah. Vemo, da potenčna premica dveh krožnic, ki se sekata, poteka skozi njuni presečišči. Recimo, da sta ti dve presečišči M in N. Točki ležita na krožnicah, zato morata zadoščati njunima enačbama:

$$O(M) = 0,$$

$$O(M) + u(M)k(M) = 0.$$

To lahko odštejemo in dobimo:

$$u(M)k(M) = 0.$$

Točka M je končna, zato ne leži na premici v neskončnosti, torej $k(M) \neq 0$. Iz tega sledi, da je $u(M) = 0$. Podobno naredimo za točko N in dobimo $u(N) = 0$. Torej točki M in N ležita na u, zato je potenčna premica.

Druga možnost je, da se krožnici ne sekata v dveh točkah. Označimo krožnici s K_1 in K_2. V tem primeru dobimo potenčno premico p tako, da narišemo tretjo krožnico K_3, ki ju seka, njihova središča pa niso kolinearna. Določimo potenčno premico krožnic K_1 in K_3 in jo označimo s $p_{1,3}$, ter potenčno premico $p_{2,3}$ krožnic K_2 in K_3. Ti dve potenčni premici se sekata v točki P, ki ji rečemo potenčno središče. Premica, ki je pravokotna na nosilko skozi središča krožnic K_1 in K_2 in gre skozi točko P, je potenčna premica začetnih krožnic. Naj bosta enačbi premic $p_{1,3}$ in $p_{2,3}$ enaki $u_{1,3} = 0$ in $u_{2,3} = 0$. Ker ima prva krožnica enačbo $O = 0$, ima tretja krožnica enačbo

$$O + u_{1,3}k = 0,$$

saj je $u_{1,3} = 0$ enačba njune potenčne premice. Podobno naredimo s krožnico K_2 in dobimo še drugo enačbo krožnice K_3, ki se glasi

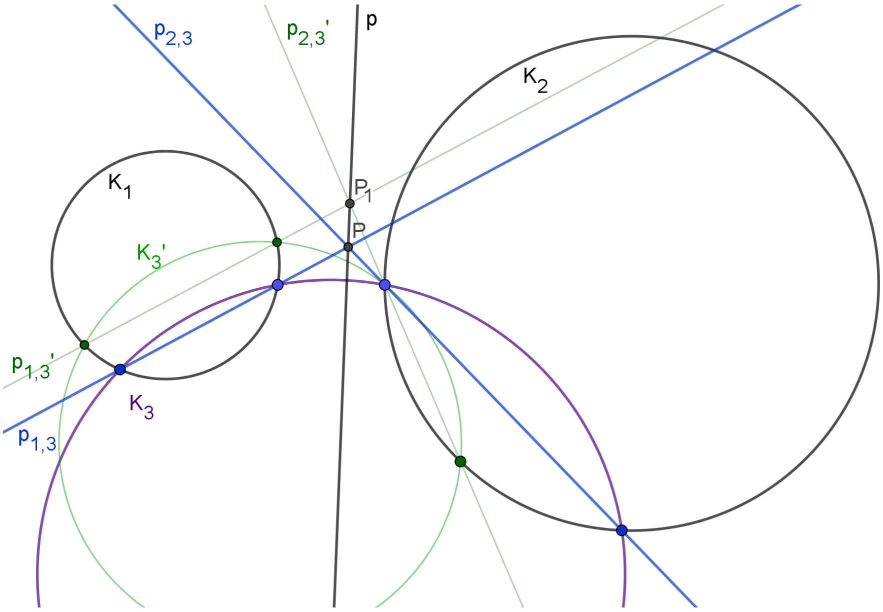
$$O + uk + u_{2,3}k = 0.$$

Ti dve enačbi lahko odštejemo in dobimo, da vsaka točka na K_3 zadošča:

$$u_{1,3}k - uk - u_{2,3}k = 0,$$

$$(u_{1,3} - u - u_{2,3})k = 0.$$

Enačbi $k = 0$ zadoščajo samo točke v neskončnosti, zato je v tem primeru $k \neq 0$. Torej mora za vse točke na krožnici K_3 veljati: $u_{1,3} - u - u_{2,3} = 0$. Če v to enačbo vstavimo neko točko, dobimo enačbo oblike $a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma = 0$, kjer so a_1, b_1, c_1 neki koeficienti. To je enačba neke premice. Vse točke, ki so na neki krožnici, ne morejo ustrezat enačbi premice razen, če je $a_1 = b_1 = c_1 = 0$, to pa velja, če je $u = u_{1,3} - u_{2,3}$. Vemo, da je $u_{1,3}(P) = 0$ in $u_{2,3}(P) = 0$, zato je tudi $u(P) = 0 - 0 = 0$, torej premica z enačbo $u = 0$ poteka skozi potenčno središče. Če bi izbrali neko drugo krožnico K_3', ki seka eno od začetnih krožnic v natanko enem istem presečišču, bi z istim postopkom dobili drugo potenčno središče P_1. Spet bi ugotovili, da premica z enačbo $u = 0$ poteka skozi točko P_1. Imamo torej dve točki skozi kateri poteka potenčna premica krožnic K_1 in K_2 in dokazali smo, da je to premica z enačbo $u = 0$.



Slika 2.2: Konstrukcija potenčne premice

□

Naslednji izrek je ključen rezultat tega razdelka.

Izrek 2.6 *Enačba poljubne krožnice se glasi*

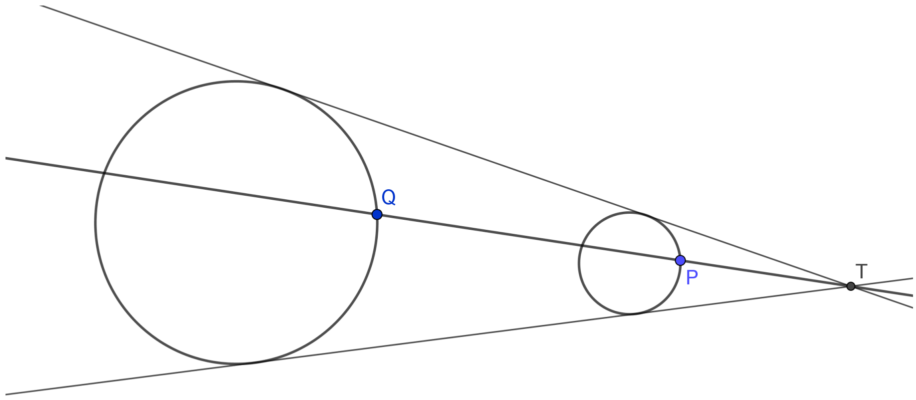
$$a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta + (l\alpha + m\beta + n\gamma)(a\alpha + b\beta + c\gamma) = 0,$$

kjer je $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ enačba potenčne premice dane krožnice in očrtane krožnice trikotnika ABC.

Dokaz. Uporabimo izrek 2.4 in za poljubno krožnico izberemo očrtano krožnico. Potem se bo vsaka druga krožnica predstavila z enačbo $a\beta\gamma+b\alpha\gamma+c\alpha\beta+uk = 0$, kjer je $u = 0$ enačba neke premice. V izreku 2.5 smo premislili, da je ta premica potenčna premica ustreznih dveh krožnic, torej dane krožnice in očrtane krožnice trikotnika ABC. □

2.4 Splošna krožnica

Sedaj bomo isti rezultat, kot zgoraj, izpeljali še na drug način, tokrat z uporabo raztegov. Vsako krožnico $\mathcal{C}$ lahko namreč z nekim raztegom $\delta_{T,h}$ preslikamo v očrtano krožnico, kjer je T presečišče skupnih tangent, ki so na istem bregu krožnic, keoficient h pa je neko realno število.



Slika 2.3: Krožnico z raztegom preslikamo v očrtano krožnico

Naj bo $T = (u, v, w)$ in naj bo $P = (\alpha, \beta, \gamma)$ točka na krožnici, katere enačbo iščemo. Ta točka se preslika v točko $Q = (\alpha', \beta', \gamma')$, ki leži na očrtani krožnici. Poglejmo, kakšne so njene koordinate. Uporabimo formulo za izračun trilinearnih koordinat točke P, ki daljico TQ deli v razmerju $1 : h - 1$:

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \Big(\frac{h-1}{h}u + \frac{1}{h}\alpha', \frac{h-1}{h}v + \frac{1}{h}\beta', \frac{h-1}{h}w + \frac{1}{h}\gamma'\Big).$$

Enačimo levo in desno stran, da dobimo tri enačbe. Ena izmed njih je

$$\alpha = \frac{h-1}{h}u + \frac{1}{h}\alpha'.$$

Za lažje računanje uvedemo novo spremenljivko $t = \frac{1-h}{h}$ in izrazimo iskano koordinato:

$$\alpha' = \frac{\alpha + tu}{1+t}.$$

Podobno dobimo:

$$\beta' = \frac{\beta + tv}{1+t},$$

$$\gamma' = \frac{\gamma + tw}{1+t}.$$

Dobili smo trilinearne koordinate točke Q:

$$Q = \Big(\frac{\alpha + tu}{1+t}, \frac{\beta + tv}{1+t}, \frac{\gamma + tw}{1+t}\Big),$$

$$Q = \alpha + tu : \beta + tv : \gamma + tw.$$

Točka Q leži na očrtani krožnici, zato mora zadoščati njeni enačbi:

$$0 = a(\beta + tv)(\gamma + tw) + b(\alpha + tu)(\gamma + tw) + c(\alpha + tu)(\beta + tv).$$

Pomnožimo in izpostavimo t in t^2:

$$0 = a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta + t(a(w\beta + v\gamma) + b(w\alpha + u\gamma) + c(v\alpha + u\beta)) + t^2(avw + buw + cuv).$$

Sedaj bomo naredili enako, kot smo naredili pri enačbi krožnice z danim polmerom in središčem. Enačbo bomo homogenizirali in sicer, člen, kjer je t bomo pomnožili s k, člen pri t^2 pa s k^2. S tem nič ne spremenimo, ker so α, β in γ dejanske trilinearne koordinate in je $k = 1$.

$$\begin{aligned} 0 &= a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta \\ &\quad + kt(a(w\beta + v\gamma) + b(w\alpha + u\gamma) + c(v\alpha + u\beta)) \\ &\quad + k^2t^2(avw + buw + cuv) \end{aligned}$$

Sedaj vstavimo $k = \frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{2S}$ in izpostavimo člen v števcu.

$$\begin{aligned} 0 &= a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta \\ &\quad + (a\alpha + b\beta + c\gamma)\Big(\frac{t}{2S}(a(w\beta + v\gamma) + b(w\alpha + u\gamma) + c(v\alpha + u\beta)) \\ &\quad + \frac{t^2(a\alpha + b\beta + c\gamma)}{4S^2}(avw + buw + cuv)\Big) \end{aligned}$$

Opazimo, da je člen, ki se množi z $(a\alpha + b\beta + c\gamma)$ linearen, zato lahko izpostavimo α, β in γ in iz tega sledi, da lahko vsako krožnico predstavimo z enačbo:

$$a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta + (l\alpha + m\beta + n\gamma)(a\alpha + b\beta + c\gamma) = 0,$$

kjer so l, m, n neke konstante.

Dobili smo formulo oblike $O + uk = 0$, kjer je $O = a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta = 0$ enačba očrtane krožnice, $u = l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ pa je potenčna premica.

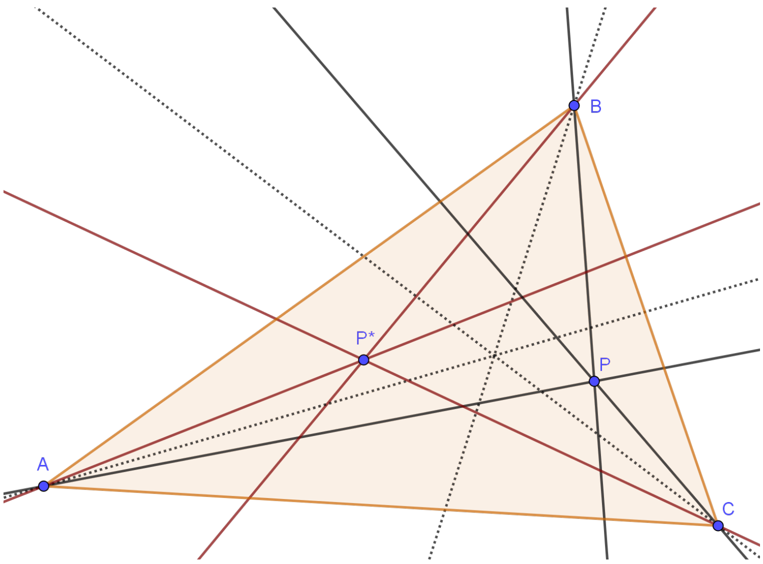
Poglavje 3

Preslikave v geometriji trikotnika

Pri Grinbergovem izreku se srečamo s štirimi preslikavami v trikotniku. V tem poglavju jih bomo opisali in izračunali trilinearne koordinate njihovih slik.

3.1 Izogonalna konjugacija

Izrek 3.1 *Naj bo P točka, ki ne leži na nosilkah stranic trikotnika ABC. Nosilko PC prezrcalimo preko simetrale kota C, nosilko PB preko simetrale kota B in nosilko PA preko simetrale kota A. Te tri prezrcaljene premice se sekajo v skupni točki $P^* = \delta(P)$, ki ji rečemo izogonalna konjugiranka točke P.*



Slika 3.1: Izogonalna konjugacija

Dokaz. Poleg tega da bomo dokazali izrek, bomo izračunali koordinate novo nastale točke P^*, če je $P = \alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0$.
Najprej izračunamo enačbe nosilk:

$$PC : \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha\beta_0 - \beta\alpha_0 = 0,$$

$$PB : \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\alpha\gamma_0 - \gamma\alpha_0 = 0,$$

$$PA : \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \beta\gamma_0 - \gamma\beta_0 = 0.$$

Za nadaljevanje bomo potrebovali naslednjo lemo, ki smo jo dokazali pri predmetu Analitični pristopi v geometriji.

Lema 3.2 *Premici $k\alpha + t\beta = 0$ in $t\alpha + k\beta = 0$ sta simetrični glede na simetralo kota C.*

Torej, premico PC prezrcalimo preko kota C in dobimo premico

$$P^*C : \alpha\alpha_0 - \beta\beta_0 = 0.$$

Enako naredimo z drugima dvema premicama:

$$P^*B : \alpha\alpha_0 - \gamma\gamma_0 = 0,$$

$$P^*A : \beta\beta_0 - \gamma\gamma_0 = 0.$$

Poglejmo, če so te premice res konkurentne:

$$\begin{vmatrix} 0 & \beta_0 & -\gamma_0 \\ \alpha_0 & -\beta_0 & 0 \\ \alpha_0 & 0 & -\gamma_0 \end{vmatrix} = 0\beta_0\gamma_0 + \beta_0\alpha_0\gamma_0 - \gamma_0\alpha_0\beta_0 = 0.$$

Premice se sekajo v skupni točki. Izračunajmo njene koordinate:

$$P^*C \cap P^*B : \begin{vmatrix} i & j & k \\ \alpha_0 & -\beta_0 & 0 \\ \alpha_0 & 0 & -\gamma_0 \end{vmatrix} = i\beta_0\gamma_0 + j\alpha_0\gamma_0 + k\alpha_0\beta_0.$$

Iz tega sledi, da so trilinearne koordinate točke P^* enake

$$P^* = \beta_0\gamma_0 : \alpha_0\gamma_0 : \alpha_0\beta_0$$

oziroma, če delimo z $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ dobimo

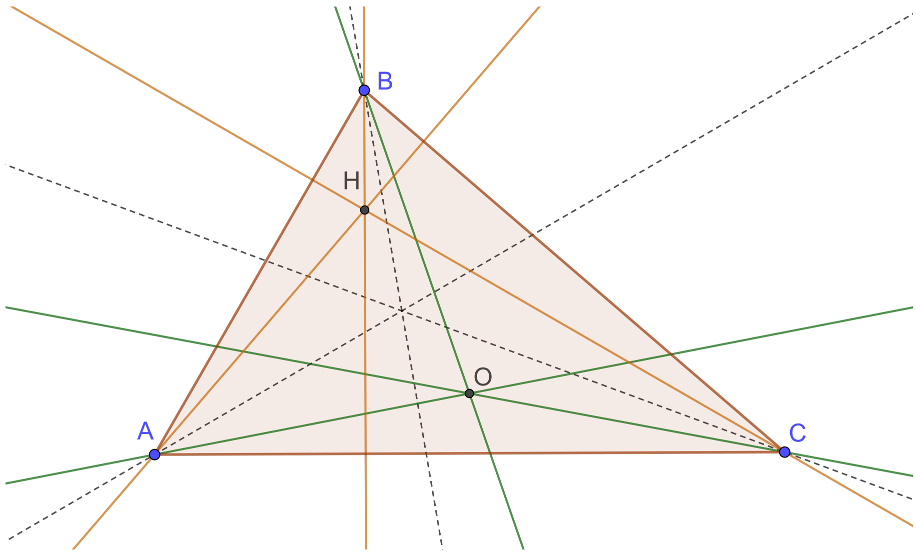
$$P^* = \frac{1}{\alpha_0} : \frac{1}{\beta_0} : \frac{1}{\gamma_0}.$$

□

Zgled. Pri izogonalni konjugaciji je središče včrtane krožnice I fiksna točka, saj je presečišče simetral kotov, preko katerih naj bi se preslikala.
Poglejmo, kam se preslika središče očrtane krožnice. Vemo, da je $O = \cos A : \cos B : \cos C$. Potem je

$$\delta(O) = O^* = \frac{1}{\cos A} : \frac{1}{\cos B} : \frac{1}{\cos C} = H,$$

torej se O preslika v višinsko točko.

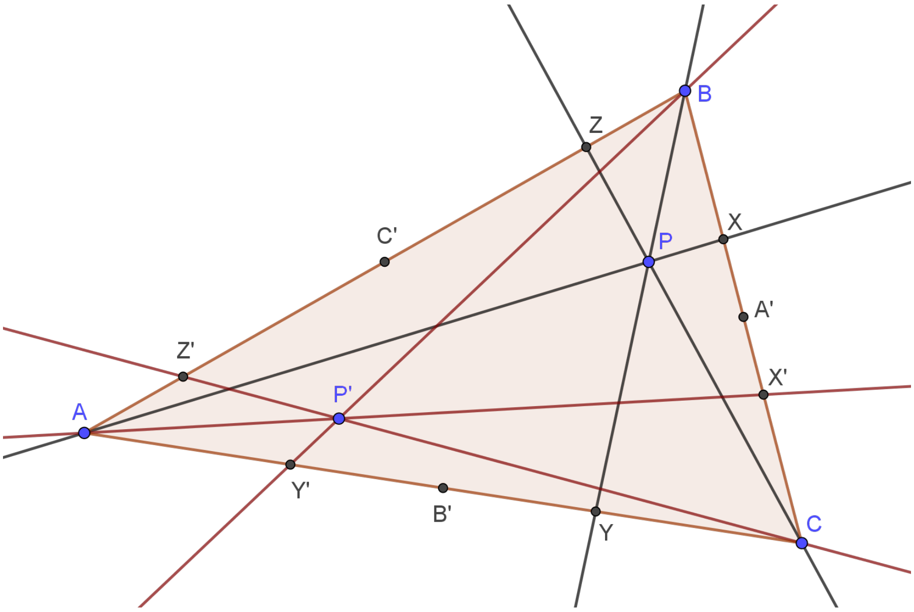


Slika 3.2: Izogonalna konjugiranka točke O je H

3.2 Izotomična konjugacija

Izrek 3.3 *Naj bo P točka, ki ne leži na nosilkah stranic trikotnika ABC. Premica AP seka nosilko stranice a v X, premica BP nosilko b v Y in premica CP nosilko stranice c v Z. Točke X, Y in Z prezrcalimo čez razpolovišča stranic na katerih ležijo in dobimo točke*

X', Y' in Z'. Premice $X'A$, $Y'B$ in $Z'C$ se sekajo v skupni točki $P' = \iota(P)$, ki se imenuje izotomična konjugiranka točke P.



Slika 3.3: Izotomična konjugacija

Dokaz. Izrek bomo dokazali tako, da bomo poiskali enačbe premic AX', BY', CZ' in izračunali trilinearne koordinate točke, v kateri se te premice sekajo. Naj bo $P = \alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0$. Najprej izračunajmo dejanske trilinearne koordinate razpolovišč stranic. Vemo, da je $A = (v_a, 0, 0)$ in $B = (0, v_b, 0)$. Točka C' deli daljico AB v razmerju $1 : 1$, torej so njene koordinate enake

$$\Big(\frac{1}{2}v_a + \frac{1}{2}0, \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}v_b, \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}0\Big) = \Big(\frac{1}{2}v_a, \frac{1}{2}v_b, 0\Big) = \Big(\frac{S}{a}, \frac{S}{b}, 0\Big).$$

Pri drugi enakosti smo uporabili formulo za ploščino trikotnika. Podobno naredimo za A' in B':

$$A' = \Big(0, \frac{S}{b}, \frac{S}{c}\Big),$$

$$B' = \Big(\frac{S}{a}, 0, \frac{S}{c}\Big),$$

$$C' = \Big(\frac{S}{a}, \frac{S}{b}, 0\Big).$$

Točke X, Y, Z so sledi točke P, torej po izreku 1.5 vemo, kakšne so njihove homogene trilinearne koordinate. Ampak potrebovali bomo dejanske. Gremo najprej na prvo koordinato

$X = 0 : \beta_0 : \gamma_0$ in izračunajmo koeficient k:

$$a\alpha k + b\beta k + c\gamma k = 2S,$$

$$a0k + b\beta_0 k + c\gamma_0 k = 2S,$$
$$k = \frac{2S}{b\beta_0 + c\gamma_0}.$$

Koeficient k pomnožimo s homogenimi in dobimo dejanske koordinate:

$$X = \Big(0, \frac{2S\beta_0}{b\beta_0 + c\gamma_0}, \frac{2S\gamma_0}{b\beta_0 + c\gamma_0}\Big).$$

Poglejmo kakšne so koordinate točke $X' = (\alpha', \beta', \gamma')$. Točka A' seka daljico XX' v razmerju $1 : 1$. Uporabimo formulo iz izreka 1.6:

$$\Big(0, \frac{S}{b}, \frac{S}{c}\Big) = \Big(0 + \frac{1}{2}\alpha', \frac{1}{2}\frac{2S\beta_0}{b\beta_0 + c\gamma_0} + \frac{1}{2}\beta', \frac{1}{2}\frac{2S\gamma_0}{b\beta_0 + c\gamma_0} + \frac{1}{2}\gamma'\Big).$$

Enačimo levo in desno stran. Vidimo, da je $\alpha' = 0$ in:

$$\frac{S}{b} = \frac{S\beta_0}{b\beta_0 + c\gamma_0} + \frac{1}{2}\beta'.$$

Izrazimo β' in dobimo:

$$\beta' = 2\Big(\frac{S}{b} - \frac{S\beta_0}{b\beta_0 + c\gamma_0}\Big) = \frac{2(Sb\beta_0 + Sc\gamma_0 - Sb\beta_0)}{b(b\beta_0 + c\gamma_0)} = \frac{2Sc\gamma_0}{b(b\beta_0 + c\gamma_0)}.$$

Na enak način izračunamo še tretjo koordinato, ki je

$$\gamma' = \frac{2Sb\beta_0}{c(b\beta_0 + c\gamma_0)}.$$

Dobili smo prvo točko:

$$X' = \Big(0, \frac{2Sc\gamma_0}{b(b\beta_0 + c\gamma_0)}, \frac{2Sb\beta_0}{c(b\beta_0 + c\gamma_0)}\Big).$$

Poenostavimo in delimo z $bc\beta_0\gamma_0$:

$$X' = 0 : \frac{1}{b^2\beta_0} : \frac{1}{c^2\gamma_0}.$$

Podobno pridemo do točk:

$$Y' = \frac{1}{a^2\alpha_0} : 0 : \frac{1}{c^2\gamma_0},$$

$$Z' = \frac{1}{a^2\alpha_0} : \frac{1}{b^2\beta_0} : 0.$$

Vidimo, da so te tri točke sledi točke

$$P' = \frac{1}{a^2\alpha_0} : \frac{1}{b^2\beta_0} : \frac{1}{c^2\gamma_0},$$

kar pomeni, da se ustrezne premice sekajo v tej točki in dokazali smo izrek. □

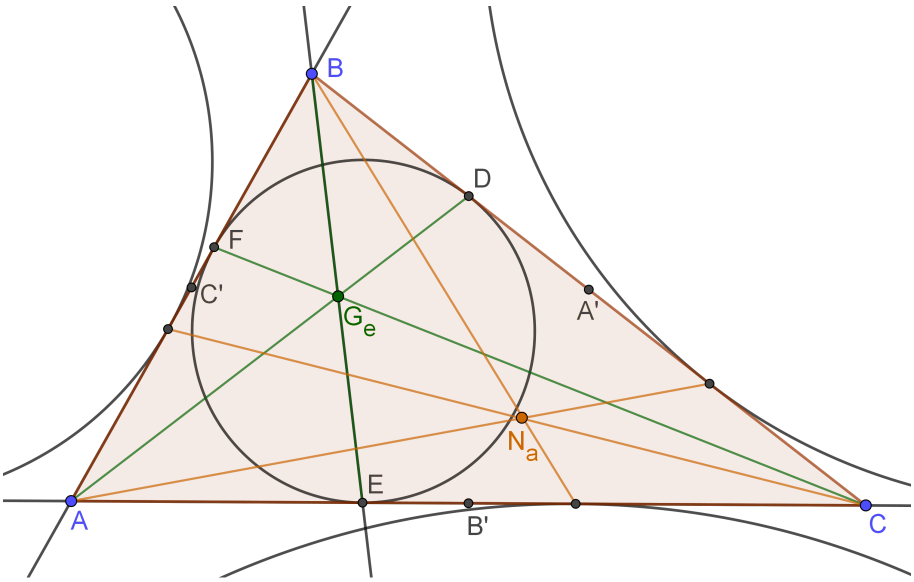
Zgled. Fiksna točka izotomične konjugacije je težišče G.

Poiščimo izotomično konjugiranko Gergonnove točke:

$$\iota(Ge) = \frac{1}{a^2\frac{1}{a(b+c-a)}} : \frac{1}{b^2\frac{1}{b(a+c-b)}} : \frac{1}{c^2\frac{1}{c(a+b-c)}},$$

$$\iota(Ge) = \frac{b+c-a}{a} : \frac{a+c-b}{b} : \frac{a+b-c}{c}.$$

Dobili smo koordinate Nagelove točke.

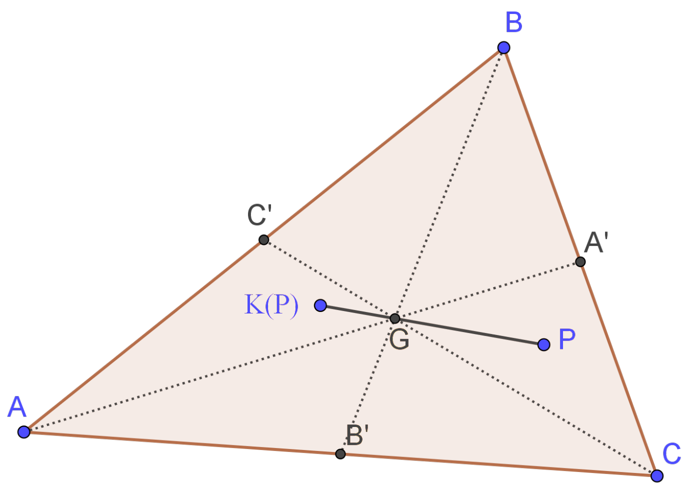


Slika 3.4: Točki Ge in Na sta izotomični konjugiranki

Ta konjugacija se lepo vidi na zgornji sliki. Točka, kjer se pričrtana krožnica dotika stranice, se prezrcali čez razpolovišče stranice v dotikališče včrtane krožnice in te stranice.

3.3 Komplement in antikomplement

Naslednji dve preslikavi, ki nastopata v Grinbergovem izreku, sta komplement in antikomplement. Komplement $K(P)$ točke P je slika točke P z raztegom $\delta_{G,-\frac{1}{2}}$ s središčem G in koeficientom $-\frac{1}{2}$. Podobno je antikomplement točke P slika točke P z raztegom $\delta_{G,-2}$ s središčem G in koeficientom -2. Ker je razteg $\delta_{G,-2}$ inverz raztega $\delta_{G,-\frac{1}{2}}$, je antikomplement dejansko K^{-1}.



Slika 3.5: Komplement

Velja:

- $|PG| = 2|GK(P)|$, $|K^{-1}(P)G| = 2|GP|$,
- $K(G) = G$, $K^{-1}(G) = G$,
- $K(A) = A'$, $K(B) = B'$, $K(C) = C'$.

Izrek 3.4 *Naj bo $P = \alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0$ točka v trikotniku. Trilinearne koordinate komplementa točke P se glasijo:*

$$K(P) = \frac{b\beta_0 + c\gamma_0}{a} : \frac{a\alpha_0 + c\gamma_0}{b} : \frac{a\alpha_0 + b\beta_0}{c}.$$

Dokaz. Izračunajmo trilinearne koordinate točke $K(P) = \alpha' : \beta' : \gamma'$, če je $P = \alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0$. Dejanske trilinearne koordinate težišča so

$$G = \Big(\frac{2S}{3a}, \frac{2S}{3b}, \frac{2S}{3c}\Big).$$

Potrebovali bomo tudi dejanske trilinearne koordinate točke P, ki se glasijo:

$$P = \Big(\frac{2S\alpha_0}{a\alpha_0 + b\beta_0 + c\gamma_0}, \frac{2S\beta_0}{a\alpha_0 + b\beta_0 + c\gamma_0}, \frac{2S\gamma_0}{a\alpha_0 + b\beta_0 + c\gamma_0}\Big).$$

Točka G seka daljico $K(P)P$ v razmerju $1 : 2$. Uporabimo formulo iz izreka 1.6:

$$\Big(\frac{2S}{3a}, \frac{2S}{3b}, \frac{2S}{3c}\Big) = \Big(\frac{2}{3}\alpha' + \frac{1}{3}\frac{2S\alpha_0}{a\alpha_0 + b\beta_0 + c\gamma_0}, \frac{2}{3}\beta' + \frac{1}{3}\frac{2S\beta_0}{a\alpha_0 + b\beta_0 + c\gamma_0}, \frac{2}{3}\gamma' + \frac{1}{3}\frac{2S\gamma_0}{a\alpha_0 + b\beta_0 + c\gamma_0}\Big).$$

Enačimo leve in desne strani in dobimo tri podobne enačbe. Ena izmed njih je:

$$\frac{2S}{3a} = \frac{2}{3}\alpha' + \frac{1}{3}\frac{2S\alpha_0}{a\alpha_0 + b\beta_0 + c\gamma_0}.$$

Izpostavimo spremenljivko, ki jo iščemo:

$$\begin{aligned}
\alpha' = \frac{3}{2}\Big(\frac{2S}{3a} - \frac{2S\alpha_0}{3(a\alpha_0 + b\beta_0 + c\gamma_0)}\Big) &= \frac{3}{2}\Big(\frac{2S(a\alpha_0 + b\beta_0 + c\gamma_0) - 2Sa\alpha_0}{3a(a\alpha_0 + b\beta_0 + c\gamma_0)}\Big) \\
= \frac{3}{2}\Big(\frac{2S(b\beta_0 + c\gamma_0)}{3a(a\alpha_0 + b\beta_0 + c\gamma_0)}\Big) &= \frac{S(b\beta_0 + c\gamma_0)}{a(a\alpha_0 + b\beta_0 + c\gamma_0)}.
\end{aligned}$$

Iz drugih dveh enačb dobimo:

$$\beta' = \frac{S(a\alpha_0 + c\gamma_0)}{b(a\alpha_0 + b\beta_0 + c\gamma_0)}$$

in

$$\gamma' = \frac{S(a\alpha_0 + b\beta_0)}{c(a\alpha_0 + b\beta_0 + c\gamma_0)}.$$

Sedaj lahko zapišemo točko $K(P)$:

$$K(P) = \Big(\frac{S(b\beta_0 + c\gamma_0)}{a(a\alpha_0 + b\beta_0 + c\gamma_0)}, \frac{S(a\alpha_0 + c\gamma_0)}{b(a\alpha_0 + b\beta_0 + c\gamma_0)}, \frac{S(a\alpha_0 + b\beta_0)}{c(a\alpha_0 + b\beta_0 + c\gamma_0)}\Big).$$

Vse tri koordinate pomnožimo s $\frac{a\alpha_0 + b\beta_0 + c\gamma_0}{S}$ in dobimo homogene trilinearne koordinate komplementa točke P.

$\square$

Za razliko od prejšnjih dveh preslikav ta ni involucija. Inverz komplementa je ravno antikomplement.

Izrek 3.5 *Naj bo $P = \alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0$ točka v trikotniku. Trilinearne koordinate antikomplementa točke P se glasijo:*

$$K^{-1}(P) = \frac{-a\alpha_0 + b\beta_0 + c\gamma_0}{a} : \frac{a\alpha_0 - b\beta_0 + c\gamma_0}{b} : \frac{a\alpha_0 + b\beta_0 - c\gamma_0}{c}.$$

Dokaz. Poglejmo si, kako priti do trilinearnih koordinat antikomplementa točke $P = \alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0$. Postopek bomo pokazali za prvo koordinato, saj je za drugi dve skoraj enak. Vemo, da je prva koordinata komplementa točke enaka

$$\alpha' = \frac{S(b\beta_0 + c\gamma_0)}{a(a\alpha_0 + b\beta_0 + c\gamma_0)}$$

Koordinata je dejanska, zato lahko uporabimo $a\alpha_0 + b\beta_0 + c\gamma_0 = 2S$:

$$\alpha' = \frac{S(2S - a\alpha_0)}{a2S} = \frac{2S - a\alpha_0}{2a}.$$

Ker iščemo inverz, bomo zamenjali α' in α_0 in izrazili α':

$$\alpha_0 = \frac{2S - a\alpha'}{2a},$$

$$\alpha' = \frac{2S - 2a\alpha_0}{a}.$$

Podobno naredimo, da dobimo β' in γ' in lahko zapišemo koordinate antikomplementa točke P:

$$K^{-1}(P) = \frac{2(S - a\alpha_0)}{a} : \frac{2(S - b\beta_0)}{b} : \frac{2(S - c\gamma_0)}{c}$$

ali če poenostavimo:

$$K^{-1}(P) = \frac{-a\alpha_0 + b\beta_0 + c\gamma_0}{a} : \frac{a\alpha_0 - b\beta_0 + c\gamma_0}{b} : \frac{a\alpha_0 + b\beta_0 - c\gamma_0}{c}.$$

□

Trditev 3.6 *Komplement in antikomplement premice sta tej premici vzporedni premici.*

Dokaz. Pri predmetu Ravninska in prostorska geometrija smo to dokazali za vsak razteg, zato velja tudi za komplement in antikomplement. □

Trditev 3.7 *Komplement in antikomplement točke v neskončnosti sta točki v neskončnosti.*

Dokaz. Trditev bomo dokazali s pomočjo trilinearnih koordinat. Naj bo $P = \alpha : \beta : \gamma$ točka v neskončnosti. Koordinate komplementa so $K(P) = \frac{b\beta + c\gamma}{a} : \frac{a\alpha + c\gamma}{b} : \frac{a\alpha + b\beta}{c}$. Poglejmo če je to res točka v neskončnosti.

$$a\frac{b\beta + c\gamma}{a} + b\frac{a\alpha + c\gamma}{b} + c\frac{a\alpha + b\beta}{c} =$$

$$b\beta + c\gamma + a\alpha + c\gamma + a\alpha + b\beta = 2(a\alpha + b\beta + c\gamma).$$

Ker je P točka v neskončnosti, velja $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ in zato tudi $2(a\alpha + b\beta + c\gamma) = 0$, torej trditev velja. Za antikomplement izračunamo podobno. $\square$

Zgled. Fiksna točka komplementa in antikomplementa je težišče.

Komplement višinske točke je središče očrtane krožnice, katere komplement je središče krožnice devetih točk.

3.4 Krožna cevianska konjugacija

Izrek 3.8 *Naj bo $P = u : v : w$ točka, ki ne leži na nosilkah stranic trikotnika ABC. Točki P priredimo Cevov trikotnik $A_P B_P C_P$. Temu trikotniku očrtamo krožnico, ki vsako nosilko stranice poleg A_P, B_P, C_P seka še v točkah A'_P, B'_P, C'_P. Premice AA'_P, BB'_P in CC'_P se sekajo v skupni točki $\phi(P)$, ki ji rečemo krožna cevianska konjugiranka točke P in ima trilinearne koordinate enake:*

$$\phi(P) = \frac{1}{a\left(\frac{avw}{bv+cw} - \frac{buw}{au+cw} - \frac{cuv}{au+bv}\right)} :$$
$$\frac{1}{b\left(-\frac{avw}{bv+cw} + \frac{buw}{au+cw} - \frac{cuv}{au+bv}\right)} :$$
$$\frac{1}{c\left(-\frac{avw}{bv+cw} - \frac{buw}{au+cw} + \frac{cuv}{au+bv}\right)}.$$

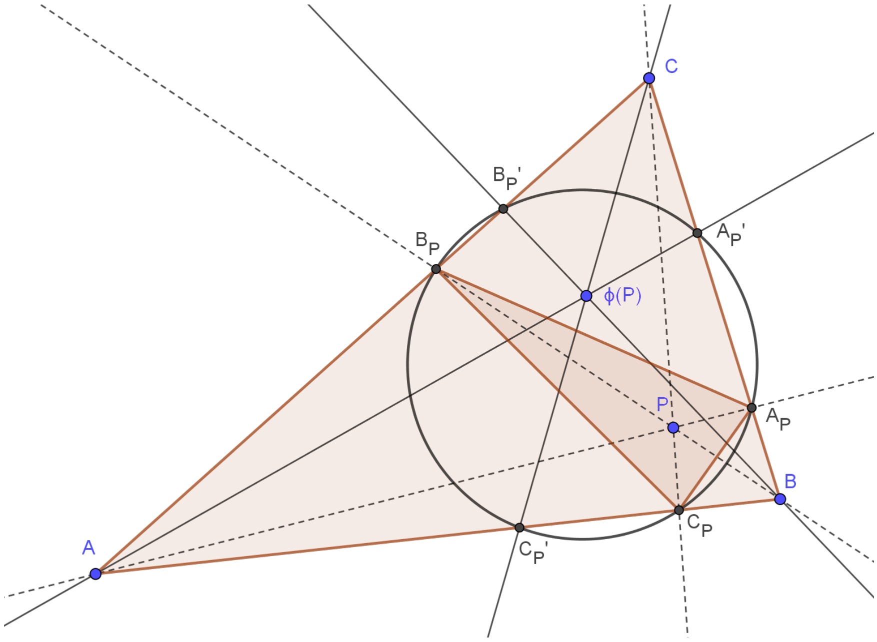
Dokaz. Poglejmo si, kakšne koordinate ima novo nastala točka $\phi(P)$. Naj bo $P = u : v : w$. Najprej bomo potrebovali enačbo očrtane krožnice Cevovega trikotnika. Pri tem upoštevamo, da na krožnici ležijo točke A_P, B_P in C_P, ki so sledi točke P, zato imajo koordinate:

$$A_P = 0 : v : w, \qquad B_P = u : 0 : w, \qquad C_P = u : v : 0.$$

Vsako točko posebej vstavimo v enačbo krožnice

$$a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta + (a\alpha + b\beta + c\gamma)(l\alpha + m\beta + n\gamma) = 0$$

in dobili bomo tri enačbe.



Slika 3.6: Krožna cevianska konjugacija

Gremo najprej na točko A_P, torej namesto α, β, γ zaporedoma vstavimo $0, v, w$:

$$avw + (bv + cw)(mv + nw) = 0,$$

$$mv + nw = -\frac{avw}{bv + cw}.$$

Enako naredimo z B_P in C_P, da dobimo:

$$lu + nw = -\frac{buw}{au + cw}$$

in

$$lu + mv = -\frac{cuv}{au + bv}.$$

Iz teh enačb lahko izrazimo l, m in n.

Najprej jih preoblikujemo do:

$$-lu = nw + \frac{buw}{au + cw}, \qquad -lu = mv + \frac{cuv}{au + bv}, \qquad -nw = mv + \frac{avw}{bv + cw}.$$

Pri prvi in drugi enačbi sta člena na levi enaka, zato desna člena enačimo:

$$mv + \frac{cuv}{au + bv} = nw + \frac{buw}{au + cw},$$

$$mv - nw = \frac{buw}{au + cw} - \frac{cuv}{au + bv}.$$

Uporabimo še tretjo enačbo:

$$mv + mv + \frac{avw}{bv + cw} = \frac{buw}{au + cw} - \frac{cuv}{au + bv}$$

in izrazimo m:

$$m = \frac{1}{2v}\Big(- \frac{avw}{bv + cw} + \frac{buw}{au + cw} - \frac{cuv}{au + bv}\Big).$$

Na podoben način dobimo

$$l = \frac{1}{2u}\Big(\frac{avw}{bv + cw} - \frac{buw}{au + cw} - \frac{cuv}{au + bv}\Big)$$

in

$$n = \frac{1}{2w}\Big(- \frac{avw}{bv + cw} - \frac{buw}{au + cw} + \frac{cuv}{au + bv}\Big).$$

Sedaj lahko zapišemo enačbo krožnice skozi Cevov trikotnik $A_PB_PC_P$. Potrebujemo še koordinate točk A'_P, B'_P in C'_P. Zapišimo prvo enačbo, ki smo jo dobili, ko smo upoštevali, da je na krožnici točka A_P:

$$avw + (bv + cw)(mv + nw) = 0.$$

Pomnožimo oklepaja in izpostavimo vw:

$$avw + mbv^2 + nbvw + mcvw + ncw^2 = 0,$$

$$mbv^2 + (a + nb + mc)vw + ncw^2 = 0.$$

Delimo z w^2:

$$mb\Big(\frac{v}{w}\Big)^2 + (a + nb + mc)\frac{v}{w} + nc = 0. \tag{3.1}$$

Če poznamo eno ničlo x_1 kvadratne enačbe $ax^2 + bx + c = 0$, lahko izračunamo drugo ničlo x_2 s pomočjo Vietove formule:

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Torej:

$$x_2 = \frac{c}{ax_1}.$$

Naša prva ničla je $\frac{v}{w}$, in opazimo, da števec in imenovalec predstavljata koordinati točke A_P. Trditev nam pove, da je naša druga ničla enaka $\frac{ncw}{mbv}$ in zato lahko sklepamo, da bosta to koordinati točke, ki tudi leži na tej krožnici in to je A'_P. To lahko dokažemo tako, da v enačbo 3.1 vstavimo to ničlo in jo preoblikujemo nazaj do enačbe krožnice. Torej, dobili smo:

$$A'_P = 0 : ncw : mbv \quad .$$

Delimo z $(wnmbcv)$:

$$A'_P = 0 : \frac{1}{mbv} : \frac{1}{ncw}.$$

Isti postopek uporabimo za izračun

$$B'_P = \frac{1}{lau} : 0 : \frac{1}{ncw}$$

in

$$C'_P = \frac{1}{lau} : \frac{1}{mbv} : 0.$$

To so sledi točke $\phi(P)$, zato je

$$\phi(P) = \frac{1}{lau} : \frac{1}{mbv} : \frac{1}{ncw}.$$

Vstavimo spremenljivke l,m in n, ki smo jih izračunali zgoraj:

$$\phi(P) = \frac{1}{au\left(\frac{1}{2u}\left(\frac{avw}{bv+cw} - \frac{buw}{au+cw} - \frac{cuv}{au+bv}\right)\right)} :$$

$$\frac{1}{bv\left(\frac{1}{2v}\left(-\frac{avw}{bv+cw} + \frac{buw}{au+cw} - \frac{cuv}{au+bv}\right)\right)} :$$

$$\frac{1}{cw\left(\frac{1}{2w}\left(-\frac{avw}{bv+cw} - \frac{buw}{au+cw} + \frac{cuv}{au+bv}\right)\right)}.$$

Pokrajšamo, delimo z 2 in dobili smo trilinearne koordinate krožne cevianske konjugiranke točke P.

□

Zgled. Včrtana krožnica v trikotniku ima samo eno dotikališče s vsako stranico. Pri zgledu izotomične konjugacije smo povedali, da so ta dotikališča sledi Gerggoneove točke, torej je to fiksna točka.

Krožnica devetih točk poteka čez razpolovišča stranic, ki so sledi težišča in skozi nožišča višin, torej sta težišče in višinska točka krožni cevianski konjugiranki.

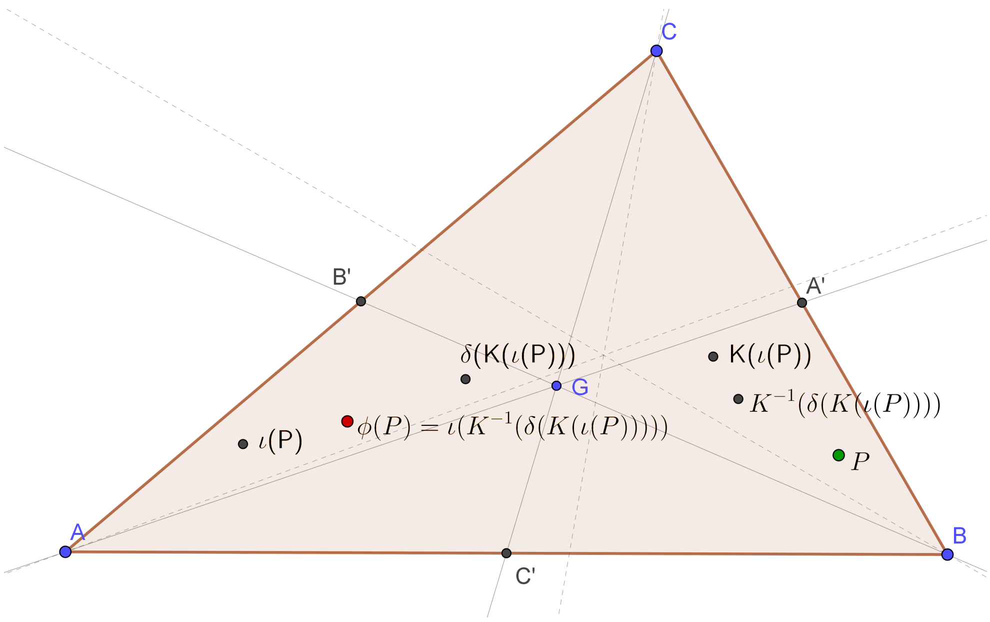
Poglavje 4

Grinbergov izrek

Definirali smo osnovne pojme in opisali znane konjugacije v trikotniku. Imamo pripravljeno vse, da lahko formuliramo znameniti Grinbergov izrek:

Izrek 4.1 *Krožna cevianska konjugacija se izraža kot kompozitum, v katerem nastopajo izotomična konjugacija ι, izogonalna konjugacija δ, komplement K in antikomplement K^{-1} na naslednji način:*

$$\phi = \iota \circ K^{-1} \circ \delta \circ K \circ \iota.$$



Slika 4.1: Konjugacije Grinbergovega izreka

V naslednjih dveh poglavjih bomo izrek dokazali na dva različna načina. Prvi način bo z uporabo trilinearnih koordinat, drugi pa bo sintetični.

4.1 Dokaz z uporabo trilinearnih koordinat

V prejšnjih poglavjih smo izračunali koordinate slik preslikav dane točke. Zapišimo jih še enkrat, če je $P = \alpha : \beta : \gamma$.

1. Izotomična konjugacija:
$$\iota(P) = \frac{1}{a^2\alpha} : \frac{1}{b^2\beta} : \frac{1}{c^2\gamma}.$$
2. Komplement in antikomplement:
$$K(P) = \frac{b\beta + c\gamma}{a} : \frac{a\alpha + c\gamma}{b} : \frac{a\alpha + b\beta}{c},$$
$$K^{-1}(P) = \frac{-a\alpha + b\beta + c\gamma}{a} : \frac{a\alpha - b\beta + c\gamma}{b} : \frac{a\alpha + b\beta - c\gamma}{c}.$$
3. Izogonalna konjugacija:
$$\delta(P) = \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta} : \frac{1}{\gamma}.$$

Izračunamo kompozitum, ki ga označimo z Gr, iz Grinbergovega izreka tako, da postopoma uporabljamo zgornje izračune:

$$\begin{aligned} Gr(P) &= (\iota \circ K^{-1} \circ \delta \circ K \circ \iota)(P) \\ &= \iota(K^{-1}(\delta(K(\iota(\alpha : \beta : \gamma))))). \end{aligned}$$

Najprej vstavimo izotomično konjugiranko:

$$Gr(P) = \iota(K^{-1}(\delta(K(\frac{1}{a^2\alpha} : \frac{1}{b^2\beta} : \frac{1}{c^2\gamma})))).$$

Na vrsti je komplement:

$$Gr(P) = \iota(K^{-1}(\delta\Big(\frac{b\frac{1}{b^2\beta} + c\frac{1}{c^2\gamma}}{a} : \frac{a\frac{1}{a^2\alpha} + c\frac{1}{c^2\gamma}}{b} : \frac{a\frac{1}{a^2\alpha} + b\frac{1}{b^2\beta}}{c}\Big))).$$

Preoblikujemo oziroma poenostavimo:

$$Gr(P) = \iota(K^{-1}(\delta\Big(\frac{\frac{1}{b\beta} + \frac{1}{c\gamma}}{a} : \frac{\frac{1}{a\alpha} + \frac{1}{c\gamma}}{b} : \frac{\frac{1}{a\alpha} + \frac{1}{b\beta}}{c}\Big)))$$

$$= \iota(K^{-1}(\delta\Big(\frac{\frac{b\beta+c\gamma}{b\beta c\gamma}}{a} : \frac{\frac{a\alpha+c\gamma}{a\alpha c\gamma}}{b} : \frac{\frac{a\alpha+b\beta}{a\alpha b\beta}}{c}\Big)))$$

$$= \iota(K^{-1}(\delta\Big(\frac{b\beta+c\gamma}{ab\beta c\gamma} : \frac{a\alpha+c\gamma}{ba\alpha c\gamma} : \frac{a\alpha+b\beta}{ca\alpha b\beta}\Big))).$$

Pomnožimo z abc in uporabimo izogonalno konjugiranko, kjer menjamo števec in imenovalec:

$$Gr(P) = \iota(K^{-1}\Big(\frac{\beta\gamma}{b\beta+c\gamma} : \frac{\alpha\gamma}{a\alpha+c\gamma} : \frac{\alpha\beta}{a\alpha+b\beta}\Big)).$$

Sedaj se spet malce zakomplicira, saj slika antikomplementa nima najlepših koordinat:

$$Gr(P) = \iota\Big(\frac{-a\frac{\beta\gamma}{b\beta+c\gamma} + b\frac{\alpha\gamma}{a\alpha+c\gamma} + c\frac{\alpha\beta}{a\alpha+b\beta}}{a} : \frac{a\frac{\beta\gamma}{b\beta+c\gamma} - b\frac{\alpha\gamma}{a\alpha+c\gamma} + c\frac{\alpha\beta}{a\alpha+b\beta}}{b}$$

$$: \frac{a\frac{\beta\gamma}{b\beta+c\gamma} + b\frac{\alpha\gamma}{a\alpha+c\gamma} - c\frac{\alpha\beta}{a\alpha+b\beta}}{c}\Big).$$

Ostane nam še samo izotomična konjugacija:

$$Gr(P) = \frac{1}{a^2\frac{-\frac{a\beta\gamma}{b\beta+c\gamma}+\frac{b\alpha\gamma}{a\alpha+c\gamma}+\frac{c\alpha\beta}{a\alpha+b\beta}}{a}} : \frac{1}{b^2\frac{\frac{a\beta\gamma}{b\beta+c\gamma}-\frac{b\alpha\gamma}{a\alpha+c\gamma}+\frac{c\alpha\beta}{a\alpha+b\beta}}{b}} : \frac{1}{c^2\frac{\frac{a\beta\gamma}{b\beta+c\gamma}+\frac{b\alpha\gamma}{a\alpha+c\gamma}-\frac{c\alpha\beta}{a\alpha+b\beta}}{c}}.$$

Poenostavimo, množimo z (-1) in vidimo, da so koordinate enake, kot jih ima krožna cevianska konjugiranka:

$$Gr(P) = \frac{1}{a(\frac{a\beta\gamma}{b\beta+c\gamma} - \frac{b\alpha\gamma}{a\alpha+c\gamma} - \frac{c\alpha\beta}{a\alpha+b\beta})} : \frac{1}{b(-\frac{a\beta\gamma}{b\beta+c\gamma} + \frac{b\alpha\gamma}{a\alpha+c\gamma} - \frac{c\alpha\beta}{a\alpha+b\beta})}$$

$$: \frac{1}{c(-\frac{a\beta\gamma}{b\beta+c\gamma} - \frac{b\alpha\gamma}{a\alpha+c\gamma} + \frac{c\alpha\beta}{a\alpha+b\beta})}$$

$$= \phi(\alpha : \beta : \gamma) = \phi(P).$$

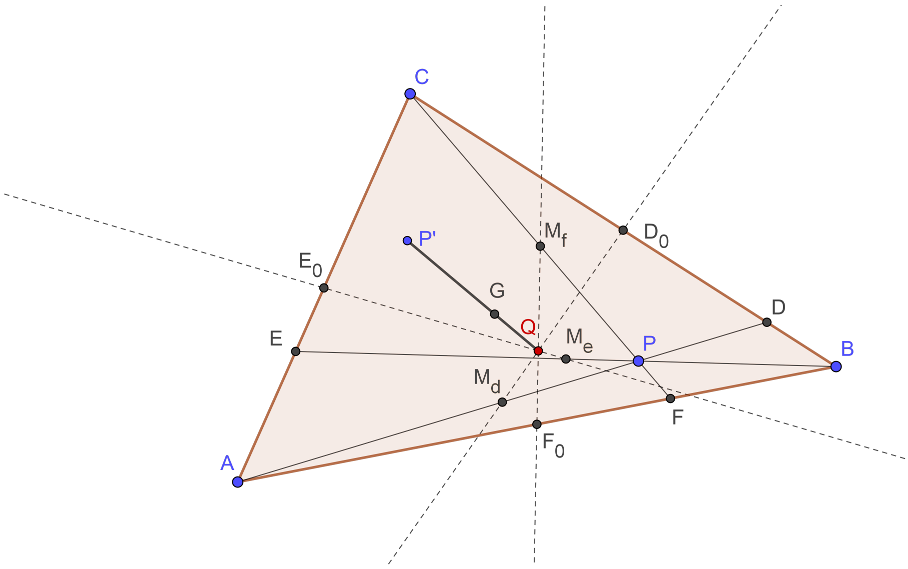
Grinbergov izrek smo dokazali s pomočjo trilinearnih koordinat.

4.2 Sintetični dokaz Minevicha in Mortona

Trilinearne koordinate nam marsikaj olajšajo in z njimi smo lahko Grinbergov izrek dokazali direktno. Dokazati pa se ga da tudi sintetično, brez trilinearnih koordinat. Navedli bomo par izrekov, kateri nam bodo prišli prav pri končnem dokazu. Pomagali si bomo s podobnimi trikotniki, vzporednimi premicami, komplementarnimi premicami, dvorazmerjem in harmonično konjugacijo.

Pri vseh dokazih bomo privzeli, da je točka P poljubna in ne leži na nosilkah stranic. Točke D_0, E_0 in F_0 so razpolovišča stranic $a = BC, b = AC, c = AB$ in velja, da je $D_0 = K(A), E_0 = K(B)$ in $F_0 = K(C)$. Naj bo P' izotomična konjugiranka točke P in $Q = K \circ \iota(P)$ točka, ki ji rečemo izotomični komplement točke P.

Izrek 4.2 *Naj bo ABC trikotnik in D, E in F sledi točke P. Naj bodo M_e, M_f, M_d razpolovišča daljic BE, CF, AD. Potem se D_0M_d, E_0M_e in F_0M_f sekajo v skupni točki $Q = K \circ \iota(P)$.*

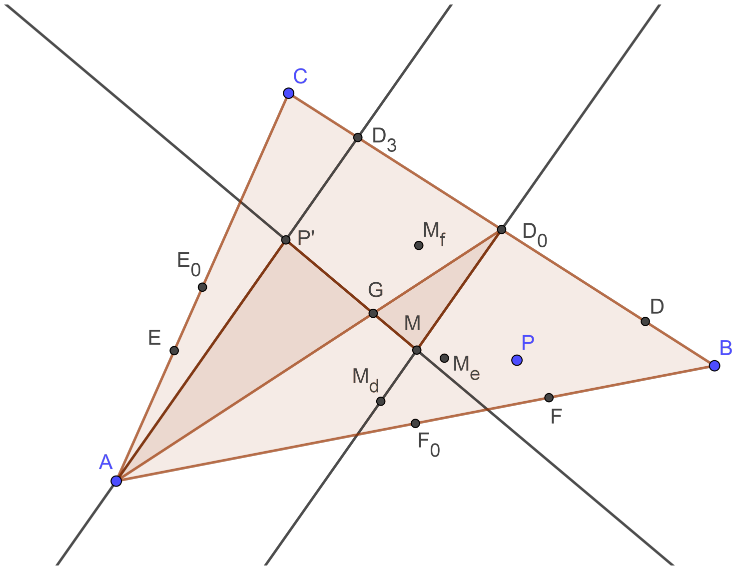


Slika 4.2: Premice D_0M_d, E_0M_e in F_0M_f se sekajo v Q

Dokaz. Naj bodo D_3, E_3, F_3 sledi točke P', ki so torej zrcalne slike točk D_0, E_0, F_0 pri zrcaljenju preko razpolovišč stranic.

Če je $P = G$, potem so D, E, F razpolovišča stranic in sledi, da so D_0M_d, E_0M_e in F_0M_f težiščnice, te pa se sekajo v G in to je izotomični komplement: $Q = K \circ \iota(G) = K(G) = G$.

Naj bo $P \neq G$. Pokazali bomo, da Q leži na vseh treh premicah D_0M_d, E_0M_e in F_0M_f. Imamo dve možnosti. Bodisi P ne leži na nobeni težiščnici ali leži samo na eni, saj če leži na dveh težiščnicah, potem je tudi na tretji.
Poglejmo najprej prvo možnost. Vidimo, da je D_0M_d srednjica trikotnika ADD_3 in to pomeni, da je vzporedna z AD_3. Narišemo premico $P'G$ in naj bo M presečišče te premice z D_0M_d. Kot vidimo na spodnji sliki, imamo dva podobna trikotnika AGP' in D_0GM. Ker je G težišče trikotnika vemo, da je $|AG| = 2|GD_0|$. Iz podobnosti sledi, da je $|P'G| = 2|GM|$, to pa pomeni, da je $K(P') = M = Q$. Torej Q leži na D_0M_d. Podobno naredimo za E_0M_e in F_0M_f.



Slika 4.3: Podobna trikotnika

Druga možnost je, da je P na eni težiščnici, recimo na BG. To pomeni, da je $E = E_0$ in opazi se, da na $BG = BP = BE$ ležijo tudi točke P', Q, M_e. Sledi, da je Q na premici E_0M_e in podobno, kot zgoraj dobimo, da Q leži na tudi D_0M_d in F_0M_f.

Lahko se zgodi, da se premici $P'G$ in D_0M_d ne sekata oziroma sta vzporedni. To pomeni, da M leži na premici v neskončnosti. Ker je $D_0M_d \| AP'$ sledi, da sta vzporedni tudi $P'G$ in AP'. Če bi bila P' običajna točka, bi to pomenilo, da premici sovpadata in da P' leži na težiščnici AG. Na njej bi ležala tudi točka $(P')' = P$ in to po naših predpostavkah ne drži. Torej točka P' leži na premici v neskončnosti, zato so premice AP', BP', CP' vzporedne. Vzporedne so pa tudi njim vzporedne premice D_0M_d, E_0M_e, F_0M_f in se tudi sekajo v točki v neskončnosti P'. Vemo, da je $Q = K(P')$ in da razteg ohranja točke v neskončnosti, zato je $Q = K(P') = P'$, torej je tudi v tem primeru Q enako presečišču tistih treh premic.

□

Za katere točke P se zgodi, da P' leži na premici v neskončnosti?
Poiščimo njene trilinearne koordinate. Naj bo $P = \alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0$. Njena izotomična konjugiranka je $P' = \frac{1}{a^2\alpha_0} : \frac{1}{b^2\beta_0} : \frac{1}{c^2\gamma_0}$. Te koordinate vstavimo v enačbo premice v neskončnosti:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0,$$

$$\frac{a}{a^2\alpha_0} + \frac{b}{b^2\beta_0} + \frac{c}{c^2\gamma_0} = 0.$$

Pokrajšamo in dobimo:

$$\frac{1}{a\alpha_0} + \frac{1}{b\beta_0} + \frac{1}{c\gamma_0} = 0.$$

To je enačba Steinerjeve trikotniku očrtane elipse, ki poteka skozi oglišča trikotnika, za središče pa ima težišče. Torej za vse točke, ki ležijo na tej elipsi velja, da je njihova izotomična konjugiranka P' točka v neskončnosti.

Posledica 4.3 *Iz izreka oziroma njegovega dokaza sledi, da je*

$$D_0M_d = D_0Q \| AP' \text{ in } K(D_3) = M_d,$$

oziroma

$$E_0M_e = E_0Q \| BP' \text{ in } K(E_3) = M_e,$$

$$F_0M_f = F_0Q \| CP' \text{ in } K(F_3) = M_f.$$

Dokaz. To, da je $D_0M_d = D_0Q \| AP'$ smo povedali v dokazu, tako da dokažimo samo $K(D_3) = M_d$. Poglejmo trikotnik ADD_3. Ker je D_0 razpolovišče stranice DD_3 in velja $|AG| = 2|GD_0|$ sledi, da je G težišče tudi v tem trikotniku. Tudi na težiščnici D_3M_d mora veljati to razmerje oziroma $|D_3G| = 2|GM_d|$, kar pomeni, da je $K(D_3) = M_d$. Ostalo dokažemo na enak način. □

Dvorazmerje je v matematiki število, ki opisuje medsebojno lego štirih kolinearnih točk. Poglejmo si njegovo definicijo.

Definicija 4.4 *Naj bodo A, B, C, D različne točke na neki premici in a, b, c, d premice skozi neko točko. Potem definiramo dvorazmerje kot:*

$$(A, B; C, D) = \frac{(AC)}{(BC)} / \frac{(AD)}{(BD)} = \frac{(AC)(BD)}{(AD)(BC)}$$

ali

$$(a, b; c, d) = \frac{\sin \angle ac}{\sin \angle bc} / \frac{\sin \angle ad}{\sin \angle bd} = \frac{(\sin \angle ac)(\sin \angle bd)}{(\sin \angle ad)(\sin \angle bc)}.$$

V definiciji predstavljena pojma povezuje naslednji izrek:

Izrek 4.5 *Naj bodo a, b, c, d premice skozi neko točko T in p premica, ki te premice seka zaporedoma v točkah A, B, C in D. Tedaj velja $(a, b; c, d) = (A, B; C, D)$.*

Dokaz. Naj bo v razdalja točke T od premice p. To pomeni, da je v skupna višina trikotnikov ADT, ACT, BCT in BDT. Izračunajmo dvorazmerje

$$(A, B; C, D) = \frac{(AC)(BD)}{(AD)(BC)}.$$

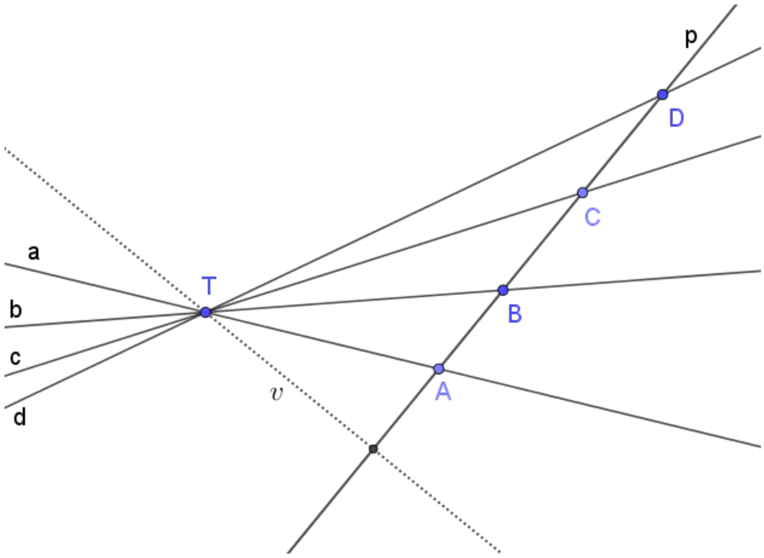
Če vsako od števil na desni pomnožimo z $\frac{v}{2}$, se kvocient ne spremeni, dobimo pa orientirane ploščine ustreznih trikotnikov:

$$\frac{(AC)\cdot\frac{v}{2}\cdot(BD)\cdot\frac{v}{2}}{(AD)\cdot\frac{v}{2}\cdot(BC)\cdot\frac{v}{2}}=\frac{(ACT)(BDT)}{(ADT)(BCT)}.$$

Te ploščine pa lahko zapišemo v obliki

$$(ACT)=\frac{1}{2}|TA|\cdot|TC|\sin\angle ACT=\frac{1}{2}|TA|\cdot|TC|\sin\angle ac,$$

podobno ostale tri. Ko te izraze vstavimo, se dolžine daljic krajšajo, ostanejo pa sinusi. □



Slika 4.4: Velja: $(a,b;c,d)=(A,B;C,D)$

Definicija 4.6 *Naj bodo točke A, B, C na premici l. Harmonična konjugiranka točke C glede na točki A in B je točka D na l tako, da je*

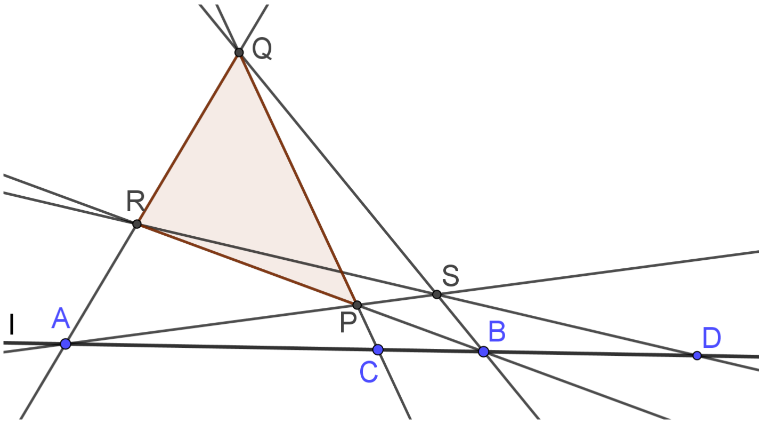
$$(A,B;C,D)=-1.$$

Postopek konstrukcije harmonične konjugiranke D:

1. Vzamemo poljubno točko Q, ki ne leži na l in narišemo premici AQ in BQ.

2. Na QC določimo poljubno točko P in narišemo premici AP in BP, ki sekata BQ in AQ v točkah S in R.

3. Premica SR seka l v točki D.



Slika 4.5: Harmonična konjugiranka točke C glede na točki A in B je točka D

Pokažimo, da je dobljena točka res prava. Poglejmo trikotnik ABQ. Točke R, S, D ležijo na nosilkah stranic AQ, BQ, AB in so kolinearne. Menelajev izrek nam pove, da je to natanko takrat, ko je:

$$\frac{(AD)}{(BD)}\frac{(BS)}{(SQ)}\frac{(QR)}{(RA)} = -1.$$

Trikotnik SRC je Cevov trikotnik trikotnika ABQ glede na točko P. Torej po Cevovem izreku velja:

$$\frac{(AC)}{(BC)}\frac{(BS)}{(SQ)}\frac{(QR)}{(RA)} = 1.$$

Zgornja izraza delimo in dobimo

$$\frac{(AC)}{(BC)}\frac{(BD)}{(AD)} = -1.$$

Če pogledamo definicijo vidimo, da je D res harmonična konjugiranka točke C glede na A in B.

Definicija 4.7 *Trikotnika ABC in $A'B'C'$ sta perspektivna glede na točko S, če se premice AA', BB', CC' sekajo v skupni točki S.*

Definicija 4.8 *Trikotnika ABC in $A'B'C'$ sta perspektivna glede na premico l, če presečišča $AB \cap A'B', AC \cap A'C', BC \cap B'C'$ ležijo na isti premici l, ki se imenuje perspektivna premica.*

Pojma, ki smo ju pravkar definirali, povezuje znameniti Desarguesov izrek:

Izrek 4.9 *Naj bosta ABC in $A'B'C'$ trikotnika. Potem se AA', BB', CC' sekajo v skupni točki natanko tedaj, ko so spodnje točke kolinearne:*

$$L \in BC \cap B'C', \qquad M \in AC \cap A'C', \qquad N \in AB \cap A'B'.$$

Z drugimi besedami se glasi, da sta trikotnika perspektivna glede na točko natanko tedaj, ko sta perspektivna glede na premico.

Posledica 4.10 *Naj bo ABC trikotnik in P točka, ki ne leži na nosilkah stranic trikotnika. Trikotnika ABC in $A_PB_PC_P$ sta perspektivna glede na premico, ki jo imenujemo trilinearna polara točke P.*

Dokaz. Ker je $A_PB_PC_P$ Cevov trikotnik trikotnika ABC, sta trikotnika perspektivna glede na točko P. Desarguesov izrek nam pove, da sta potem perspektivna tudi glede na premico. □

Zelo uporaben je tudi Paposov izrek, ki sledi. Dokazali smo ga pri predmetu Ravninska in prostorska geometrija.

Izrek 4.11 *Naj bodo A, B, C kolinaerne in A', B', C' tudi. Potem so spodnja presečišča kolinearna:*

$$L \in BC' \cap B'C, \qquad M \in AC' \cap A'C, \qquad N \in AB' \cap A'B.$$

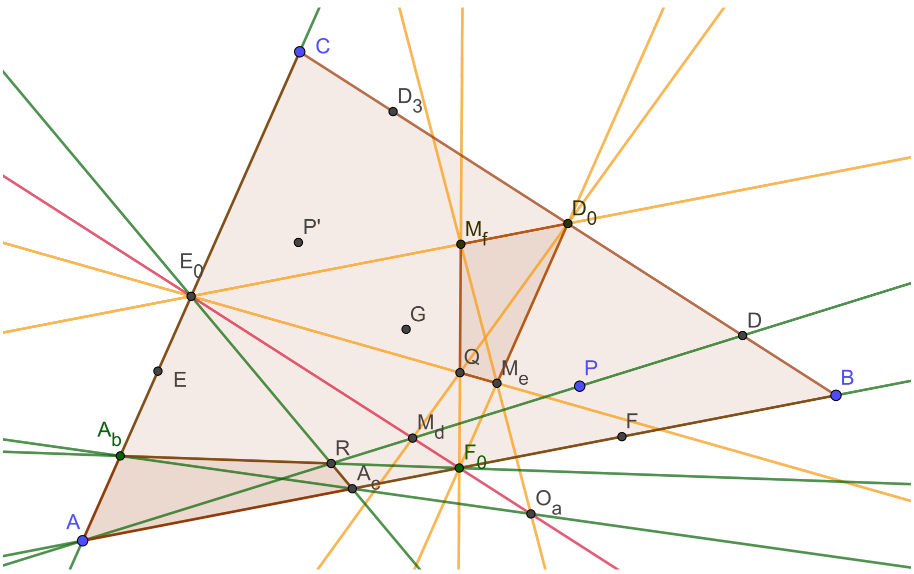
Naslednji izrek in opomba sta ključnega pomena za dokaz Grinbergovega izreka.

Izrek 4.12 *Naj bosta E in F točki na stranicah AC in AB v trikotniku ABC. Naj bosta A_b in A_c razpolovišči daljic AE in AF, točki M_e in M_f pa razpolovišči daljic BE in CF. Potem sta trikotnika $A_bE_0M_e$ in $A_cF_0M_f$ perspektivna glede na neko točko O_a.*

Dokaz. Dokazati želimo, da se premice M_fM_e, E_0F_0 in A_bA_c sekajo v skupni točki. V izreku imamo poljubni točki E in F. Naj bosta to sledi točke P. Prva možnost je, da je $P = G$. Potem je $E = E_0$ in $F = F_0$ in sledi, da so premice M_fM_e, E_0F_0 in A_bA_c vzporedne, torej izrek velja, saj se sekajo v skupni točki v neskončnosti.
Naj bo $P \neq G$. Poglejmo štirikotnik $M_fQM_eD_0$. Najprej poiščimo presečišča nosilk nasprotnih stranic. Presečišče M_fD_0 in QM_e je točka E_0. Pokažimo, da je na obeh premicah. Na prvi je, saj so točke E_0, M_f, D_0 kolinearne, ker je D_0E_0 srednjica trikotnika ABC in M_f leži na njej. Izrek 4.2 nam pove, da E_0 leži tudi na QM_e. Podobno vidimo, da je

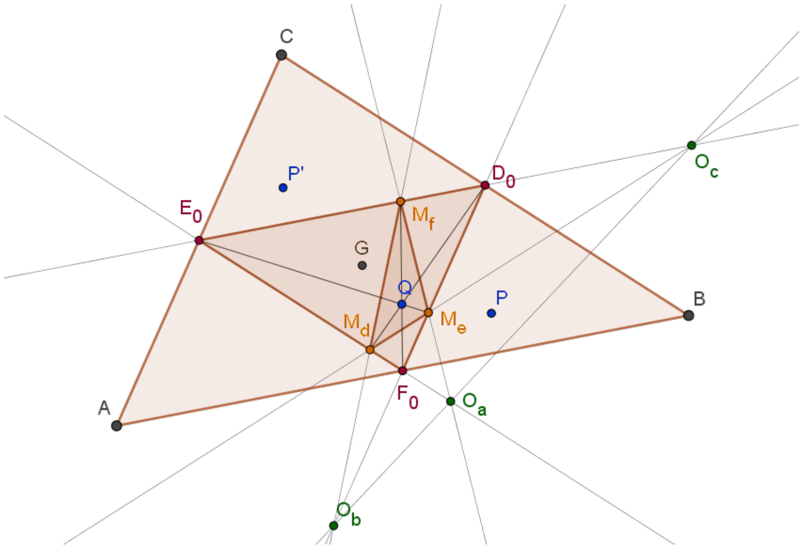
$F_0 \in M_eD_0 \cap QM_f$ in $M_d \in E_0F_0 \cap D_0Q$. Točke E_0, F_0 in M_d ležijo na premici v enakem razmerju kot točke v postopku konstrukcije harmonične konjugiranke. Torej tam, kjer M_fM_e seka to premico, dobimo harmonično konjugiranko točke M_d glede na točki E_0 in F_0. Označimo to točko z O_a.

Pokazati še moramo, da O_a leži tudi na A_bA_c in zato poglejmo štirikotnik AA_cRA_b, kjer je $R \in A_bF_0 \cap A_cE_0$. V trikotniku AFC je A_cE_0 srednjica, zato seka AP na polovici. Podobno A_bF_0 seka AP na polovici in iz tega sledi, da so AP, A_bF_0 in A_cE_0 konkruentne v točki R, ki razpolavlja AP. Torej je $AR \cap F_0E_0 = AP \cap F_0E_0 = AD \cap F_0E_0$ in to presečišče je točka M_d. Vidimo, da je $E_0 \in A_bA \cap RA_c$ in $F_0 \in A_cA \cap RA_b$. Opazimo, da imamo enako lego točk kot pri prejšnjem štirikotniku, zato je $A_bA_c \cap E_0F_0$ harmonična konjugiranka točke M_d glede na E_0 in F_0 in prej smo to točko označili z O_a, torej je $O_a \in A_bA_c \cap E_0F_0$. Če združimo zgornji in spodnji rezultat dobimo, da je $O_a \in A_bA_c \cap E_0F_0 \cap M_fM_e$ in dokazali smo, da sta trikotnika $A_bE_0M_e$ in $A_cF_0M_f$ perspektivna glede na točko O_a. □



Slika 4.6: O_a je harmonična konjugiranka točke M_d glede na E_0 in F_0

Opomba 4.13 *Podobno lahko dobimo točki O_b in O_c. Poglejmo si trikotnik $D_0E_0F_0$. Njegov Cevov trikotnik glede na točko Q je $M_dM_eM_f$, torej sta ta dva trikotnika perspektivna glede na točko Q. Desarguesov izrek nam pove, da sta perspektivna tudi glede na premico. Iz tega sledi, da so točke O_a, O_b, O_c kolinearne, premica skozi njih pa je trilinearna polara točke Q glede na trikotnik $D_0E_0F_0$.*



Slika 4.7: Premica skozi O_a, O_b, O_c je trilinearna polara točke Q glede na $\triangle D_0E_0F_0$

Velja:

$$O_a \in K(E_3F_3 \cap BC), \qquad O_b \in K(D_3F_3 \cap AC), \qquad O_c \in K(E_3D_3 \cap AB)$$

saj je

$$O_a \in M_eM_f \cap E_0F_0 = K(E_3)K(F_3) \cap K(B)K(C) = K(E_3F_3) \cap K(BC).$$

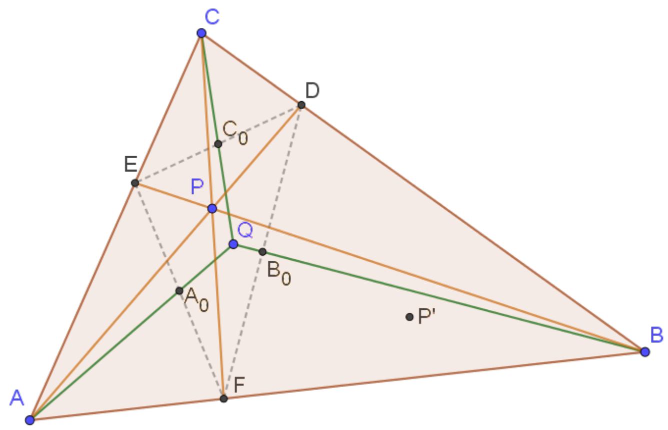
Podobno lahko naredimo za O_b in O_c.

Izrek 4.14 *Točke D, E, F so sledi točke P in naj bodo A_0, B_0, C_0 razpolovišča daljic EF, DF, DE. Potem se premice AA_0, BB_0 in CC_0 sekajo v točki $Q = K \circ \iota(P)$.*

Dokaz.

Dokazali bomo, da so točke A, A_0 in Q kolinearne. Od prej vemo, da sta trikotnika $A_bE_0M_e$ in $A_cF_0M_f$ perspektivna glede na točko O_a. Desarguesov izrek nam pove, da je to natanko tedaj, ko presečišča $A_bE_0 \cap A_cF_0$, $A_bM_e \cap A_cM_f$ in $E_0M_e \cap F_0M_f$ ležijo na isti premici. Očitno je, da je $A \in A_bE_0 \cap A_cF_0$ in iz izreka 4.2 vemo, da je $Q \in E_0M_e \cap F_0M_f$. Pokazati še moramo, da je tretje presečišče enako A_0. Poglejmo trikotnik AFC. Točka A_0 je na sredini FE, zato leži na srednjici A_cM_f in podobno velja, da A_0 leži tudi na srednjici A_bM_e trikotnika AEB. Torej $A_0 \in A_bM_e \cap A_cM_f$. Pokazali smo, da točke A, A_0 in Q ležijo na isti premici in podobno lahko pokažemo, da so kolinearna tudi B, B_0, Q in C, C_0, Q. Iz tega sledi, da je $Q \in AA_0 \cap BB_0 \cap CC_0$.

$\square$



Slika 4.8: Premice AA_0, BB_0 in CC_0 se sekajo v izotomičnem komplementu točke P

Definicija 4.15 *Konfiguracijo, ki je določena s štirimi komplanarnimi premicami, od katerih nobene tri niso iz istega šopa, in s šestimi točkami, ki jih te premice določajo, imenujemo popolni štiristranik. Omenjene premice so stranice, točke pa oglišča tega štiristranika.*

Izrek 4.16 *Naj bo $Q' = K(P)$ izotomični komplement točke P', razpolovišče EF naj bo A_0, točka A_0' razpolovišče E_3F_3, točka N_1 pa razpolovišče daljic E_0F_0 in AD_0. Popolni štiristranik $\Lambda = (AP)(AQ)(D_0Q)(D_0A_0)$ se čez točko N_1 prezrcali v popolni štiristranik $\Lambda' = (D_OQ')(D_0A_0')(AP')(AQ')$.*

Dokaz. Da bomo dokazali izrek, bomo pokazali, da se oglišča enega štiristranika čez točko N_1 preslikajo v oglišča drugega oziroma, da N_1 razpolavlja dele med pari oglišč enega in drugega štiristranika.

Naj bo R razpolovišče daljice AP in R' razpolovišče daljice AP'. Gremo najprej na prvi štiristranik in poglejmo, kaj sploh so oglišča. Očitno je, da točke A, D_0 in Q so. Prejšnji izrek nam pove, da A_0 leži na AQ, zato je $A_0 \in AQ \cap A_0D_0$, torej je oglišče. Tudi M_d je oglišče, saj leži na D_0Q (izrek 4.2) in na $AD = AP$. Ostane nam samo še poiskati oglišče, ki ga določata premici AP in D_0A_0. Dokazali bomo, da je to točka R, za katero vemo, da leži na AP. Pokažimo, da leži tudi na D_0A_0 oziroma, da so točke R, D_0 in A_0 kolinearne. Naj bo M razpolovišče PQ'. Ker je $K(P) = Q'$ sledi, da je $|PG| = 2|GQ'|$ in če upoštevamo, da je M na sredini daljice PQ' vidimo, da velja $|Q'G| = 2|GM'|$, to pa pomeni, da je $K(Q') = M$. Poleg tega vemo tudi, da je $K(A) = D_0$ in ker razteg premico preslika v vzporedno premico, je $AQ' \| D_0M$. V trikotniku $AQ'P$ je srednjica RM vzporedna AQ'. Vidimo torej, da sta premici RM in D_0M vzporedni in obe potekata skozi točko M, torej sovpadata. Zato velja:

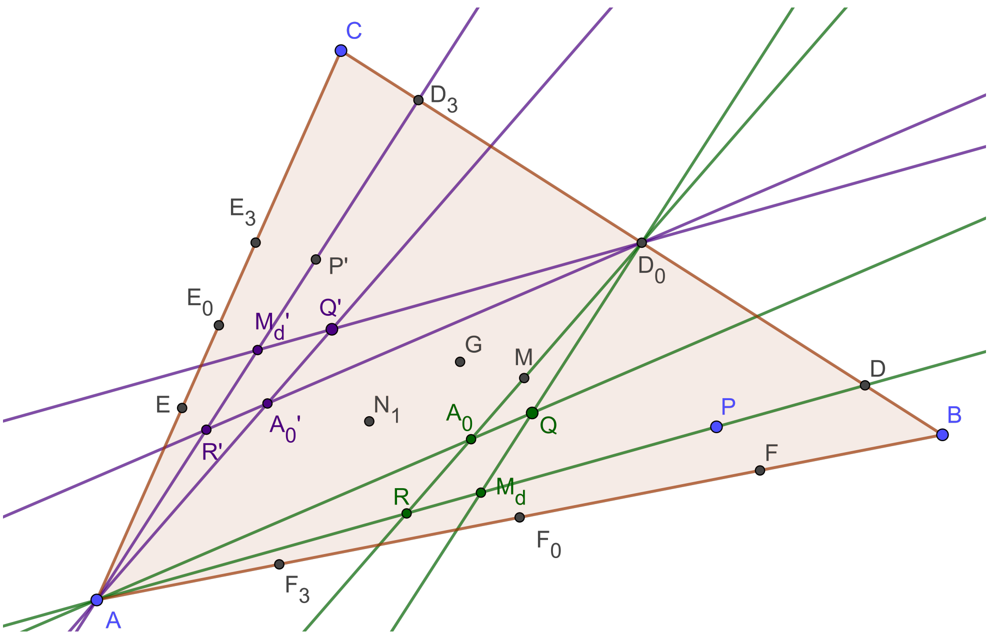
$$D_0M = RM = D_0R.$$

Pokažimo še, da na tej premici leži tudi A_0. Recimo, da je $T \in D_0R \cap A_0'N_1$. Trikotnika N_1TD_0 in $N_1A_0'A$ sta skladna, ker imata skladno stranico ($|AN_1| = |D_0N_1|$) in kota ob njej ($\angle TN_1D_0 \cong \angle A_0'N_1A$ in $\angle TD_0N_1 \cong \angle A_0'AN_1$). To pomeni, da sta enaki tudi stranici TN_1 in $A_0'N_1$, zato je N_1 razpolovišče daljice TA_0'. Poglejmo štirikotnik E_3F_3FE. Središča stranic so A_0', E_0, A_0, F_0, ki so oglišča Varignovega paralelograma. Diagonali se razpolavljata in vemo, da je N_1 razpolovišče daljice E_0F_0, torej N_1 razpolavlja tudi drugo diagonalo A_0A_0'. Ker je N_1 razpolovišče daljic TA_0' in A_0A_0' sledi, da je $T = A_0$. Pokazali smo, da A_0 leži na D_0R, zato so A_0, D_0, R kolinearna. Oglišča štiristranika Λ so torej:

$$\{A, D_0, A_0, Q, R, M_d\}.$$

Zaradi simetrije s podobnim postopkom pridemo do oglišč štiristranika Λ':

$$\{D_0, A, A_0', R', Q', M_d'\}.$$



Slika 4.9: Zrcalna popolna štiristranika

Sedaj, ko imamo množici oglišč, preverimo, da N_1 razpolavlja daljice s krajišči v istoležečih točkah. Vemo, da to velja za daljico AD_0. Med postopkom iskanja oglišč smo dokazali, da N_1 razpolavlja tudi A_0A_0'.
Poglejmo šestkotnik $AQ'M_dD_0RM_d'$. Izmenična oglišča so kolinearna. Pappusov izrek nam pove, da so kolinearna tudi navzkrižna presečišča:

$$AQ' \cap D_0R, \qquad AM_d' \cap D_0M_d, \qquad RM_d' \cap Q'M_d.$$

Točka $AQ' \cap D_0R$ je v neskončnosti, saj je $AQ' \| D_0M = D_0R$. Tudi $AM'_d \cap D_0M_d$ je točka v neskončnosti, ker je D_0M_d srednjica v trikotniku ADD_3 in to pomeni, da je $D_0M_d \| AD_3 = AM'_d$. Da bodo presečišča kolinearna, mora biti tudi $RM'_d \cap Q'M_d$ točka v neskončnosti. Iz tega sledi, da sta RM'_d in $Q'M_d$ vzporedni. V trikotniku AD_3D je M'_dD_0 srednjica, zato je vzporedna z $AD = M_dR$. Sledi, da je $M'_dD_0 = M'_dQ' \| RM_d$.
Imamo po dva para vzporednic, kar pomeni, da je $RM'_dQ'M_d$ paralelogram. Diagonali RQ' in $M_dM'_d$ se razpolavljata. Dokažimo, da je to razpolovišče točka N_1. Posledica 4.3 nam pove, da je $M_dM'_d = K(D_3)K(D) = K(D_3D)$. Razpolovišče daljice DD_3 je D_0, zato je razpolovišče daljice $M_dM'_d$ enako $K(D_0)$. Iz $K(A) = D_0$ sledi $|AG| = 2|GD_0|$ in ker je N_1 na sredini daljice AD_0 dobimo $|D_0G| = 2|GN_1|$, kar pomeni $K(D_0) = N_1$. Pokazali smo, da je razpolovišče od $M_dM'_d$ enako N_1 in to je tudi razpolovišče od RQ'. Podobno tudi dokažemo, da je N_1 razpolovišče od $R'Q$. Pokazali smo, da N_1 razpolavlja dele med pari oglišč enega in drugega štirikotnika in s tem tudi vzporednost ustreznih stranic, torej smo dokazali izrek.

Poglejmo še samo, kaj se zgodi, če je $P' = Q$ točka v neskončnosti. Premici AA_0 in D_0Q sta vzporedni, saj je njuno presečišče Q točka v neskončnosti. Trikotnika N_1A_0A in $N_1A'_0D_0$ sta skladna, zaradi istih razlogov kot prej trikotnika $N_1A_0D_0$ in $N_1A'_0A$, zato imata skladna kota $\angle N_1A'_0D_0 = \angle N_1A_0A$, to pa pomeni, da sta A'_0D_0 inA_0A vzporedni. Premica A_0A je torej vzporedna z D_0Q in z $D_0A'_0$, zato je $A'_0D_0 = D_0Q = A'_0Q$. Sledi, da je oglišče štiristranika Λ' enako: $R' = AP' \cap A'_0D_0 = AQ \cap A_0Q = Q$, ki je torej fiksna točka zrcaljenja. Druga oglišča ostanejo enaka, zato dokaz velja tudi za neskončno točko P'.

□

Iz pravkar zaključenega dokaza izhaja naslednji rezultat:

Posledica 4.17 *Štirikotik RM_dQA_0 se čez točko N_1 prezrcali v štirikotnik $QM'_dR'A'_0$.*

Posledica 4.18 *Točke D_0, R, A_0 in $M = K(Q')$ so kolinearne in M je razpolovišče daljice D_0R.*

Dokaz. Kolinearnost točk smo dokazali že v dokazu izreka, tako da moramo dokazati samo, da je M razpolovišče daljice D_0R.
Premico AP z raztegom K preslikamo v D_0Q' in to pomeni, da sta premici vzporedni, torej je tudi $AP = AR \| D_0Q'$. Podobno vidimo, da je $AQ' \| D_0M = D_0R$. Imamo dva para vzporednih stranic, zato je ARD_0Q' paralelogram in velja: $|AR| = |Q'D_0|$ in $|AQ'| = |RD_0|$. Iz tega, da je $K(AQ') = D_0M$ sledi, da je dolžina daljice D_0M polovica dolžine daljice AQ', ki je enaka dolžini D_0R, torej je M razpolovišče D_0R. □

Posledica 4.19 *Če je P' točka na premici v neskončnosti, potem so Q, M_d, D_0, A_0' in $K(A_0)$ kolinearne.*

Dokaz. Iz dokaza izreka vemo, da so točke R', A_0', D_0 kolinearne (recimo, da ležijo na premici l), in da je $R' = Q$, če je P' neskončna. Vemo tudi, da M_d leži na $QD_0 = l$, zato moramo pokazati samo, da na isti premici leži tudi $K(A_0)$. Premici AA_0 in D_0M_d sta vzporedni, ker je njuno presečišče točka Q, ki je točka v neskončnosti. Zapišemo lahko, da je $K(AA_0) = D_0K(A_0)$ in iz tega sledi $AA_0 \| D_0K(A_0)$. Dobili smo, da je AA_0 vzporedna s premicama, ki gresta skozi točko D_0, torej je $D_0K(A_0) = D_0M_d = l$ in posledica je dokazana. □

Analogni rezultat, kot smo ga v izreku 4.16 dokazali za štiristranik $(AP)(AQ)(D_0Q)(D_0A_0)$, lahko na isti način dokažemo tudi za štiristranika $(BP)(BQ)(E_0Q)(E_0B_0)$ in $(CP)(CQ)(F_0Q)(F_0C_0)$, pri čemer gre tokrat za zrcaljenji preko točk N_2 in N_3, ki sta razpolovišči težiščnic t_b in t_c.

Zdaj pa lahko končno pristopimo k dokazu Grinbergovega izreka.

Izrek 4.20 *Naj bosta P_1 in P_2 ciklocevianski konjugiranki glede na trikotnik ABC. Potem sta njuna izotomična komplementa Q_1 in Q_2 izogonalni konjugiranki glede na trikotnik ABC. To je ekvivalentno:*

$$P_2 = \phi(P_1) = \iota \circ K^{-1} \circ \delta \circ K \circ \iota(P_1).$$

Dokaz. Poglejmo najprej, zakaj velja ekvivalenca. Vemo, da je $Q_1 = K \circ \iota(P_1)$ in $Q_2 = K \circ \iota(P_2)$. Videti želimo, da je dejstvo $Q_2 = \delta(Q_1)$ ekvivalentno $P_2 = \phi(P_1)$. Prva enakost v bistvu pomeni:

$$K \circ \iota(P_2) = \delta(K \circ \iota(P_1)),$$

$$K \circ \iota(P_2) = \delta \circ K \circ \iota(P_1).$$

Najprej celo enačbo komponiramo s K^{-1} nato pa z ι in dobimo:

$$\iota \circ K^{-1} \circ K \circ \iota(P_2) = \iota \circ K^{-1} \circ \delta \circ K \circ \iota(P_1),$$

$$P_2 = \iota \circ K^{-1} \circ \delta \circ K \circ \iota(P_1) = \phi(P1).$$

Če postopek preberemo v obratni smeri, dobimo implikacijo v nasprotno smer.

Torej pokazali bomo, da je $\delta(Q_1) = Q_2$ in s tem dokazali Grinbergov izrek. Pomagali si bomo s dvorazmerji. Naj bodo D, E, F sledi točke P_1 in D_3, E_3, F_3 sledi točke P_2 na stranicah BC, AB, AC. Naj bo V presečišče simetrale kota $\angle FAE$ s stranico FE v trikotniku FEA.

Poglejmo, kakšno je dvorazmerje premic AB, AC, AQ_1 in AV:

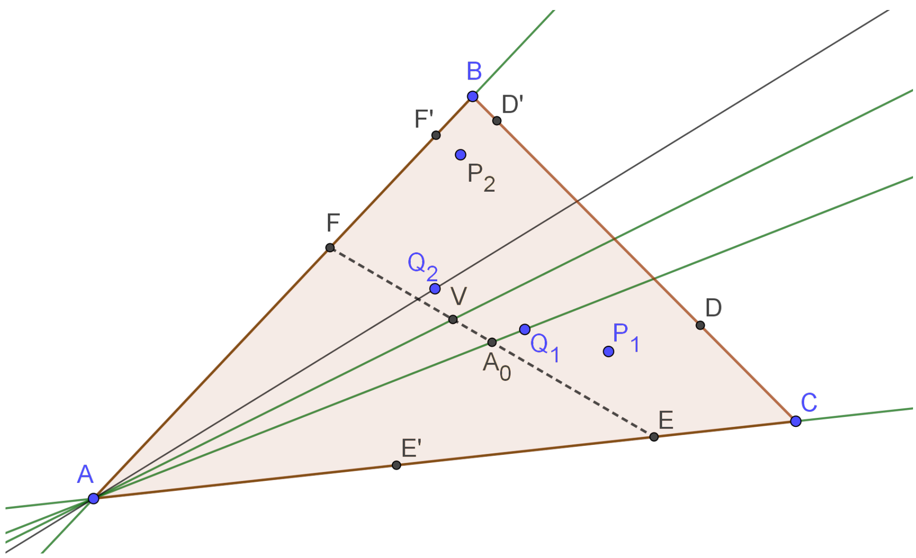
$$(AB, AC, AQ_1, AV) = \frac{\sin \angle BAQ_1}{\sin \angle CAQ_1} / \frac{\sin \angle BAV}{\sin \angle CAV}.$$

Ker je točka V na simetrali kota $\angle BAC$, velja: $\angle BAV = \angle VAC$. Torej se delitelj izniči:

$$(AB, AC, AQ_1, AV) = \frac{\sin \angle BAQ_1}{\sin \angle CAQ_1}.$$

Naj bo $Q_1^\delta = \delta(Q_1)$. Poglejmo si še dvorazmerje premic AB, AC, AQ_1^δ in AV . Izogonalna konjugiranka je definirana z zrcaljenji preko simetral kotov, zato velja: $\angle BAQ_1^\delta = \angle CAQ_1$ in $\angle BAQ_1 = \angle CAQ_1^\delta$. Dobimo:

$$(AB, AC, AQ_1^\delta, AV) = \frac{\sin \angle BAQ_1^\delta}{\sin \angle CAQ_1^\delta} = \frac{\sin \angle CAQ_1}{\sin \angle BAQ_1} = \frac{1}{(AB, AC, AQ_1, AV)}.$$



Slika 4.10: Dokaz Grinbergovega izreka

Dvorazmerje lahko izračunamo še na drug način. Sedaj bomo namesto premic in kotov med njimi upoštevali točke, ki so na teh premicah. Na AB leži F, na AC leži E, na AQ_1 pa leži A_0, kar nam pove izrek 4.14. Te točke skupaj s točko V so kolinearne, saj je V presečišče z EF, A_0 pa je razpolovišče daljice EF. V izreku 4.5 smo povedali, da je v takem primeru dvorazmerje premic enako dvorazmerju točk na premicah:

$$(AB, AC, AQ_1, AV) = (F, E, A_0, V) = \frac{|FA_0|}{|EA_0|} / \frac{|FV|}{|EV|} = \frac{|EV|}{|FV|}.$$

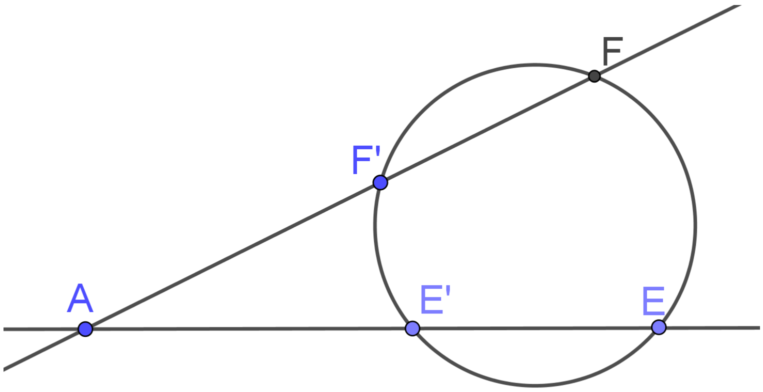
Zadnjo enakost dobimo, ker je $|FA_0| = |EA_0|$. V trikotniku AFE nam izrek o simetrali pove, da je $\frac{|VE|}{|VF|} = \frac{|AE|}{|AF|}$, zato je:

$$(AB, AC, AQ_1, AV) = \frac{|EV|}{|FV|} = \frac{|AE|}{|AF|}.$$

Na podoben način dobimo:

$$(AB, AC, AQ_2, AV) = \frac{|AE_3|}{|AF_3|}$$

Vemo, da točke D, E, F, D_3, E_3, F_3 ležijo na isti krožnici, saj so sledi neke točke in njene ciklocevianske konjugiranke. Izrek o potenci točke glede na krožnico nam pove, da če premica skozi dano točko seka krožnico, je produkt razdalj od točke do presečišč s krožnico konstanten.



Slika 4.11: Potenca točke A glede na krožnico

V našem primeru imamo:

$$|AF'| \cdot |AF| = |AE_3| \cdot |AE|,$$

$$\frac{|AE_3|}{|AF_3|} = \frac{|AF|}{|AE|}.$$

Če to uporabimo v našem dvorazmerju, dobimo:

$$(AB, AC, AQ_2, AV) = \frac{|AE_3|}{|AF_3|} = \frac{|AF|}{|AE|} = \frac{1}{(AB, AC, AQ_1, AV)} = (AB, AC, AQ_1^\delta, AV).$$

Enakost dvorazmerij pomeni enakost dveh kotov. To pomeni, da točki Q_2 in Q_1^δ ležita na dveh poltrakih, ki sta zrcalna eden na drugega pri zrcaljenju preko simetrale kota alfa. Podobno velja za kota beta in gama, zato velja, da je $Q_2 = Q_1^\delta = \delta(Q_1)$ in Grinbergov izrek je dokazan tudi sintetično.

$\square$

Zaključek

Uvod, ki govori o Dariju Grinbergu, sem napisala s pomočjo literature na spletni strani [1]. V prvem poglavju, kjer sem opisala trilinearne koordinate, sem si večino pomagala z zapiski iz predavanj predmeta Analitični pristopi pri geometriji. Ti so mi bili v pomoč tudi pri opisu očrtane krožnice in pri predstavitvi izogonalne in izotomične konjgacije. V drugem poglavju, pri iskanju formule splošne krožnice in krožnice devetih točk, sem si pomagala s člankom [2]. Ta članek sem uporabila tudi pri predstavitvi krožne cevianske konjugacije. Za opis krožnice z danim središčem in polmerom sem uporabila knjigo [3], ki je na internetu. Do trilinearnih koordinat komplementa in antikomplementa sem prišla sama. Grinbergov dokaz s pomočjo trilinearnih koordinat sem izpeljala iz že predhodnih izračunov trilinearnih koordinat posameznih preslikav, pri drugem, sintetičnem delu pa sem za pomoč uporabila članek [4]. Zelo uporabni internetni strani pri kakšnih vmesnih definicijah in izrekih sta bili Wikipedija [5]in WolframMathworld [6]. Slike sem risala s programom GeoGebra.

Literatura

[1] Darij Grinberg, osebna spletna stran, povzeto 10.3.2020:
https://www.cip.ifi.lmu.de/ grinberg/about.html
https://www.cip.ifi.lmu.de/ grinberg/about/cv.pdf

[2] P. Yiu, *Introduction to the Geometry of the Triangle*, Department of Mathematics Florida Atlantic University (Summer 2001) str. 68 - 73.

[3] W.A. Whitworth, *Trilinear coordinates and other methods of modern analytical geometry of two dimensions; an elementary treatise*, Cambridge, Deighton, 1866.

[4] I. Minevich, P. Morton, *Synthetic Foundations of Cevian Geometry I, fixed points of affine maps*, Journal of Geometry, Vol 108 (April 2017), št. 1, str. 45 – 60.

[5] Wikipedija, spletna enciklopedija, povzeto 10.3.2020. Uporabljene spletne strani:
https://en.wikipedia.org/wiki/Trilinear_coordinates.
https://www.wikipedia.org/. https://sl.wikipedia.org/wiki/Dvorazmerje

[6] Wolfram, spletna matematična enciklopedija, povzeto 10.3.2020. Uporabljene spletne strani:
https://mathworld.wolfram.com/CompleteQuadrilateral.html,
https://mathworld.wolfram.com/CyclocevianConjugate.html,
https://mathworld.wolfram.com/Complement.html,
https://mathworld.wolfram.com/CevianTriangle.html,
https://mathworld.wolfram.com/SteinerCircumellipse.html,
https://mathworld.wolfram.com/PerspectiveTriangles.html,
https://mathworld.wolfram.com/TrilinearPolar.html.