UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Oddelek za matematiko in računalništvo

MAGISTRSKO DELO

Sanja Levart

Maribor, 2020

UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Oddelek za matematiko in računalništvo

Magistrsko delo

MATRIČNI KOMUTATORJI

na študijskem programu 2. stopnje
Izobraževalna matematika - dvopredmetna

Mentorica: Kandidatka:

doc. dr. Mateja Grašič Sanja Levart

Maribor, 2020

ZAHVALA

Iskreno se zahvaljujem mentorici doc. dr. Mateji Grašič za vso strokovno pomoč, odzivnost, usmerjanje in potrpežljivost pri izdelavi magistrskega dela.

Posebna zahvala gre partnerju Denisu, hčeri Iris, staršem ter prijateljem, ki so me podpirali in imeli vero vame pri študiju.

Vsem iskreno hvala.

Program magistrskega dela

MATRIČNI KOMUTATORJI

Sanja Levart

Naj bosta $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Komutator matrik A in B je matrika

$$[A, B] = AB - BA.$$

Znani so rezultati, ko na podlagi zapisa matrike v obliki komutatorja opišemo kakšno posebno lastnost matrike. Tako na primer velja, da je sled matrike A enaka nič natanko tedaj, ko obstajata $B, C \in M_n(\mathbb{C})$ za katera je $A = [B, C]$. Ali, da iz $[A, B] = A$ sledi, da je matrika A nilpotentna.

V magistrskem delu naj bodo predstavljeni in dokazani nekateri znani rezultati, ki govorijo o lastnostih matrik na osnovi njihovega zapisa v obliki matričnega komutatorja.

Osnovna literatura:

1. C. Lupu, *Matrix adjugates and additive commutators*, Gazeta Matematica (A-serias), 24 (2011), 90-97.
2. A. A. Albert and B. Muckenhoupt, *On matrices of trace zero*, Michigan Math. J., Vol. 4 (1957), 1-3.

doc. dr. Mateja Grašič

LEVART, S.: Matrični komutatorji .
Magistrsko delo, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Oddelek za matematiko in računalništvo, 2020.

IZVLEČEK

Cilj magistrskega dela je predstaviti nekaj rezultatov, ki povezujejo zapis matrik v obliki matričnega komutatorja s kakšno posebno lastnostjo matrike.

Velja na primer, da je matrika A, ki zadošča kateremu od pogojev:

$$\begin{array}{ll} a) & A[A,B] = [A,B]A \text{ za neko matriko } B \\ b) & [adj(A),B] = A \text{ za neko matriko } B \\ c) & [A,B] = A \text{ za neko matriko } B \end{array}$$

nilpotentna. Dokažemo tudi, da je sled matrike enaka 0 natanko tedaj, ko lahko to matriko predstavimo v obliki matričnega komutatorja.

Ključne besede: matrika, matrični komutator, nilpotentna matrika, sled matrike.

Math. Subj. Class. (2010): 15A24

.

LEVART, S.: Matrix commutators.
Master Thesis, University of Maribor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Department of Mathematics and Computer Science, 2020.

ABSTRACT

The aim of the master's thesis is to present some results that relate the matrix property in the form of some matrix commutator condition to some specific property of this matrix.

For example, for the matrix A that satisfies any of the conditions:

$a)$ $A[A,B] = [A,B]A$ for some matrix B

$b)$ $[adj(A),B] = A$ for some matrix B

$c)$ $[A,B] = A$ for some matrix B

it follows that A is a nilpotent matrix. We also show that the trace of the matrix is 0 if and only if we can represent this matrix in the form of a commutator.

Keywords: matrix, matrix commutators, nilpotent matrix, trace of a matrix.

Math. Subj. Class. (2010): 15A24

Kazalo

Uvod

V magistrskem delu preučujemo lastnosti kompleksnih matrik na podlagi njihovega zapisa v obliki matričnih komutatorjev. Matrični komutator kompleksnih kvadratnih $n \times n$ matrik A in B je matrika

$$[A, B] = AB - BA.$$

Opazimo lahko, da je komutator matrik A in B enak 0 natanko tedaj, ko matriki komutirata.

V prvem poglavju vpeljemo osnovne pojme, ki jih potrebujemo v drugem, osrednjem delu magistrskega dela. Na začetku spoznamo pojem matrike, vpeljemo osnovne računske operacije med matrikami in predstavimo njihove pomembnejše lastnosti. Nato definiramo funkcijo determinanta in jo povežemo s pojmom obrnljivosti matrike. Ob koncu predstavimo tudi nekaj lastnosti ranga matrike.

V drugem poglavju magistrskega dela, ki je razdeljen na pet podpoglavij, je prvo podpoglavje namenjeno pojmu nilpotentnosti matrike. Med drugim dokažemo, da je matrika nilpotentna natanko tedaj, ko so vse njene lastne vrednosti enake 0, torej je sled nilpotentne matrike enaka 0. V drugem podpoglavju definiramo pojem adjugirane matrike k dani matriki in predstavimo nekaj njenih osnovnih lastnosti. V tretjem podpoglavju, ki govori o komutatorjih in nilpotentnosti, dokažemo tri pomembnejše izreke: izkaže se, da je matrika A, ki zadošča kateremu od pogojev

$d)$ $A[A, B] = [A, B]A$ za neko matriko B

$e)$ $[adj(A), B] = A$ za neko matriko B

$f)$ $[A, B] = A$ za neko matriko B

nilpotentna. V četrtem podpoglavju se ukvarjamo z nilpotentnostjo adjugirane matrike, $adj(A)$. Dokažemo na primer, da za vsaki matriki A in B iz enakosti $[adj(A), B] = adj(A)$ sledi, da je $(adj(A))^2 = 0$ in, da tudi iz pogoja $[A, B] = adj(A)$ sledi $(adj(A))^2 = 0$. Kot osrednji rezultat zadnjega podpoglavja dokažemo, da iz lastnosti, da je sled matrike enaka 0 sledi, da lahko to matriko zapišemo v obliki komutatorja. Torej velja, da je sled(A)=0 natanko tedaj, ko lahko matriko A zapišemo v obliki komutatorja dveh matrik.

Poglavje 1

Osnovni pojmi

1.1 Matrika

Definicija 1.1 ***Matrika*** *velikosti $m \times n$ je pravokotna shema poljubnih elementov, ki so urejeni v m vrstic in n stolpcev:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij}).$$

V primeru, ko so elementi $a_{ij} \in \mathbb{C}$ za vsak i $\in \{1, ..., m\}$ in $j \in \{1, ..., n\}$, matriko imenujemo **kompleksna matrika**. Pri elementu a_{ij} nam indeksa i in j povesta kje leži element v matriki. Indeks i določa vrstico in indeks j določa stolpec v matriki. Množico vseh kompleksnih matrik velikosti $m \times n$ bomo označili z $M_{m \times n}(\mathbb{C})$.

Definicija 1.2 *Kadar je $m = n$ imenujemo matriko* ***kvadratna matrika****. Množico vseh kvadratnih kompleksnih matrik velikosti $n \times n$ bomo označili z $M_n(\mathbb{C})$.*

Ker je $M_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ in ima v tem primeru ta množica skupaj z običajnim seštevanjem in množenjem zelo posebne lastnosti, se s to množico v magistrskem delu ne bomo ukvarjali. V nadaljevanju naj n predstavlja naravno število večje od 1.

1.2 Računske operacije z matrikami

V tem poglavju bomo predstavili osnovne računske operacije med matrikami in njihove lastnosti.

1.2.1 Seštevanje matrik

Kompleksne matrike enakih velikosti lahko med seboj seštevamo. To storimo tako, da seštejemo istoležne elemente matrik. Rezultat seštevanja kompleksnih matrik je matrika, ki ima enako velikost kot matrike, ki jih seštevamo.

Če je $A = (a_{ij})$ in $B = (b_{ij})$, $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, je:
$A + B = C$, kjer je $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, za vse $i = 1, 2, ..., m$ in $j = 1, 2, ..., n$.

$$C = A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{b2} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Seštevanje kompleksnih matrik je komutativno in asociativno. Torej za vse $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ velja:

$$\begin{aligned} A + B &= B + A \\ (A + B) + C &= A + (B + C). \end{aligned}$$

Definicija 1.3 ***Ničelna matrika*** *je matrika, katera ima vse elemente enake nič:*

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{C}).$$

Ničelno matriko velikosti $n \times n$ bomo označevali z 0 ali z 0_n.
Ničelna matrika je netrivialni element za operacijo seštevanja:
za vsak $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ je $A + 0 = A$.

Za vsak $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ obstaja $-A = (-a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ in velja:

$$A + (-A) = 0.$$

Zgoraj opisane lastnosti seštevanja matrik nam povedo, da je par $(M_{m\times n}(\mathbb{C}), +)$ Abelova grupa.

1.2.2 Množenje matrik

Če je število stolpcev prve kompleksne matrike enako številu vrstic druge kompleksne matrike, potem ju lahko pomnožimo med seboj.

Za $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ in $B = (b_{ij}) \in M_{n\times k}(\mathbb{C})$ je:

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}\cdot b_{11} + \dots + a_{1n}\cdot b_{n1} & a_{11}\cdot b_{12} + \dots + a_{1n}\cdot b_{n2} & \dots & a_{11}\cdot b_{1k} + \dots + a_{1n}\cdot b_{nk} \\ a_{21}\cdot b_{11} + \dots + a_{2n}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12} + \dots + a_{2n}\cdot b_{n2} & \dots & a_{21}\cdot b_{1k} + \dots + a_{2n}\cdot b_{nk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\cdot b_{11} + \dots + a_{mn}\cdot b_{n1} & a_{m1}\cdot b_{12} + \dots + a_{mn}\cdot b_{n2} & \dots & a_{m1}\cdot b_{1k} + \dots + a_{mn}\cdot b_{nk} \end{bmatrix}.$$

Velja torej:

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj} = a_{i1} b_{1j} + ... + a_{in} b_{nj},$$

za vse $i = 1, 2, ..., n$ in $j = 1, 2, ..., k$. Rezultat množenja matrik velikosti $m \times n$ in $m \times k$ je torej matrika velikosti $n \times k$.

Za množenje kompleksnih matrik velja zakon asociativnosti, seštevanje in množenje matrik pa zadoščata zakonoma distributivnosti. Za vse matrike A, B, C ustreznih velikosti, da so produkti in vsote definirani, torej velja:

$$\begin{aligned} (AB)C &= A(BC) \\ (A+B)C &= AC + BC \\ A(B+C) &= AB + AC. \end{aligned}$$

V splošnem množenje kompleksnih matrik **ni** komutativno, torej obstajajo pari matrik A, B da je:

$$AB \neq BA.$$

Primer. Pomnožimo matriki $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}$ in $\quad B = \begin{bmatrix} -i & 6 \\ 1+2i & 1 \end{bmatrix}$.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -i & 6 \\ 1+2i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot(-i) + i(1+2i) & 1\cdot 6 + i \cdot 1 \\ (1-i)\cdot(-i) - 1\cdot(1+2i) & (1-i)\cdot 6 - 1\cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2i^2 & 6+i \\ -3i + i^2 - 1 & -5-6i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6+i \\ -2-3i & 5-6i \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -i & 6 \\ 1+2i & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\cdot 1 + 6(1-i) & -i\cdot i + 6(-1) \\ (1-2i)\cdot 1 + 1(1-i) & (1+2i)i + 1\cdot(-1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -i + 6 - 6i & -i^2 - 6i \\ 1 + 2i + 1 - i & i + 2i^2 - 1 = \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-7i & -5i \\ 2+i & i-3 \end{bmatrix}.$$

Opazimo, da $AB \neq BA$, torej množenje matrik ni komutativno.

Seveda obstajajo primeri matrik $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, za katere je $AB = BA$. V tem primeru rečemo, da matriki A in B **komutirata**.

Definicija 1.4 *Kvadratno matriko, katere elementi imajo na glavni diagonali vrednost 1, vsi ostali elementi pa vrednost 0, imenujemo* ***identična matrika*** *ali* ***identiteta.*** *Identično matriko bomo označevali z I.*

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Za vsak $A \in M_n(\mathbb{C})$ in $I \in M_n(\mathbb{C})$ velja:

$$AI = IA = A,$$

torej je I enota za množenje kvadratnih matrik.

Na kratko lahko zgoraj opisane lastnosti seštevanja in množenja kvadratnih matrik strnemo v trditev, da je $(M_n, +, \cdot)$ nekomutativen kolobar (z enoto).

1.2.3 Množenje matrike s skalarjem

Poljubno matriko A množimo s skalarjem $s \in \mathbb{C}$ tako, da vsak element matrike A pomnožimo s skalarjem s.

Če je $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, je:

$$s \cdot A = s \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \cdot a_{11} & s \cdot a_{12} & \dots & s \cdot a_{1n} \\ s \cdot a_{21} & s \cdot a_{22} & \dots & s \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s \cdot a_{m1} & s \cdot a_{m2} & \dots & s \cdot a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{C}).$$

Za vse $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ in skalarje $s, l \in \mathbb{C}$ velja:

$$\begin{aligned} s\cdot A &= A\cdot s \\ s(lA) &= (sl)A = l(sA) \\ s(A+B) &= sA + sB \\ (s+l)A &= sA + lA. \end{aligned}$$

Glede na predstavljene lastnosti operacij seštevanja, množenja in množenja s skalarji, ugotovimo, da je množica kvadratnih kompleksnih matrik velikosti $n\times n$, $M_n(\mathbb{C})$, nekomutativna algebra nad $\mathbb{C}$.

1.3 Determinanta

Definicija 1.5 *Vsaki kvadratni kompleksni matriki $A = (a_{ij})$ priredimo kompleksno število, ki ga imenujemo* ***determinanta matrike****, kot:*

$$det(A) = \sum_{\pi\in S_n} sgn(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)},$$

kjer je S_n množica vseh permutacij števil $1, 2, ..., n$ in je $sgn(\pi)$ predznak permutacije π (pri sodi permutaciji je + in pri lihi permutaciji je -).

Determinanto matrike A označimo tudi kot:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Determinanta kvadratne matrike A velikosti 2×2 je enaka

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Za računanje determinant večjih velikosti matrik lahko uporabimo Laplaceov obrazec za razvoj determinante po vrstici ali stolpcu.

Razvoj determinante po j-ti vrstici matrike $A = (a_{ij}) \in M_n$ je:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(A_{ij}),$$

kjer je A_{ij} matrika, ki jo dobimo, ko v matriki A črtamo i-to vrstico in j-ti stolpec. Razvoj determinante po i-tem stolpcu je:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(A_{ij}).$$

S črtanjem vrstic in stolpcev matrike A in izračunom pripadajoče determinante se bomo v naslednjem poglavju še srečali. Take determinante imenujemo **poddeterminante**.

Primer. S pomočjo razvoja po vrstici oz. stolpcu izračunajmo determinanto matrike A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -i & 2 & 2i \\ 0 & 1+2i & 1 & -i \\ 0 & 1-i & -1 & 0 \\ 3i & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -i & 2 & 2i \\ 0 & 1+2i & 1 & -i \\ 0 & 1-i & -1 & 0 \\ 3i & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1+2i & 1 & -i \\ 1-i & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 3i \begin{vmatrix} -i & 2 & 2i \\ 1+2i & 1 & -i \\ 1-i & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 1 & -i \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 3i \left(2i \begin{vmatrix} 1+2i & 1 \\ 1-i & -1 \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} -i & 2 \\ 1-i & -1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= -i - 3i(2i(-1-2i-1+i) + i(i-2-2i)) = -i - 3i(-4i+2-2i-3) =$$
$$= -i + 3i - 18 = -18 + 2i$$

Na prvem koraku smo izvedli razvoj determinante po prvem stolpcu, na drugem koraku smo pri determinanti izvedli razvoj determinante po tretji vrstici, pri drugi determinanti pa smo izvedli razvoj determinante po tretjem stolpcu.

Opomba 1.6 *Pri računanju determinante si lahko pomagamo tudi z Gaussovo eliminacijo (za podrobnosti glej [1], stran 98).*

Determinanta je torej funkcija, ki vsaki kvadratni matriki priredi število, torej

$$\begin{aligned} det : M_n &\rightarrow \mathbb{C}. \\ A &\mapsto det(A). \end{aligned}$$

Omenimo nekaj lastnosti te funkcije. Za vse $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ in $s \in \mathbb{C}$ velja:

$$\begin{aligned} det(AB) &= det(A)det(B) \\ det(sA) &= s^n det(A) \\ det(I_n) &= 1 \\ det(0_n) &= 0. \end{aligned}$$

Ni težko razmisliti, da je v splošnem:

$$det(A + B) \neq det(A) + det(B), \text{ torej funkcija determinanta ni aditivna.}$$

Za dokaze trditev v tem podpoglavju glej [1], stran 125-133.

Izrek 1.7 *Naj bo $A \in M_n(\mathbb{C})$. Potem je $det(A) = 0$ natanko tedaj, ko so vrstice (oz. stolpci) matrike A linearno odvisni.*

1.4 Transponiranje matrik in obrnljivost

Definicija 1.8 ***Transponirano matriko*** *A^T k dani matriki $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ dobimo tako, da zamenjamo vlogo vrstic in stolpcev matrike A oziroma, da matriko A prezrcalimo preko glavne diagonale.*

Za $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ je torej $A^T = (a_{ji}) \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$.

Za transponiranje kvadratnih matrik veljajo naslednje lastnosti. Če sta $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ in $s \in \mathbb{C}$ velja:

$$\begin{aligned} (A^T)^T &= A, \\ \det(A) &= det(A^T), \\ (AB)^T &= B^T A^T. \end{aligned}$$

Definicija 1.9 ***Inverzna matrika*** *kvadratne matrike $A \in M_n(\mathbb{C})$ je takšna matrika $B \in M_n(\mathbb{C})$, da je $AB = BA = I$. Označili jo bomo z A^{-1}. Če A premore inverzno matriko, rečemo, da je matrika A* ***nesingularna oz. obrnljiva****, sicer je A* ***singularna****.*

Opomba 1.10 *Inverzno matriko matrike A lahko izračunamo s pomočjo Gaussove eliminacije (za opis postopka glej [1] 98).*

Znana je naslednja karakterizacija obrnljivosti matrik.

Izrek 1.11 *Matrika A je obrnljiva natanko tedaj, ko je $det(A) \neq 0$.*

Primer. Preverimo ali je matrika $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ obrnljiva.

Ker je $det(A) = -24$, je A obrnljiva. Izračunajmo še A^{-1}.

$$A^{-1}: \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{5}{24} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{array}\right]$$

Inverzna matrika matrike A je matrika $A^{(-1)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{5}{24} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$.

Za vsaki obrnljivi matriki $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ velja:

$$\begin{aligned} (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1}, \\ det(A^{-1}) &= \frac{1}{det(A)}. \end{aligned}$$

Definicija 1.12 ***Rang*** *matrike A je število linearno neodvisnih vrstic oz. stolpcev matrike. Rang matrike A bomo označevali z $rang(A)$.*

Rang matrik torej ne more biti večji od števila vrstic ali stolpcev matrike in je določen z največjo velikostjo neničelne poddeterminante matrike A.

Lastnosti:

- Rang matrike velikosti $m \times n$ je nenegativno število, ki ne more biti večje od m ali n. Zato velja
$$0 \leq rang(A) \leq min(m, n).$$
- Samo ničelna matrika ima rang 0.
- Matrika $A \in M_n(\mathbb{C})$ je obrnljiva, natanko tedaj, ko je njen rang enak n.

- Če je $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ in $B \in M_{n\times r}(\mathbb{C})$, potem je

$$rang(AB) \leq min(rang(A), rang(B)).$$

- Če je $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ in $B \in M_{n\times r}(\mathbb{C})$ in je rang matrike B enak n, potem je

$$rang(AB) = rang(A).$$

- Sylvestrova neenakost: če je $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ in $B \in M_{n\times r}(\mathbb{C})$, potem je

$$rang(A) + rang(B) - n \leq rang(AB).$$

Poglavje 2

Komutatorji in lastnosti matrik

2.1 Nilpotentnost in sled matrike

V tem poglavju bomo predstavili nekaj rezultatov o nilpotentnnih matrikah, lastnih vrednostih matrike in funkciji sled. V nadaljevanju bomo te rezultate uporabili pri preučevanju lastnosti komutatorjev matrik.

Definicija 2.1 *Kvadratna matrika $A \in M_n(\mathbb{C})$ je **nilpotentna**, če obstaja $m \in \mathbb{N}$, da velja $A^m = 0$.*

Lastnosti:
Če je matrika $A \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotentna, potem je:

- matrika $(I + A)$ obrnljiva,
- $det(I + A) = 1$, velja tudi obratno: Če za matriko A velja $det(I + sA) = 1$, potem je matrika A nilpotentna.

Definicija 2.2 *Naj bo $A \in M_n(\mathbb{C})$. Kadar je λ kompleksno število, v neničelni stolpec dolžine n in velja $Av = \lambda v$ oziroma $(A - \lambda I)v = 0$ pravimo, da je v **lastni vektor** matrike A pri **lastni vrednosti** λ. Polinom $p_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$ v spremenljivki λ imenujemo **karakteristični polinom** matrike A.*

Trditev 2.3 *Kompleksno število λ je lastna vrednost matrike A natanko tedaj, ko je λ ničla karakterističnega polinoma $p_A(\lambda)$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Naj bo λ lastna vrednost matrike A. Obstaja torej v neničelni stolpec dolžine n, da je

$$Av = \lambda v,$$

oziroma

$$(A - \lambda I)v = 0.$$

Neničelna rešitev homogenega sistema, ki ga določa matrika $(A - \lambda I)$ je v, torej matrika $(A - \lambda I)$ ni obrnljiva. Zato je $det(A - \lambda I) = 0$.

($\Leftarrow$) Naj bo λ ničla karekterističnega polinoma p_A. Velja:

$$p_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0.$$

Obstaja neničelni stolpec v, ki reši homogen sistem:

$$(A - \lambda I)v = 0.$$

Torej je λ lastna vrednost matrike A.

$\square$

Izrek 2.4 *(Cayley-Hamiltonov izrek) Če je $p_A(\lambda)$ karakteristični polinom matrike $A \in M_n(\mathbb{C})$, potem je:*

$$p_A(A) = 0.$$

Za dokaz izreka glej [2], stran 109, Izrek 2.4.3.2.

Trditev 2.5 *Matrika A je nilpotentna natanko tedaj, ko ima vse lastne vrednosti enake 0.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Predpostavimo, da je matrika A nilpotentna. Potem obstaja $m \in \mathbb{N}$, da velja $A^m = 0$. Naj bo λ lastna vrednost matrike A in naj bo v lastni vektor matrike A pri lastni vrednosti λ. Potem velja:

$$Av = \lambda v.$$

Pomnožimo enakost z matriko A enkrat z leve strani. Dobimo:

$$A^2 v = \lambda A v = \lambda^2 v.$$

Induktivno lahko sklepamo, da je:

$$A^m v = \lambda^m v.$$

Po predpostavki vemo, da je $A^m = 0$ za nek $m > 0$, zato je $\lambda^m = 0$ in $\lambda = 0$.

($\Leftarrow$) Predpostavimo, da so vse lastne vrednosti matrike A enake 0. Potem je karakteristični polinom enak:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = \pm \lambda^n.$$

Z uporabo Cayley-Hamiltonovega izreka dobimo:

$$p(A) = \pm A^n = 0,$$

torej je matrika A nilpotentna.

$\square$

Trditev 2.6 *Naj bo $A \in M_n(\mathbb{C})$. Potem obstaja taka obrnljiva matrika $P \in M_n(\mathbb{C})$, da je matrika $P^{-1}AP$ zgornje trikotna, njeni diagonalni elementi pa so lastne vrednosti od matrike A.*

Za dokaz trditve glej [2], stran 101, Izrek 2.3.1.

Definicija 2.7 ***Sled*** *kvadratne matrike A je definirana kot vsota elementov na glavni diagonali matrike. Sled matrike A bomo označevali s $sled(A)$.*

Za $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ je torej:

$$sled(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Pri tem za poljubni $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ in $s \in \mathbb{C}$ velja:

- $sled(A + B) = sled(A) + sled(B)$,

  Dokaz. Naj bosta $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & * & \dots & * \\ * & a_{22} + b_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & a_{nn} + b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$sled(A + B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = sled(A) + sled(B).$$

□

- $sled(sA) = s \cdot sled(A)$.
- sled(AB)=sled(BA).

  Dokaz. Naj bosta $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ in $C = AB$.

  $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, za vsak $i, j = 1, 2, ..., n$.

$$sled(AB) = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} + \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} + \ldots + \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{kn}$$

$$sled(BA) = \sum_{k=1}^{n} b_{1k}a_{k1} + \sum_{k=1}^{n} b_{2k}a_{k2} + \ldots + \sum_{k=1}^{n} b_{nk}a_{kn}$$

  S primerjanjem seštevancev vidimo, da je res $sled(AB) = sled(BA)$.

□

- $sled(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, kjer so λ_i lastne vrednosti.

  Dokaz. Dokaz sledi iz posledice Schurove dekompozicije (glej [2] stran 101, Izrek 2.3.1). Če je $T = Q^{-1}AQ$, kjer je Q neka obrnljiva matrika in je T zgornje trikotna matrika, ki ima po diagonali lastne vrednosti matrike A, potem je:

  $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = sled(T) = sled(Q^{-1}AQ) = sled(QQ^{-1}A) = sled(A).$$

  □

Trditev 2.8 *Če je A nilpotentna matrika, je $sled(A) = 0$.*

Dokaz. Po trditvi 2.5 vemo, da ima nilpotentna matrika vse lastne vrednosti enake 0, torej je $sled(A) = 0$.

□

2.2 Adjungiranka matrike

Vpeljimo adjungirano matriko dane matrike. $A \in M_n(\mathbb{C})$. Kofaktorji matrike A so:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij}),$$

za $i, j = 1, 2, ..., n$. Tukaj A_{ij} predstavlja matriko, ki jo dobimo, ko v matriki A črtamo $i-$to vrstico in $j-$ti stolpec.

Tvorimo matriko kofaktorjev $C = c_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$.

Definicija 2.9 ***Adjungirana matrika*** *matrike $A \in M_n(\mathbb{C})$ ali* ***adjungiranka*** *matrike A, je matrika:*

$$adj(A) = C^T.$$

Primer. Izračunajmo adjungiranko matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

$$C = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Lastnosti:

- $adj(A^T) = adj(A)^T$,
- $adj(A) \cdot A = A \cdot adj(A) = det(A) \cdot I_n$, če je $det(A) \neq 0$.

Dokaz. Naj bo $adj(A) = \tilde{A}$. Izračunajmo a_{ij}-ti element matrike $A\tilde{A}$:

$$(A\tilde{A})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}\tilde{A}_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{jk} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}a_{ik} \cdot detA_{jk}.$$

Uporabimo Laplaceov obrazec za razvoj determinante po vrstici in opazimo, da je zgornji zapis razvoj determinante matrike A' po j-ti vrstici, kjer smo v matriki A j-to vrstico zamenjali z i-to vrstico. Velja:

$$(A\tilde{A})_{ij} = det(A_1, ..., A_{j-1}, A_i, A_{j+1}, ..., A_n) = 0, \text{ za } i \neq j,$$
$$(A\tilde{A})_{ij} = det(A_1, ..., A_{j-1}, A_i, A_{j+1}, ..., A_n) = det(A), \text{ za } i = j.$$

Dobili smo $A\tilde{A} = \begin{bmatrix} det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & det(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & det(A) \end{bmatrix} = det(A) \cdot I.$

□

- Če je $rang(A) \leq n-2$, potem je $adj(A) = 0$, ker so vse poddeterminante velikosti $n-1$ matrike A enake 0.
- Če je $rang(A) = n-1$, potem je $det(A) = 0$ in iz Sylvestrove neenakosti lahko izpeljemo:

$$\begin{aligned} 0 &= rang(det(A)I_n) = rang(adj(A)A), \\ rang(adj(A)A) &\geq rang(A) + rang(adj(A)) - n, \\ rang(adj(A)A) &\geq n - 1 + rang(adj(A)) - n, \\ 0 &\geq rang(adj(A)) - 1. \end{aligned}$$

Torej je:

$$rang(adj(A)) \leq 1.$$

Ker je $rang(A) = n-1$, velja:

$$rang(adj(A)) \neq 0,$$

torej je

$$rang(adj(A)) = 1.$$

- Za obrnljivi matriki $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ velja $adj(AB) = adj(B) \cdot adj(A)$.

Dokaz. Ker sta matriki A, B obrnljivi, velja:

$$adj(B) \cdot adj(A) = det(B)B^{-1} \cdot det(A)A^{-1} = det(AB) \cdot (AB)^{-1} = adj(AB).$$

□

2.3 Komutatorji in nilpotentnost

V poglavju 1.2.2 smo med drugimi povedali, da množenje matrik v splošnem ni komutativno. Kadar za matriki $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ velja:

$$AB = BA,$$

rečemo, da matriki A in B komutirata. V tem primeru je torej

$$AB - BA = 0.$$

Izraz (matriko) $AB - BA$ imenujemo **komutator matrik** A in B in ga označimo z $[A, B]$.

Cilj drugega poglavja je dokazati, da iz pogoja

$$[A, B] = A, \text{ kjer sta } A, B \in M_n(\mathbb{C}),$$

sledi, da je A nilpotentna matrika.

Primer. Podajmo primera para matrik, ki komutirata in para matrik, ki ne komutirata ter zapišimo njun komutator.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Matriki A in B komutirata, ker je $AB = BA$.

$$[A, B] = AB - BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Komutator matrik A in B je enak 0.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$C \cdot D = \begin{bmatrix} 25 & 29 & 33 \\ 17 & 22 & 27 \\ 18 & 24 & 30 \end{bmatrix}, \quad D \cdot C = \begin{bmatrix} 16 & 5 & 11 \\ 34 & 14 & 29 \\ 52 & 23 & 47 \end{bmatrix}.$$

Matriki C in D ne komutirata, ker je $CD \neq DC$.

$$[C, D] = CD - DC = \begin{bmatrix} 25 & 29 & 33 \\ 17 & 22 & 27 \\ 18 & 24 & 30 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 & 5 & 11 \\ 34 & 14 & 29 \\ 52 & 23 & 47 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 24 & 22 \\ -17 & 8 & -2 \\ -34 & 1 & -17 \end{bmatrix}.$$

Komutator matrik C in D je $\begin{bmatrix} 9 & 24 & 22 \\ -17 & 8 & -2 \\ -34 & 1 & -17 \end{bmatrix}$.

Za poljubne $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$ velja:

- $[A, A] = 0$,
- $[B, A] = -[A, B]$,

  Dokaz. Vemo, da je $[A, B] = AB - BA$. Zato je:

  $$[B, A] = BA - AB = -(AB - BA) = -[A, B].$$

  □

- $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$,

  Dokaz. Vemo, da je $[A, BC] = ABC - BCA$. Zato je:

  $$[A, BC] = ABC - BAC + BAC - BCA =$$

$$= (AB - BA)C + B(AC - CA) =$$

$$= [A, B]C + B[A, C].$$

□

- Japonski matematik Von Kenjiro Shoda je leta 1936 dokazal, da je sled komutatorja enaka 0. To drži, saj:

$$sled([A, B]) = sled(AB - BA) = sled(AB) - sled(BA) = 0.$$

Lema 2.10 *Naj bo $A \in M_n(\mathbb{C})$. Potem je $sled(A^i) = 0$, za vsak $i = 1, 2, ..., n$, natanko tedaj, ko je matrika A nilpotentna.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Naj bodo $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ lastne vrednosti od matrike A. Po predpostavki vemo:

$$\lambda_1^i + \lambda_2^i + ... + \lambda_n^i = 0, \text{ za vsak } i = 1, 2, ..., n.$$

Spomnimo se Newtonove identitete:

$$(-1)^m \sum_{1 \le i_1 < ... < i_m \le n} x_{i1} x_{i2} ... x_{im} + \sum_{k=1}^{m} \left((-1)^{k+m} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^k \right) \sum_{1 \le i_1 < ... < i_{m-k} \le n} x_{i_1} ... x_{i_{m-k}} \right) = 0$$

in jo uporabimo za $m = 1, 2, ..., n$ ter dobimo:

$$\sum_{1 \le i_1 < ... < i_m \le n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} ... \lambda_{i_m} = 0.$$

Torej so vsi koeficienti karakterističnega polinoma matrike A, razen vodilnega koeficienta, ki je enak 1, enaki 0 in iz Cayleyevega izreka sledi, da je $A^n = 0$.

($\Leftarrow$) Naj bo A nilpotentna matrika in naj bo $n \in \mathbb{N}$ tak, da je $A^n = 0$. Predpostavimo, da obstaja lastna vrednost $\lambda \neq 0$ in naj bo $v \neq 0$ lastni vektor za lastno vrednost λ. Potem je:

$$Av = \lambda v \text{ in zato } \lambda A^{n-1} v = A^n v,$$

kjer je $n > 1$ in $A^n = 0$. Ker je $\lambda \neq 0$, sledi:

$$A^{n-1}v = 0.$$

Z večkratnim upoštevanjem te lastnosti pridemo do $Av = 0 = \lambda v$, kar je v protislovju z začetno predpostavko, da je $\lambda \neq 0$.

□

Izrek 2.11 *Naj bosta $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Če je $A[A, B] = [A, B]A$, potem je komutator $[A, B]$ nilpotenten.*

Dokaz. Upoštevali bomo lastnosti sledi komutatorjev $[A, B]$. Naj bo $C = [A, B]$ ter predpostavimo, da je $CA = AC$. Zato je $C^iA = AC^i$, za vsak $i = 1, 2, ..., n$. Glede na predhodno lemo, zadošča dokazati, da je $sled(C^i) = 0$ za vsak $i = 1, 2, ...n$. Opazimo, da za vsak $i = 1, 2, ..., n$ velja:

$$sled(C^i) = sled(C^{i-1}(AB - BA)) = sled(C^{i-1}AB - C^{i-1}BA) =$$

$$= sled(AC^{i-1}B) - sled(C^{i-1}BA) = sled(C^{i-1}BA) - sled(C^{i-1}BA) = 0.$$

Torej je sled matrike C^i enaka 0, za vsak $i = 1, 2, ..., n$ in iz leme 2.10 sledi, da je komutator $[A, B]$ nilpotenten.

□

Izrek 2.12 *Naj bosta $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Če $[adj(A), B] = A$, potem je A nilpotentna.*

Dokaz. Ker je:

$$A \cdot adj(A) = adj(A) \cdot A = det(A) \cdot I_n$$

iz predpostavke izreka $[adj(A), B] = A$, sledi, da $adj(A)$ komutira z $[adj(A), B]$. Z uporabo Izreka 2.11 dobimo, da je komutator $[adj(A), B]$ nilpotenten, torej je A nilpotentna.

□

Izrek 2.13 *Naj bo $A \in M_n(\mathbb{C})$. Če je $[A, B] = A$ za neki $B \in M_n(\mathbb{C})$, potem je matrika A nilpotentna.*

Dokaz. Pomnožimo enakost $AB - BA = A$ z matriko A enkrat z leve in enkrat z desne strani. Dobimo:

$$A(AB - BA) = A^2 = A^2B - ABA = A^2 \text{ in } (AB - BA)A = A^2 = ABA - BA^2 = A^2.$$

Iz enakosti sledi:

$$A^2B - BA^2 = 2A^2.$$

Induktivno lahko sklepamo, da:

$$A^iB - BA^i = iA^i \text{ za vsak } i \geq 1.$$

Opazimo:

$$0 = sled(A^iB - BA^i) = sled(iA^i) = i \cdot sled(A^i).$$

Dobimo, da je $sled(A^i) = 0$, za vsak $i \geq 1$. Po lemi 2.10 zato vemo, da je matrika A nilpotentna.

□

2.4 Komutatorji in adjungiranke

Lema 2.14 *Naj bo $A \in M_n(\mathbb{C})$ singularna matrika. Potem obstaja kompleksno število λ, tako da je $(adj(A))^2 = \lambda \cdot adj(A)$.*

Dokaz. Naj bo $r = rang(A)$. Ker je $det(A) = 0$, je $r \leq n - 1$.
Če je $r \leq n-2$ potem so vse poddeterminante matrike A reda $n-1$ enake 0 in je $adj(A) = 0_n$. Trditev leme v tem primeru drži.

Če je $r = n - 1$, naj bo $d_j = \begin{pmatrix} d_{1j} \\ d_{2j} \\ \vdots \\ d_{nj} \end{pmatrix}$ j-ti stolpec matrike $adj(A)$.

Velja: $A \cdot d_j = 0$, za vsak $j = 1, 2, ..., n$. Stolpci $adj(A)$ so torej rešitve homogenega sistema $Ax = 0$. Ker je $rang(A) = n - 1$, sta vsaka dva stolpca $adj(A)$ odvisna, zato je $rang(adj(A)) = 1$. Obstajata torej $M \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ in $N \in M_{1,n}(\mathbb{C})$, tako da je $adj(A) = MN$. Označimo $\lambda = NM$.
Sledi torej,

$$(adj(A))^2 = (MN)^2 = (MN) \cdot (MN) = M \cdot (NM) \cdot N = M\lambda \cdot N = \lambda \cdot MN = \lambda \cdot adj(A).$$

$\square$

Lema 2.15 *Če je $A \in M_n(\mathbb{C})$ takšna matrika, da je matrika $adj(A)$ nilpotententna, potem je:*

$$(adj(A))^2 = 0_n.$$

Dokaz. Iz predpostavke sledi, da je:

$$det(adj(A)) = 0.$$

Po predhodni lemi vemo, da je:

$$(adj(A))^2 = \lambda \cdot adj(A).$$

Iz nilpotentnosti $adj(A)$ sledi, da obstaja $i \geq 1$, tako da:

$$(adj(A))^i = 0_n.$$

Torej je:

$$0_n = (adj(A))^i = \lambda^{i-1} adj(A).$$

V primeru, ko je $adj(A) = 0_n$ je tudi $(adj(A))^2 = 0_n$, v nasprotnem primeru je $\lambda = 0$ in sledi, da je: $(adj(A))^2 = 0_n$.

$\square$

Izrek 2.16 *Naj bo* $A \in M_n(\mathbb{C})$*. Če je* $[A, B] = adj(A)$ *za neko matriko* $B \in M_n(\mathbb{C})$*, potem je* $(adj(A))^2 = 0_n$*.*

Dokaz. Podajmo tri načine dokaza tega izreka.

1.način.

Ker $adj(A)$ komutira z A, torej zaradi predpostavke izreka, matrika A komutira z $[A, B]$. Iz izreka 2.11 sledi, da je komutator nilpotenten in je zato $adj(A)$ nilpotenten. Po lemi 2.15 je torej $(adj(A))^2 = 0_n$.

2.način.

Če je $rang(A) \leq n - 2$, potem je $adj(A) = 0_n$ in $(adj(A))^2 = 0_n$. Če je $rang(A) = n - 1$, potem je $det(A) = 0$ in Sylvesterjeva neenakost pove, da je

$$0 = rang(det(A) \cdot I_n) = rang(A \cdot adj(A)) \geq rang(A) + rang(adj(A)) - n = rang(adj(A)) - 1$$

torej je $rang(adj(A)) \in \{0, 1\}$. Ker je $rang(adj(A)) \neq 0$, velja:

$$rang(adj(A)) = 1.$$

Iz $0 = sled([A, B]) = sled(adj(A))$ in $(adj(A))^2 = \lambda \cdot adj(A)$ z upoštevanjem lastnosti funkcije sled, sledi, da je:

$$sled((adj(A))^2) = 0.$$

Induktivno je $sled((adj(A))^n) = 0$, za vsak $n \geq 1$. Po lemi 2.10 in 2.15 je torej $(adj(A))^2 = 0_n$.

3.način.

Če je $rang(A) \leq n - 2$ potem je $adj(A) = 0_n$, torej je tudi $(adj(A))^2 = O_n$.

Če je $rang(A) = n - 1$, potem je $det(A) = 0$. Enakost:

$$[A, B] = adj(A) \text{ oz. } AB - BA = adj(A)$$

pomnožimo z leve strani z $adj(A)$ in dobimo:

$$adj(A)AB - adj(A)BA = (adj(A))^2.$$

Vemo, da ja $A \cdot adj(A) = adj(A)A = det(A)I_n$. Z uporabo te enakosti dobimo:

$$det(A)B - adj(A)BA = (adj(A))^2,$$

ki jo pomnožimo z $adj(A)$ še z desne strani in dobimo:

$$det(A)Badj(A) - adj(A)Bdet(A) = (adj(A))^3.$$

Torej je $(adj(A))^3 = 0_3$, kar pove, da je $adj(A)$ nilpotenten in iz leme 2.15 sledi $(adj(A))^2 = 0_n$.

□

Izrek 2.17 *Naj bosta $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Če je $[adj(A), B] = adj(A)$, potem je $(adj(A))^2 = 0_n$.*

Dokaz. Upoštevamo lastnost komutatorjev, za katere vemo, da je njihova sled enaka 0. Velja torej:

$$sled(adj(A) \cdot B) = sled(B \cdot adj(A)).$$

Označimo $C = [adj(A), B] = adj(A)$. Potem za vsak $i = 1, 2, ..., n$ velja:

$$sled(C^i) = sled(C^{i-1}(adj(A)B - B \cdot adj(A)) = sled(C^{i-1}adj(A)B - C^{i-1}B \cdot adj(A)) =$$

$$= sled(adj(A)C^{i-1}B) - sled(C^{i-1}B \cdot adj(A)) = sled(C^{i-1}B \cdot adj(A)) - sled(C^{i-1}B \cdot adj(A)) = 0$$

Dobimo torej, da je $sled(C^i)$ enaka 0 za vsak $i = 1, 2, ..., n$ in iz leme 2.10 sledi, da je $[adj(A), B]$ nilpotenten. Ker je $[adj(A), B] = adj(A)$, je torej $adj(A)$ nilpotenten in lema 2.15 pove, da je $(adj(A))^2 = 0_n$.

□

Pred naslednjim izrekom vpeljimo še eno oznako. Naj bosta $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Potem je:

$$[A, B]_{adj} = [adj(A), adj(B)].$$

Izrek 2.18 *Naj bosta $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Če $adj(A)$ in $[A, B]_{adj}$ komutirata, potem je $(adj([A, B]))^2 = 0_n$.*

Dokaz. Imamo:

$$[A, B]_{adj} = [adj(A), adj(B)] = adj(A) \cdot adj(B) - adj(B) \cdot adj(A) =$$

$$= adj(BA) - adj(AB) = adj(BA - AB) = -adj([A, B]).$$

Naša predpostavka in izrek 2.11 zagotavljata, da je $[A,B]_{adj}$ nilpotenten, torej je $adj([A,B])$ nilpotenten. Ponovno uporabimo trditev leme 2.15 , ki pove, da je res $(adj([A,B]))^2 = 0_n$.

□

2.5 Samo komutatorji imajo ničelno sled

Vemo že, da je $sled([A,B]) = 0$. V tem poglavju bomo dokazali, da velja tudi obratno: če je sled matrike enaka 0, potem to matriko predstavimo v obliki komutatorja.

Lema 2.19 *Če je $C \in M_n(\mathbb{C})$ komutator, je za vsaka stolpična vektorja v in s dolžine n tudi matrika*

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} 0 & v^T \\ s & C \end{bmatrix} \textit{ komutator.}$$

Dokaz. Naj bo $C = AB - BA$ za neki $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Tedaj je za poljubni skalar $\beta \in (\mathbb{C})$,

$$C = (A + \beta I)B - B(A + \beta I),$$

kar pomeni, da lahko predpostavimo, da je matrika A obrnljiva.

Za matriki $\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$ in $\overline{B} = \begin{bmatrix} 0 & -v^T A^{-1} \\ A^{-1}s & B \end{bmatrix}$, velja

$$\begin{aligned} \overline{AB} - \overline{BA} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -v^T A^{-1} \\ A^{-1}s & B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -v^T A^{-1} \\ A^{-1}s & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s & AB \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -v^T \\ 0 & BA \end{bmatrix} = \overline{C} \end{aligned}$$

□

Lema 2.20 *Naj bo $C \in M_n(\mathbb{C})$. Denimo, da ne obstaja taka obrnljiva matrika $P \in M_n(\mathbb{C})$, za katero je element na $(1,1)$-mestu matrike $P^{-1}CP$ enak 0. Tedaj je matrika C nek skalarni večkratnik identične matrike I.*

Dokaz. Očitno je $C \neq 0$, zato obstaja taka neničelna vrstica w^T, da je $w^T C \neq 0$. Recimo, da obstaja tak stolpec v, da je $w^T v = 1$ in $w^T C v = 0$. Tedaj obstaja taka obrnljiva matrika

$$P = \begin{bmatrix} v & b_2 & b_3 & \dots & b_n \end{bmatrix},$$

katere stolpci $b_2, b_3, ..., b_n$ sestavljajo bazo vektorskega prostora $V = \{b \in \mathbb{R}^n | w^T b = 0\}$, torej je $w^T b_i = 0$ za vsak $i = 2, 3, ..., n$. Glede na lastnosti stolpca v, je w^T prvi stolpec inverzne matrike P^{-1}, prvi element matrike $P^{-1}CP$ pa je $w^T C v = 0$.

Po predpostavki leme to ni mogoče, zato ne obstaja stolpec v, ki bi hkrati zadoščal pogojema $w^T v = 1$ in $w^T C v = 0$. Iz tega sledi, da je

$$w^T C = \mu w^T \text{ za nek } \mu \in \mathbb{C}, \mu \neq 0.$$

Dejansko je za poljuben stolpec w bodisi $w^T C = 0$ ali $w^T C = \mu w^T$ za nek skalar $\mu = \mu(w^T) \neq 0$. Matrika $P^{-1}CP$ je torej diagonalna za poljubno obrnljivo matriko P. Vsi diagonalni elementi te matrike so enaki, saj bi sicer z izbiro $w = w_i - w_j$, kjer sta w_i in w_j $i-$ti stolpec, $i \neq j$, matrike P^{-1} z upoštevanjem zveze $w^T C = \mu w^T$ prišli do protislovja. Torej je

$$P^{-1}CP = \mu I$$

oz.

$$C = \mu I.$$

□

Uporabili bomo kontrapozicijo leme: Če C ni skalarni večkratnik identitete, tedaj obstajajo take obrnljive matrike P, da je prvi diagonalni element matrike $P^{-1}CP$ enak 0.

Izrek 2.21 *Naj bo $A \in M(\mathbb{C})$. Če je sled$(A) = 0$, potem je matrika A komutator.*

Dokaz. Če je $A = 0$, izrek velja; tudi če $A \in M_1(\mathbb{C})$, izrek velja. Naj bo torej $A \in M_n(\mathbb{C})$ neničelna matrika in $n > 2$. Dokaz bo potekal z indukcijo po n.

Predpostavimo, da trditev velja za vse matrike dimenzije $m \times m$, kjer je $m < n$. Ker je $sled(A) = 0$, matrika A ni skalarni večkratnik identične matrike. Po predhodni lemi torej obstaja taka obrnljiva matrika P, da je

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & v^T \\ s & B \end{bmatrix},$$

za neka stolpca v, s dolžine $n-1$ in matriko $B \in M_{n-1}(\mathbb{C})$. Opazimo:

$$0 = sled(A) = sled(P^{-1}AP) = sled(B),$$

torej po indukcijski predpostavki sledi, da je matrika B komutator. Po prvi lemi tega poglavja sledi, da je tudi matrika $P^{-1}AP$ komutator:

$$\text{obstajata } X, Y \in M_n(\mathbb{C}), \text{ da je } P^{-1}AP = [X, Y].$$

Potem pa je tudi A komutator, saj velja:

$$A = P[X, Y]P^{-1} = [PXP^{-1}, PYP^{-1}].$$

□

Literatura

[1] D. Benkovič, *Vektorji in matrike*, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Maribor, 2014.

[2] R. A. Horn, C.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, USA, 1999 .

[3] K. Shoda, *Einige Satze über Matrizen*, Japanese J. Math., vol. 13, pp. 361-365, 1936.

[4] W. Kahan, *Only Commutators Have Trace Zero*. Citirano 20.11.2019. Dostopno na naslovu: https://people.eecs.berkeley.edu/ wkahan/MathH110/trace0.pdf

[5] C. Lupu, *Matrix adjugates and additive commutators*, Gazeta Matematica (A - serias), 24 (2011), 90-97.

[6] I. Vidav, *Algebra*, DMFA, Ljubljana, 2003.