UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Oddelek za matematiko in računalništvo

MAGISTRSKO DELO

Tjaša Kos

Maribor, 2020

UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Oddelek za matematiko in računalništvo

Magistrsko delo

Število kromatične stabilnosti povezav

na študijskem programu 2. stopnje Izobraževalna matematika

Mentorica:

doc. dr. Tanja Dravec

Kandidatka:

Tjaša Kos

Maribor, 2020

ZAHVALA

Zahvaljujem se mentorici, doc. dr. Tanji Dravec, za strokovno pomoč, vodenje in nasvete pri izdelavi magistrskega dela.

Zahvaljujem se tudi družini in Tomažu, ki so mi v času študija vedno stali ob strani, me podpirali in spodbujali.

Vsem iskreno hvala.

Število kromatične stabilnosti povezav

V magistrskem delu naj bo definirano število kromatične stabilnosti povezav grafa G. Število kromatične stabilnosti povezav grafa naj bo študirano na posebnih družinah grafov. Dokazane naj bodo različne meje tega števila tako v posebnih družinah grafov, kot za splošne grafe. Raziskani naj bodo grafi, ki imajo majhno število kromatične stabilnosti povezav.

Osnovni viri:

1. S. Akbari, S. Klavžar, N. Movarraei, M. Nahvi, Nordhaus-Gaddum and other bounds for chromatic edge-stability number, European J. Combin. 84 (2020) Article 103042.

2. A. Kemnitz, M. Marangio, N. Movarraei, On the chromatic edge stability number of graphs, Graphs Combin. 34 (2018) 1539–1551.

doc. dr. Tanja Gologranc

KOS, T.: Število kromatične stabilnosti povezav
Magistrsko delo, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Oddelek za matematiko in računalništvo, 2020.

IZVLEČEK

V magistrskem delu predstavimo število kromatične stabilnosti povezav grafa G. Najprej definiramo osnovne pojme teorije grafov in dokažemo nekaj lastnosti števila kromatične stabilnosti povezav. Opišemo grafe Mycielskega, njihovo konstrukcijo ter dokažemo, da je kromatično število grafa Mycielskega $M(G)$ za ena večje od kromatičnega števila grafa G. Nato se osredotočimo na število kromatične stabilnosti povezav posebnih družin grafov. Raziskujemo disjunktno unijo grafov, kartezični produkt, spoj grafov ter posebne družin grafov, ki jih dobimo s spojem nekaterih družin grafov. V nadaljevanju opišemo meje števila kromatične stabilnosti povezav. Dokažemo več spodnjih in zgornjih mej za $es_\chi(G)$. Osredotočimo se tudi na rezultate tipa Nordhaus-Gaddum in dokažemo zgornjo mejo za vsoto števila kromatične stabilnosti povezav grafa G in njegovega komplementa $\overline{G}$. Nazadnje raziskujemo grafe z $es_\chi(G) = 1$. Dokažemo, da je $es_\chi(G) = 1$ natanko tedaj, ko je vezano kromatično število enako 1. Še več, predstavimo več potrebnih pogojev za graf G z $es_\chi(G) = 1$.

Ključne besede: število kromatične stabilnosti povezav, kromatično število, dvodelni grafi, kartezični produkt grafov, grafi Mycielskega, neenakost tipa Nordhaus-Gaddum, vezano kromatično število

Math. Subj. Class. (2010): 05C15, 05C35

KOS, T.: The chromatic edge stability number of a graph
Master Thesis, University of Maribor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Department of Mathematics and Computer Science, 2020.

ABSTRACT

The master's thesis presents the chromatic edge stability number of a graph G. Firstly the basic concepts of graph theory and the chromatic edge stability number are presented. Described are Mycielski graphs, their construction and the proof that chromatic number of Mycielski graph $M(G)$ is greater by one than the chromatic number of the graph G. Then we focus on the chromatic edge stability number for specific graph classes. We investigate $es_\chi(G)$ for a disjoint union of graphs, a Cartesian product, join of two graphs and families of graphs, which can be described as the join of two graphs. Next, upper and lower bounds for the chromatic edge stability number are presented. We prove several lower and upper bounds for $es_\chi(G)$. We also focus on the Nordhaus-Gaddum type results and prove the upper bound for the sum of the chromatic edge stability number of graph G and its complement $\overline{G}$. Finally, we explore graphs with $es_\chi(G) = 1$. We prove that $es_\chi(G) = 1$ if and only if the chromatic bondage number of G is 1. Moreover, we present several sufficient conditions for the graph G with $es_\chi(G) = 1$.

Keywords: the chromatic edge stability number, chromatic number, bipartite graphs, Cartesian product of graphs, Mycielski graphs, Nordhaus-Gaddum type results, the chromatic bondage number

Math. Subj. Class. (2010): 05C15, 05C35

Kazalo

Uvod

Tema magistrskega dela je pojem s katerim se srečujemo v teoriji grafov, predvsem pri pravilnem barvanju grafov, natančneje barvanju vozlišč grafa. Barvanje grafov se uporablja predvsem pri iskanju rešitev ob omejenem številu virov. Število kromatične stabilnosti povezav je prvi opisal Staton, ki je dokazal tudi zgornje meje za število kromatične stabilnosti povezav grafov. Pojem, ki je predstavljen v magistrskem delu, v veliki meri še ni raziskan, zato obstaja veliko odprtih problemov, ki jih v povezavi s številom kromatične stabilnosti povezav še lahko raziščemo.

Število kromatične stabilnosti povezav, $es_\chi(G)$, je najmanjše število povezav, ki jih odstranimo grafu G, da dobimo graf H, za katerega velja, da je $H \subseteq G$ in, da je $\chi(H) = \chi(G) - 1$. Vezano kromatično število grafa G označimo z $\rho(G)$ in je najmanjše število povezav med katerimakoli barvnima razredoma v χ-barvanju grafa G.

Magistrsko delo je razdeljeno na štiri poglavja. V prvem poglavju so opisani osnovni pojmi teorije grafov. Predstavljeni so grafi Mycielskega M(G) za katere dokažemo, da je $\chi(M(G)) = \chi(G) + 1$. Poleg tega dokažemo, da za graf G brez trikotnikov velja, da $M(G)$ nima trikotnikov. S tem prikažemo, kako lahko konstruiramo grafe z velikim kromatičnim številom in majhnim kličnim številom. Na koncu prvega poglavja vpeljemo še število kromatične stabilnosti povezav grafa G, $es_\chi(G)$, in vezano kromatično število grafa G, $\rho(G)$. Poleg tega dokažemo kako sta omenjeni invarianti med seboj povezani.

V drugem poglavju je opisano število kromatične stabilnosti povezav posebnih družin grafov. Dokažemo, da je za dvodelne grafe $es_\chi(G) = \rho(G) = |E(G)|$. Raziščemo in dokažemo število kromatične stabilnosti povezav za disjunktno unijo grafov. Dokažemo tudi, da je število kromatične stabilnosti in vezano kromatično število ciklov, C_n, enako 1, če je n liho in enako n, če je n sodo število. Nato se osredotočimo na spoj grafov $G \vee H$ in raziskujemo $es_\chi(G \vee H)$. Opišemo tudi $es_\chi(G)$ za razrede grafov, ki jih dobimo s spojem, to so polni grafi, polni večdelni grafi, kolesa in pahljače. Na koncu poglavja obravnavamo število kromatične stabilnosti povezav $es_\chi(G)$ za kartezični produkt grafov $G \square H$.

V tretjem poglavju so opisane zgornje in spodnje meje števila kromatične stabilnosti povezav ter rezultati tipa Nordhaus-Gaddum. Najprej opišemo splošno spodnjo mejo za $es_\chi(G)$ iz katere sledi tudi spodnja meja $es_\chi(G)$ za graf G glede na podgraf H z istim kromatičnim številom, ter spodnja meja $es_\chi(G)$ za grafe, ki vsebujejo s lihih ciklov. Nato opišemo in dokažemo tesno zgornjo mejo za število kromatične stabilnosti povezav grafa. Raziščemo tudi meje za podkubične grafe in dokažemo mejo $es_\chi(G)$ za poljubne grafe v odvisnosti od $\Delta(G), \chi(G)$ in moči množice najmanjšega možnega barvnega razreda. Vpeljemo tudi pojem dvodelne gostote, $b(G)$, za katero obstaja spodnja meja, ki jo uporabimo za izpeljavo zgornje meje za $es_\chi(G)$ podkubičnih grafov. Na koncu poglavja se osredotočimo na rezultate tipa Nordhaus-Gaddum in dokažemo zgornjo mejo za vsoto števila kromatične stabilnosti povezav grafa G in njegovega komplementa $\overline{G}$.

V zadnjem poglavju so opisani grafi s številom kromatične stabilnosti povezav enakim ena. Najprej so predstavljeni splošni rezultati za $es_\chi(G) = 1$. Med drugim dokažemo, da ima vsak graf G z $es_\chi(G) = 1$, tudi vezano kromatično število enako 1. Osredotočimo se tudi na grafe Mycielskega za katere dokažemo, da je $es_\chi(M(G)) = 1$, če je G graf, ki ima v χ-barvanju barvni razred velikosti 1. Na koncu poglavja opišemo k-regularne grafe G za $k \leq 5$, ki imajo število kromatične stabilnosti enako ena. Dokažemo, da je za k-regularne grafe $es_\chi(G) = 1$ natanko tedaj, ko je $G = K_2$, ko je G lihi cikel ali, ko je $\chi(G) > 3$ in $t(G) = 1$.

Poglavje 1

Osnovni pojmi

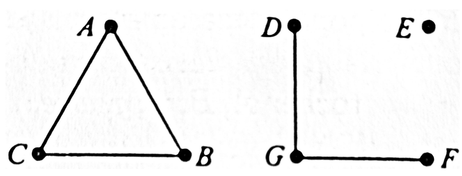
V tem poglavju so predstavljeni osnovni pojmi iz področja teorije grafov, ki so, če ni navedeno drugače, povzeti po virih [14] in [15].

1.1 Graf in podgraf

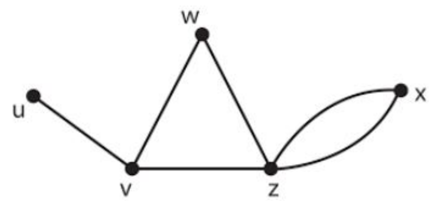
Definicija 1.1 *Graf $G = (V(G), E(G))$ sestavlja neprazna množica elementov, ki jih imenujemo vozlišča grafa, in seznam (neurejenih) parov teh elementov, ki jih imenujemo povezave grafa. Množico vozlišč grafa označimo z $V(G)$, seznam povezav pa z $E(G)$.*

Isti par vozlišč lahko povezujeta dve ali več povezav. Obstaja tudi možnost, da je vozlišče povezano samo s seboj. Dve povezavi ali več povezav, ki povezujejo isti par vozlišč imenujemo večkratne povezave. Povezavo, ki povezuje vozlišče samo s seboj, imenujemo zanka. Graf, ki je brez zank in večkratnih povezav imenujemo enostavni graf.

Definicija 1.2 *Če med poljubnima vozliščema grafa G obstaja pot, potem je povezan, sicer je nepovezan.*



Slika 1.1: Nepovezan enostaven graf



Slika 1.2: Povezan neenostaven graf

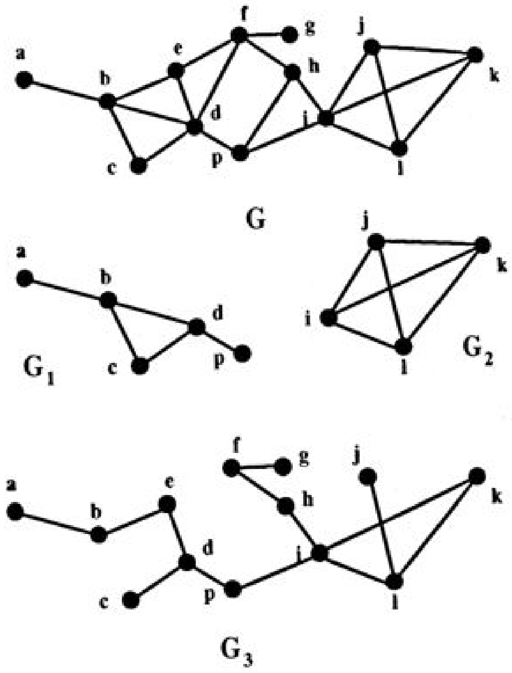
Primer: Na sliki 1.1 je primer nepovezanega enostavnega grafa, na sliki 1.2 pa primer povezanega neenostavnega grafa.

Če sta v in u povezani s povezavo, potem rečemo, da sta sosednji, in označimo kot $uv \in E(G)$. Povezava $e = uv$ gre skozi vozlišči u in v in je incidenčna z vozliščema u in v. Krajišči povezave e, vozlišči u in v sta incidenčni z e, kar pomeni, da ležita na povezavi e.

Definicija 1.3 *Naj bo G graf z množico vozlišč $V(G)$ in množico povezav $E(G)$ in naj bo G' graf z množico vozlišč V' in množico povezav E'. Za graf G' pravimo, da je podgraf grafa G, če je V' podmnožica množice $V(G)$ in če je vsaka povezava iz množice E' tudi v množici povezav grafa G $E(G)$. Vsak podgraf grafa G je spet graf. Vsak graf je podgraf samega sebe.*

Definicija 1.4 *V grafu $G = (V(G), E(G))$ množici $A \subseteq V(G)$ pravimo neodvisna, če za vsak $a, b \in A$ velja $ab \notin E(G)$. Velikosti največje neodvisne množice v grafu pravimo neodvisnostno število grafa in ga označujemo z $\alpha(G)$.*

Graf G' je vpet podgraf grafa G, če je $V(G') = V(G)$. Graf G' je induciran podgraf, če za poljuben par vozlišč $u, v \in V(G')$ velja, $uv \in E(G) \Rightarrow uv \in E(G')$. Če je G' induciran podgraf grafa G, potem pravimo, da je induciran z množico vozlišč $V(G')$. Na sliki 1.3 je G_1 podgraf grafa G, induciran na vozliščih $\{a, b, c, d, p\}$, graf G_2 je podgraf induciran na množici vozlišč $\{i, j, k, l\}$. Graf G_3 pa je vpet podgraf grafa G.



Slika 1.3: Graf G s podgrafi G_1, G_2 in G_3

1.2 Unija, komplement in kartezični produkt

Unija grafov G_1 in G_2 je graf $G = G_1 \cup G_2$ z:

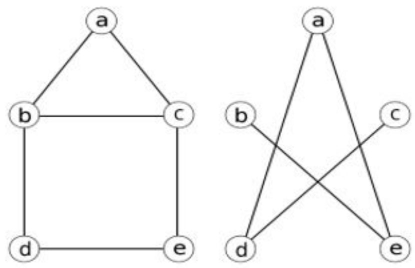
- množico vozlišč $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$; in
- množico povezav $E(G) = V(E_1) \cup V(E_2)$.

Unijo grafov dobimo tako, da naredimo graf, katerega komponente so posamezni grafi. Prazni graf N_n je unija n praznih grafov N_1, kjer je N_1 graf z enim samim vozliščem in brez povezav.

Če je $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$, govorimo o **disjunktni** uniji grafov, ki jo označujemo z $G_1 + G_2$.

Spoj grafov G_1 in G_2 je graf pridobljen iz disjunktne unije grafov G_1 in G_2 tako, da povežemo vsako vozlišče grafa G_1 z vsakim vozliščem grafa G_2. Spoj grafov G_1 in G_2 označimo z $G_1 \vee G_2$.

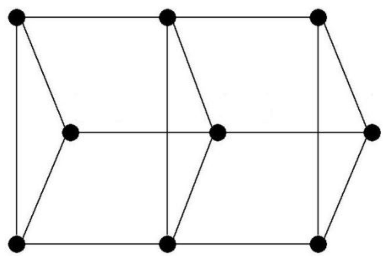
Naj bo G enostaven graf. Grafu $\overline{\mathrm{G}}$ z isto množico vozlišč kot jo ima graf G, v katerem sta dve vozlišči sosednji natanko tedaj, ko nista sosednji v grafu G, pravimo **komplement** grafa G. Na sliki 1.4 je narisan primer grafa G in njegovega komplementa.



Slika 1.4: Graf G in komplement grafa $\bar{G}$

Kartezični produkt grafov $G_1 = (V_1, E_1)$ in $G_2 = (V_2, E_2)$ je graf $G = G_1 \Box G_2$, ki ima množico vozlišč $V(G) = V_1 \times V_2$, sosednost pa je določena s predpisom
$(u_1, v_1)(u_2, v_2) \in E(G) \Leftrightarrow (u_1u_2 \in E(G_1) \wedge\ v_1 = v_2) \vee (u_1 = u_2 \wedge v_1v_2 \in E(G_2))$.

Kartezični produkt grafov G_1 in G_2 ima $|V_1| \cdot |V_2|$ vozlišč in $|V_1| \cdot |E_2| + |V_2| \cdot |E_1|$ povezav. Primer standardne družine, konstruirane s pomočjo kartezičnega produkta so hiperkocke. Na sliki 1.5 je narisan primer kartezičnega produkta, in sicer kartezični produkt grafov P_3 in K_3.

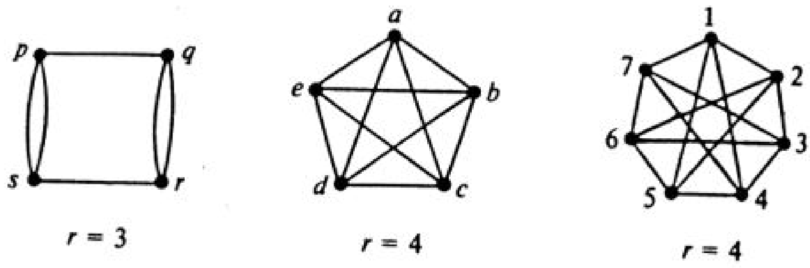


Slika 1.5: Kartezični produkt grafa $G = P_3 \Box K_3$.

1.3 Stopnja vozlišč

Naj bo G graf brez zank in v vozlišče grafa G. Število povezav, ki so incidenčne z vozliščem v, imenujemo stopnja vozlišča v. Stopnjo vozlišča označimo z $deg(v)$. Največjo stopnjo vozlišča grafa G označimo z $\Delta(G)$, najmanjšo stopnjo vozlišča pa z $\delta(G)$.
Največja stopnja grafa je $\Delta(G) = max_{v \in V(G)}\ \{deg(v)\}$.
Najmanjša stopnja grafa je $\delta(G) = min_{v \in V(G)}\ \{deg(v)\}$.

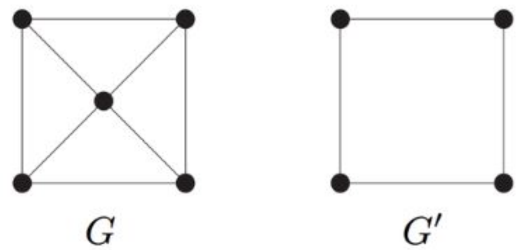
Če imajo vsa vozlišča grafa G enako stopnjo, potem je ta graf regularen. Če imajo vsa vozlišča grafa stopnjo r, rečemo, da je graf regularen stopnje r ali r-regularen.



Slika 1.6: Regularni grafi.

Na sliki 1.6 je nekaj primerov regularnih grafov. Prvi graf je 3-regularen, drugi in tretji sta 4-regularna grafa.

Primer: Na sliki 1.7 sta graf G in njegov podgraf G', ker je $V(G') \subseteq V(G)$ in $E(G') \subseteq E(G)$. V grafu G je $\Delta(G) = 4$ in v podgrafu G' je $\Delta(G') = 2$. V grafu G je $\delta(G) = 3$ in v podgrafu G' je $\delta(G') = 2$. V podgrafu G' je $\Delta(G') = \delta(G')$, zato je G' 2-regularen graf.



Slika 1.7: Graf G in podgraf G'

Graf G' na sliki 1.7 je regularen stopnje 2 in ima štiri vozlišča, vsota vseh stopenj vozlišč je enaka 8. S slike je razvidno, da ima graf G' štiri povezave. Torej je vsota stopenj vozlišč enaka dvakratniku števila povezav.

Lema 1.5 *Lema o rokovanju: Za poljuben graf G velja:* $\sum_{v \in V(G)} deg(v) = 2\,|E(G)|$

Dokaz. Vsaka povezava ima dve krajišči, zato k vsoti stopenj grafa prispeva natanko 2. □

Posledica 1.6 *Posledice leme o rokovanju:*

– *V vsakem grafu je vsota vseh stopenj vozlišč grafa sodo število.*

– *V vsakem grafu je število vozlišč lihe stopnje sodo.*

– *Če ima graf G n vozlišč in je regularen stopnje r, ima G natanko $\frac{1}{2}nr$ povezav.*

1.4 Barvanje grafov

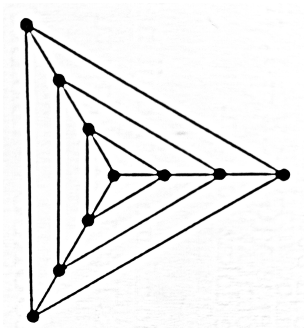
1.4.1 Barvanja vozlišč

Definicija 1.7 *Naj bo G graf brez zank. Dobro k-barvanje grafa G je dodelitev k barv vozliščem grafa G, tako, da sosednja vozlišča dobijo različne barve. Če ima graf G dobro k-barvanje, rečemo, da je k-pobarvljiv. Kromatično število ali barvnost grafa G, $\chi(G)$, je najmanjše število k, za katero je G k-pobarvljiv. Dobremu barvanju vozlišč grafa G s $\chi(G)$ barvami, pravimo χ-barvanje grafa G.*

Naj bo $c : V(G) \to \{c_1, \ldots, c_{\chi(G)}\}$ χ-barvanje grafa G. Potem za vsak $i \in \{1, \ldots, \chi(G)\}$ s C_i označimo množico vseh vozlišč grafa G, ki z barvanjem c dobijo barvo c_i.

Definicija 1.7 velja samo za grafe brez zank, saj krajišči nobene zanke ne moreta biti različnih barv. Predpostavimo lahko tudi, da v grafu ni večkratnih povezav, saj že ena povezava zadošča, da morata biti krajišči pobarvani različno in ostale povezave ne vplivajo več na barvanje. Zato se od tu naprej, če ne bo navedeno drugače, omejimo samo na enostavne grafe.

Ena izmed metod za določitev spodnje meje za kromatično število $\chi(G)$ je, da poiščemo največji poln podgraf grafa G. Graf na sliki 1.8 vsebuje podgraf K_4, zato je $\chi(G) \geq 4$.



Slika 1.8: Primer grafa G, ki vsebuje K_4.

Zgornja meja za kromatično število $\chi(G)$ grafa z n vozlišči je $\chi(G) \leq n$. Vendar je ta meja slabo določena. Izboljšamo jo lahko, če poznamo največjo stopnjo grafa G.

Izrek 1.8 *Naj bo G enostaven graf in d največja stopnja grafa G. Tedaj velja, da je $\chi(G) \leq d + 1$.*

Dokaz. Izrek dokažemo z matematično indukcijo po številu vozlišč n grafa G. Za $n = 1$ dobimo graf K_1, za katerega velja $\chi(K_1) = 1$ in $d = 0$, zato trditev velja.

Recimo, da trditev velja za vse grafe z manj kot n vozlišči. Naj bo G graf z n vozlišči in največjo stopnjo vozlišča d, H naj bo graf, ki ga dobimo iz G tako, da odstranimo poljubno vozlišče v in vse povezave s krajiščem v v. Ker ima H manj kot n vozlišč in največjo stopnjo vozlišča d (ali manj), po indukcijski predpostavki velja $\chi(H) \leq d+1$, torej je graf H $(d+1)$-pobarvljiv. Dobro $(d+1)$ barvanje grafa G lahko dobimo tako, da vozlišču v dodelimo tisto od $d+1$ barv, s katero ni pobarvano nobeno od sosednjih vozlišč vozlišča v (ki jih je največ d). Torej je $\chi(G) \leq d+1$, zato trditev velja tudi za grafe z n vozlišči. □

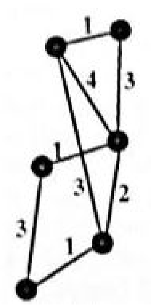
Posledica 1.9 *V enostavnem grafu G velja: $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$.*

1.4.2 Barvanja povezav

Definicija 1.10 *Dobro k-barvanje povezav grafa G je dodelitev k barv povezavam grafa G, tako da noben par povezav s skupnim krajiščem ni pobarvan z isto barvo. Če ima graf G dobro k-barvanje povezav, potem rečemo, da je po povezavah k-pobarvljiv. Najmanjše število k, za katerega obstaja dobro k-barvanje povezav grafa G, imenujemo kromatični indeks grafa G in ga označimo z $\chi'(G)$.*

Očitno je, da je $\Delta(G)$ potrebno število barv za barvanje povezav grafa G. Bistveno bolj presenetljiv pa je rezultat Vizinga iz leta 1964, ki pove, da je je zgornja meja kromatičnega indeksa grafa G le za ena večja od spodnje meje.

Izrek 1.11 *Naj bo G graf z največjo stopnjo $\Delta(G)$. Potem velja: $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1$.*



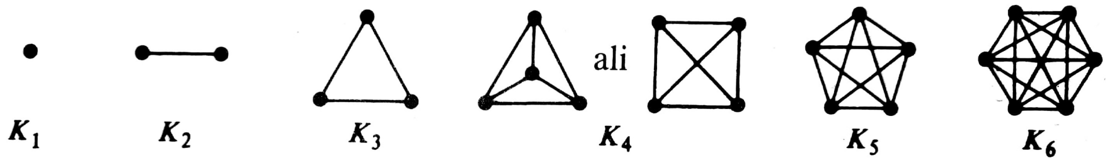
Slika 1.9: Graf s kromatičnim indeksom 4.

Grafom, katerih kromatični indeks je enak maksimalni stopnji grafa, pravimo da so tipa 1 ali da pripadajo razredu 1. Ostalim grafom pravimo, da so tipa 2 oz. da pripadajo razredu 2. Na sliki 1.9 je primer grafa G tipa 1. Povezave grafa G znamo pobarvati z $\Delta(G) = 4$ barvami, zato je $\chi'(G) \leq 4$. Ker je $\Delta(G)$ spodnja meja za kromatični indeks grafa G, sledi da je $\chi'(G) = \Delta(G) = 4$.

1.5 Družine grafov

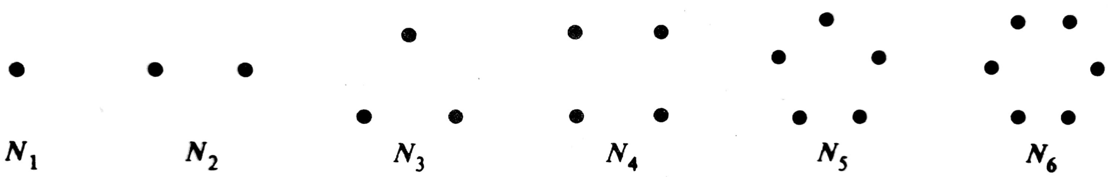
Polni in prazni grafi

Poln graf je graf, v katerem je vsak par različnih vozlišč povezan z natanko eno povezavo. Poln graf na n vozliščih označimo s K_n. Graf K_n je regularen stopnje $n-1$, zato ima po tretji posledici leme o rokovanju $\frac{1}{2}n(n-1)$ povezav.



Slika 1.10: Primeri polnih grafov.

Prazni graf je graf brez povezav. Prazne grafe na n vozliščih označimo z N_n. Prazni graf N_n je regularen stopnje 0.



Slika 1.11: Primeri praznih grafov.

Poti in cikli

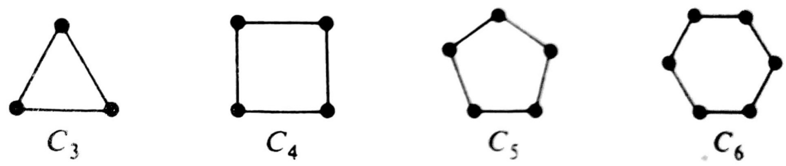
Sprehod dolžine k v grafu G je zaporedje k povezav grafa G oblike $u_0u_1, u_1u_2, u_2u_3, \ldots, u_{k-1}u_k$. Tak sprehod označimo z $u_0u_1u_2\ldots u_{k-1}u_k$ in ga poimenujemo sprehod med vozliščema u_0 in u_k. Ker povezave niso usmerjene lahko tak sprehod označimo tudi z $u_ku_{k-1}\ldots u_2u_1u_0$ in mu rečemo sprehod med u_k in u_0.

Definicija 1.12 *Če so vse povezave sprehoda različne, potem sprehod imenujemo enostavni sprehod ali sled. Če so v enostavnem sprehodu vsa vozlišča različna, potem sprehod imenujemo pot.*

Definicija 1.13 *Sklenjeni sprehod ali obhod v grafu G je zaporadje povezav grafa G oblike:* $u_0u_1, u_1u_2, u_2u_3, \ldots, u_{k-1}u_k, u_ku_0$.

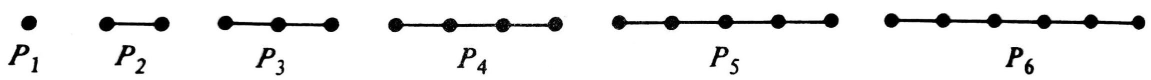
Če so vse povezave obhoda različne, potem ga imenujemo enostavni obhod. Če so v obhodu vse povezave in vsa vozlišča različne potem ga imenujemo cikel.

Za $n \geq 3$, cikel na n vozliščih označino s C_n. Graf C_n je regularen stopnje 2 in ima n povezav. Vozlišča C_n običajno označimo z $V(C_n) = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$. Povežemo zaporedna vozlišča in $n-1$ z 0.



Slika 1.12: Primeri ciklov.

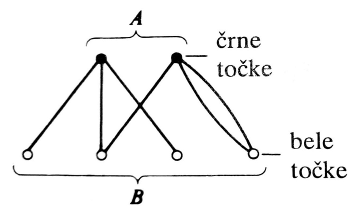
Pot na n vozliščih označimo s P_n. Graf P_n ima $n-1$ povezav in ga lahko dobimo iz cikla C_n z odstranitvijo katerekoli povezave.



Slika 1.13: Primeri poti.

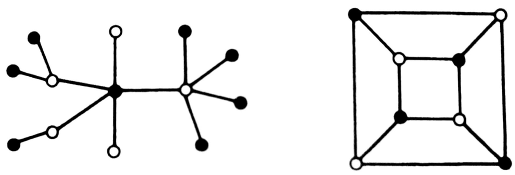
Dvodelni grafi

Graf G je dvodelen, če obstaja tako razbitje množic vozlišč $V(G) = A \cup B$, da ima vsaka povezava grafa G eno krajišče v A in drugo v B.



Slika 1.14: Razdelitev in obarvanje vozlišč.

Kot kaže slika 1.14 lahko vozlišča podmnožic A in B razločimo na primer tako, da pobarvamo prve s črno, druge pa z belo barvo. Vsaka povezava povezuje eno belo in eno črno vozlišče.



Slika 1.15: Primera dvodelnih grafov.

Slika 1.15 prikazuje primera dvodelnih grafov. Graf na levi strani prikazuje graf iz družine dreves. Graf na desni strani pa prikazuje graf iz družine kock. Za drevesa in kocke je značilno, da so dvodelni grafi.

Opomba 1.14 *Naj bo $G = (V, E)$ dvedelen graf z dvodelnim razbitjem $V = X + Y$. Potem je $|E(G)| = \sum_{v \in X} deg(v) = \sum_{v \in Y} deg(v)$.*

Posledica 1.15 *Naj bo $G = (V, E)$ k-regularen dvodelen graf z dvodelnim razbitjem $V = X + Y$. Potem je $|E(G)| = k|X| = k|Y|$ in $|X| = |Y|$.*

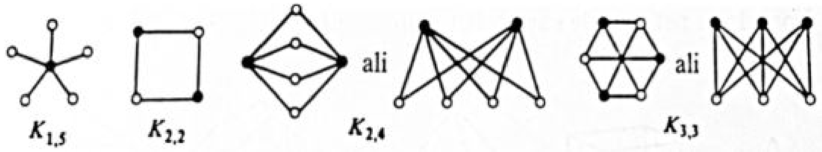
Izrek 1.16 *[13] Dvodelni grafi ne vsebujejo lihih ciklov.*

Dokaz. Naj bo G dvodelen ter X in Y dvodelno razbitje vozlišč grafa G. Predpostavimo, da G vsebuje lihi cikel, potem je $C = v_0 v_1 \cdots v_{2k+1} v_0$. Brez izgube za splošnost naj množica X vsebuje vozlišče v_0, vozlišče v_1 je zato zagotovo v množici Y. Vozlišči v_0 in v_1 pa sta povezani s povezavo e_1. Podobno povezava $e_{2k+1} = v_{2k} v_{2k+1}$ povezuje eno vozlišče iz X in eno vozlišče iz Y za vsa števila $n \in \mathbb{N}$. Ker je $e_{2k+1} = v_{2k+1} v_0$, je $v_{2k+1} \in X$ in je $v_0 \in Y$, kar je protislovje, saj vemo, da je $v_0 \in X$. □

Izrek 1.17 *[13] Če je G dvodelen graf z vsaj eno povezavo, potem je $\chi(G) = 2$.*

Dokaz. Naj bo G dvodelen graf z vsaj eno povezavo. Množico vozlišč razbijemo na množici X in Y. Vozlišča množice X predstavljajo eno barvo, vozlišča množice Y pa drugo, kar pomeni, da je graf pravilno pobarvan z dvema barvama. Zato velja, da je 2-pobarvljiv. Dokazati še moramo, da G ni 1-pobarvljiv. Predpostavimo nasprotno, da graf G je 1-pobarvljiv. Potem so vsa vozlišča v G pobarvana z enako barvo, ker izrek pravi, da G vsebuje vsaj eno povezavo sledi, da barvanje grafa z eno barvo ni pravilno, saj sta sosednji vozlišči pobarvani z enako barvo. □

Polni dvodelni graf je dvodelni graf, v katerem je vsako črno vozlišče povezano z vsakim belim vozliščem z natanko eno povezavo. Polni dvodelni graf z r črnimi vozlišči in s s belimi vozlišči označimo s $K_{r,s}$. Na sliki 1.16 je nekaj primerov polnih dvodelnih grafov.



Slika 1.16: Primera dvodelnih grafov.

Graf $K_{r,s}$ ima $r+s$ vozlišč (r vozlišč stopnje s in s vozlišč stopnje r) in rs povezav. Vedno velja $K_{r,s} = K_{s,r}$.

Kocke

So grafi, ki spadajo med dvodelne grafe. Kocko dobimo tako, da vzamemo za vozlišča vse besede nad abecedo $0, 1$ dane dolžine in povežemo dve besedi, če se besedi razlikujeta na natanko enem mestu. Tako dobljeni graf iz besed dolžine k imenujemo k-kocka ali k-dimenzionalna kocka in ga označimo s Q_k.

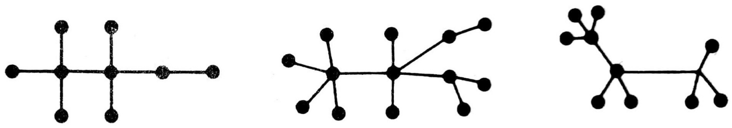
Graf Q_k ima 2^k vozlišč in je k-regularen. Zaradi tretje posledice leme o rokovanju velja, da ima $k \cdot 2^{k-1}$ povezav.

Drevesa

Drevo je povezan graf brez ciklov.

Izrek 1.18 *Naj bo T graf z n vozlišči. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

- *Graf T je povezan in brez ciklov.*
- *Graf T je povezan in ima $(n-1)$ povezav.*
- *Graf T ima $(n-1)$ povezav in nobenega cikla.*
- *Graf T je povezan in vsaka povezava je most.*
- *Vsak par vozlišč grafa T je povezan z natanko eno potjo.*
- *V grafu T ni nobenega cikla; če dodamo katerokoli povezavo, dobimo natanko en cikel.*

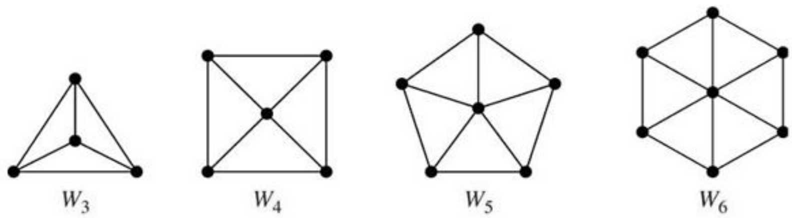


Slika 1.17: Primeri dreves.

Če je G poljuben povezan graf, imenujemo podgraf grafa G, ki vsebuje vsa vozlišča grafa G in je drevo, vpeto drevo grafa G. Število vpetih dreves grafa je lahko zelo veliko. Na sliki 1.17 je narisanih nekaj primerov dreves.

Kolesa

Kolesa, ki jih označimo z W_n, so grafi na $(n+1)$ vozliščih, ki jih dobimo iz cikla na n vozliščih tako, da le-temu dodamo novo vozlišče in ga povežemo z vsemi vozlišči cikla.

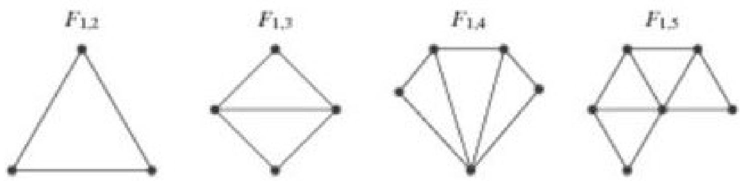


Slika 1.18: Primeri koles.

Kolo W_n lahko definiramo tudi kot spoj grafov K_1 in C_n, to je $W_n = K_1 \vee C_n$.

Pahljače

Pahljače $F_{m,n}$ so spoji grafov $\overline{\mathrm{K}}_m \vee P_n$, pri čemer je $\overline{\mathrm{K}}_m$ prazen graf z m vozlišči in P_n pot na n vozliščih.



Slika 1.19: Primeri pahljač.

1.6 Grafi Mycielskega

Grafi Mycielskega so posebna družina grafov, v kateri imajo grafi zanimive lastnosti pri barvanju vozlišč in povezav. Poljubnemu grafu G lahko priredimo njegov graf Mycielskega, ki ga označimo z $M(G)$. Kako grafe $M(G)$ konstruiramo je zapisano v nadaljevanju.

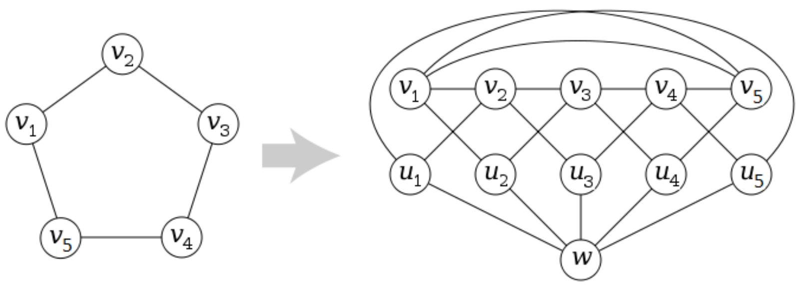
Definicija 1.19 *[3] Naj bo G graf z vozlišči $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ in povezavami $E(G)$. Za graf Mycielskega $M(G)$ grafa G velja:*

- $V(M(G)) = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \cup \{u_1, u_2, ..., u_n\} \cup \{w\}$
- $E(M(G)) = E(G) \cup \{v_i u_j : v_i v_j \in E(G)\} \cup \{u_i w : 1 \leq i \leq n\}.$

Primer: Naj bo G graf z vozlišči $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ in povezavami $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_5, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5\}$. Potem je graf Mycielskega $M(G)$ grafa G določen z množicama:

- $V(M(G)) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \cup \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\} \cup \{w\}$
- $E(M(G)) = E(G) \cup \{v_1u_2, v_1u_5, ..., v_4u_5\} \cup \{u_i w : 1 \leq i \leq 5\}.$

Grafa G in $M(G)$ sta narisana na sliki 1.20.



Slika 1.20: Graf G in njegov graf Mycielskega $M(G)$.

Grafi Mycielskega so bili konstruirani z namenom iskanja grafov, ki imajo poljubno visoko kromatično število, ne vsebujejo pa nobenih trikotnikov, to pomeni, da ne vsebujejo ciklov dolžine tri.

Izrek 1.20 *[3] Naj bo G graf brez trikotnikov s kromatičnim številom k. Potem je tudi njegov graf Mycielskega $M(G)$ brez trikotnikov, njegovo kromatično število pa je $k + 1$.*

Dokaz. Naj bo G graf brez trikotnikov z vozlišči $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ in povezavami $E(G)$. Kromatično število grafa G naj bo $\chi(G) = k$. Za graf Mycielskega $M(G)$ grafa G velja:

– $V(M(G)) = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \cup \{u_1, u_2, ..., u_n\} \cup \{w\}$

– $E(M(G)) = E(G) \cup \{v_i u_j : v_i v_j \in E(G)\} \cup \{u_i w : 1 \leq i \leq n\}$.

Najprej je potrebno dokazati, da tudi graf Mycielskega $M(G)$ ne vsebuje trikotnikov. V grafu $M(G)$ ne obstaja trikotnik iz množice vozlišč $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, saj bi drugače tudi v grafu G obstajal trikotnik z vozlišči iz te množice. Med vozlišči u_i ni povezav, zato ne more obstajati tak trikotnik, ki bi iz množice $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ vseboval več kot eno vozlišče. Prav tako pa vozlišče w ni del trikotnika, saj je povezano z vozlišči iz množice $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$, ki pa med saboj niso povezana.

Vozlišča trikotnika bi v grafu $M(G)$ lahko sestavljalo eno vozlišče u_i in dve vozlišči v_j in v_k, pri čemer $j \neq k$. Med vozliščema u_i in v_i ni povezave, zato lahko predpostavimo, da velja $j \neq i$ in $i \neq k$. Če trikotnik s takimi vozlišči v $M(G)$ obstaja, potem so v množici povezav $E(M(G))$ tudi povezave $u_i v_j, u_i v_k$ in $v_j v_k$. Zaradi definicije o konstrukciji grafov Mycielskega sledi, da graf G vsebuje tudi povezavi $v_i v_j$ in $v_i v_k$. Vozlišča v_i, v_j in v_k v grafu G tvorijo trikotnik, kar pa je v nasprotju s tem, da graf G ne vsebuje trikotnikov. Zato tudi trikotnik z oglišči u_i, v_j in v_k v grafu Mycielskega $M(G)$ ne obstaja, torej graf $M(G)$ ne vsebuje trikotnikov.

Sedaj je potrebo dokazati še, da je kromatično število grafa Mycielskega $\chi(M(G)) = k + 1$.

$\chi(G) = k$, zato obstaja dobro k-barvanje $f : V(G) \mapsto C$, kjer je C množica barv $\{c_1, c_2, ..., c_k\}$. Naj bo $\widetilde{C} = C \cup \{c_{k+1}\}$ in naj bo preslikava $\widetilde{f} : V(M(G)) \mapsto \widetilde{C}$, $(k+1)$-barvanja definirana takole:

– $\widetilde{f}(v_i) = f(v_i)$ za $i \in \{1, 2, ..., n\}$;

– $\widetilde{f}(u_i) = f(v_i)$ za $i \in \{1, 2, ..., n\}$;

– $\widetilde{f}(w) = c_{k+1}$.

Preveriti moramo, da je $\widetilde{f}$ dobro $(k + 1)$-barvanje grafa $M(G)$. Ker je f dobro barvanje grafa G, imata sosednji vozlišči v_i, v_j, $i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$ različni barvi. Vozlišče u_i je povezano z istimi vozlišči v_j, s katerimi je povezano vozlišče v_i. Ker velja $\widetilde{f}(v_i) = \widetilde{f}(u_i)$, je barva vozlišča u_i različna od barv vseh njegovih sosedov v_j. Ker povezav med vozlišči $u_1, u_2, ..., u_n$ ni, preverimo le še barvanje vozlišča w. To vozlišče je obarvano z barvo c_{k+1}, ki je različna od vseh ostalih barv vozlišč. Zato velja, da je $(k+1)$-barvanje res dobro, zato je $\chi(M(G)) \leq k+1$.

Na koncu želimo dokazati še enakost $\chi(M(G)) = k+1$. Dokazati je potrebno, da za vsako dobro l-barvanje grafa $M(G)$ obstaja dobro $(l-1)$-barvanje grafa G. Če bi to veljalo, potem bi veljalo tudi, da iz $\chi(M(G)) < k+1$ sledi, da je $\chi(G) < k$, kar pa je v nasprotju z dejstvom, da je $\chi(G) = k$. S tem bomo dokazali, da je $\chi(M(G)) \geq k+1$.

Naj bo $g : V(M(G)) \mapsto D$ dobro l-barvanje grafa $M(G)$, kjer je $D = \{d_1, d_2, ...d_l\}$ množica barv in konstruirajmo dobro $(l-1)$-barvanje grafa G. Brez izgube za splošnost privzamemo, da je $g(w) = d_l$. Zato so barve vozlišč $u_1, u_2, ..., u_n$ omejene na množico $\{d_1, d_2, ..., d_{l-1}\}$, saj je vozlišče w povezano z vsemi vozlišči u_i za $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Z vsemi barvami iz množice D so lahko pobarvana vozlišča iz množice $V(G)$. Naj bo X množica tistih vozlišč $v_i \in V(G)$, za katere je $g(v_i) = d_l$ in naj bo $\widetilde{D} = D \backslash \{d_l\}$. Definirajmo $(l-1)$-barvanje $\widetilde{g} : V(G) \mapsto \widetilde{D}$ tako, da za $i \in \{1, 2, ..., n\}$ velja:

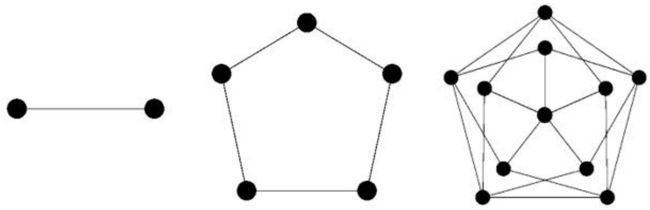
$$\widetilde{g}(v_i) = \begin{cases} g(v_i); & \text{če je } v_i \in V(G) \setminus X \\ g(u_i); & \text{če je } v_i \in X. \end{cases}$$

Dokazati moramo, da je $\widetilde{g}$ dobro $(l-1)$-barvanje grafa G. Ker je g dobro l-barvanje grafa $M(G)$, moramo preveriti le, da se pri zamenjavi barv iz $V(G)$ ohranja pravilnost barvanja med vozlišči iz množice X. Vozlišča v množici X med sabo niso povezana, zato je dovolj preveriti, da sta za vsako povezavo v_iv_j, kjer $v_i \in X$ in $v_j \in V(G) \backslash X$, vozlišči v_i in v_j različno pobarvani. Vozlišče v_j je v grafu $M(G)$ povezano z vozliščem u_i, zato je $g(v_j) \neq g(u_i)$, kar pomeni, da velja $\widetilde{g}(v_j) = g(v_j) \neq g(u_i) = \widetilde{g}(v_i)$.

Zaradi tega sta v_i in v_j pobarvani z različnima barvama, torej je $\widetilde{g}$ dobro $(l-1)$-barvanje grafa G. Tako smo dokazali, da velja $\chi(M(G)) = k+1$. □

Za poljuben graf G, ki ne vsebuje nobenega trikotnika in je njegovo kromatično število $\chi(G) = l$, velja, da lahko konstruiramo graf Mycielskega $M(G)$. Zaradi izreka 1.20 velja, da tudi graf Mycielskega ne vsebuje trikotnika, njegovo kromatično število pa je za eno večje od kromatičnega števila grafa G. Če bi iz grafa $M(G)$ konstruirali še en graf Mycielskega, potem bi bil ta graf ponovno brez trikotnikov, njegovo kromatično število pa $\chi(M(M(G)) = l+2$. Tako lahko z zaporedno konstrukcijo grafov Mycielskega dobimo grafe s poljubno velikim kromatičnim številom, ki ne vsebujejo nobenega trikotnika.

Primer: Na sliki 1.21 na levi je polni graf na dveh vozliščih K_2, ki ne vsebuje nobenega trikotnika, s kromatičnim številom $\chi(K_2) = 2$. Poleg grafa K_2 sta na sliki še grafa, ki ju dobimo iz K_2, če dvakrat zaporedoma izvedemo konstrukcijo Mycielskega. S prvo konstrukcijo dobimo cikel C_5, ki ne vsebuje nobenega triktonika, njegovo kromatično število je tri. Graf $M(C_5)$ na desni na sliki 1.21, prav tako ne vsebuje ciklov dolžine tri. Njegovo kromatično število pa je $\chi(M(C_5)) = 4$.

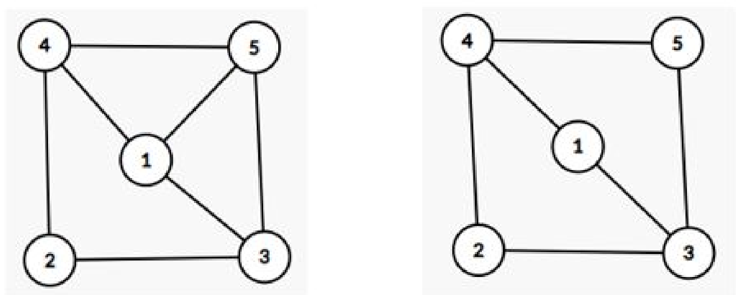


Slika 1.21: Graf K_2, cikel $C_5 = M(K_2)$ in $M(C_5) = M(M(K_2))$.

1.7 Število kromatične stabilnosti povezav

Definicija 1.21 *[12] Naj bo G neprazen graf. Število kromatične stabilnosti povezav, $es_\chi(G)$, je definirano kot najmanjše število povezav, ki jih odstranimo grafu G, da dobimo graf H, za katerega velja, da je $H \subseteq G$ in, da je $\chi(H) = \chi(G) - 1$. Če je graf G prazen (množica povezav $E(G) = \emptyset$), potem je $es_\chi(G) = 0$.*

Definicija 1.22 *Naj bo $G = (V, E)$ neprazen graf in $E' \subseteq E$ množica povezav za katero velja $\chi(G - E) = \chi(G) - 1$. Potem množici E' pravimo ublažitvena množica.*



Slika 1.22: Graf G in njegov podgraf H.

Primer: Na sliki 1.22 na levi je graf G s kromatičnim številom $\chi(G) = 3$. Poiskati moramo tak podgraf H, za katerega velja, da je njegovo kromatično število za ena manjše, zato odstranimo najmanjše število povezav, da dobimo tak podgraf H. Če odstranimo povezavo med vozliščema v_1 in v_5, dobimo podgraf H na sliki, katerega kromatično število je $\chi(H) = 2$. Za graf G in podgraf H na sliki velja, da je $\chi(H) = \chi(G) - 1$. Tako velja, da je število kromatične stabilnosti povezav $es_\chi(G) = 1$, saj smo odstranili eno povezavo, da smo dobili podgraf H.

Število kromatične stabilnosti povezav ima številne lepe lastnosti, ki jih bomo predstavili v nadaljevanju. Vendar moramo za predstavitev teh lastnosti najprej definirati vezano kromatično število v grafu.

Definicija 1.23 *[12] Naj bo G neprazen graf. Najmanjše število povezav med katerimakoli barvnima razredoma v χ-barvanju grafa G imenujemo vezano kromatično število grafa G in označimo z $\rho(G)$. Če je graf G prazen, potem je $\rho(G) = 0$.*

Slika 1.23: Graf G in njegov podgraf H.

Primer: Na sliki 1.23 je primer grafa G in njegov podgraf H. Kromatično število grafa G je tri, medtem, ko je kromatično število grafa H enako dve. Podgraf H smo dobili tako, da smo grafu G odstranili dve povezavi, tako, da velja $\chi(H) = \chi(G) - 1$. Ker se z odstranitvijo ene povezave grafa G, kromatični število ne zmanjša, je število kromatične stabilnosti povezav enako $es_\chi(G) = 2$. Grafu G lahko določimo tudi vezano kromatično število, ki je najmanjše število povezav med katerimakoli barvnima razredoma v χ-barvanju grafa G. Vezano kromatično število grafa G, ki ga označimo z $\rho(G)$ je enako tri ($\rho(G) = 3$), saj je število povezav med dvema barvnima razredoma (sivim in rumenim) enako tri.

Za poljuben graf G s $t(G)$ označujemo moč množice najmanjšega barvnega razreda med vsemi χ-barvanji grafa G.

Lema 1.24 *[12] Za neprazen graf G velja: $1 \leq es_\chi(G) \leq \rho(G)$.*

Dokaz. Naj bo $\rho(G) = k$ in naj bo $c : V(G) \to \{1, \ldots, \chi(G)\}$ tako dobro barvanje vozlišč grafa G, za katero obstaja množica povezav E' med dvema barvnima razredoma moči $\rho(G)$. Ker lahko vozlišča obeh omenjenih barvnih razredov v grafu $G - E'$ pobarvamo z eno barvo, je $\chi(G - E') < \chi(G)$. Zato je $es_\chi(G) \leq |E'| = \rho(G)$. □

V nadaljevanju bomo opisali nekaj splošnih rezultatov za število kromatične stabilnosti povezav in za vezano kromatično število. Opisali bomo tudi nekaj posledic, ki jih lahko izpeljemo iz teh rezultatov.

Izrek 1.25 *Naj ima graf G vozlišče v incidenčno z $es_\chi(G)$ povezavami E' in naj bo E' ublažitvena množica grafa G. Potem velja, da je $es_\chi(G) = \rho(G)$.*

Dokaz. Naj bo v vozlišče grafa G, ki je incidenčno z $es_\chi(G)$ povezavami E', ki tvorijo ublažitveno množico grafa G. Potem velja, da ima graf $H = G - E'$ kromatično število za ena manjše od kromatičnega števila grafa G. S c označimo dobro barvanje grafa H s $(\chi(G) - 1)$ barvami $c_1, c_2, \ldots, c_{\chi(G)-1}$ in naj velja, da $c(v) = c_1$. Kar pomeni, da vozlišče v ni sosednje s katerim koli vozliščem barve c_1 v grafu H.

V nadaljevanju dokaza se osredotočimo še na graf G. Barvanje $\overline{c}$ grafa G definirajmo takole: $\overline{c}(v) = c_{\chi(G)}$ in $\overline{c}(w) = c(w)$, za vsak $w \in V(G) \setminus \{v\}$. Barvanje $\overline{c}$ je očitno dobro barvanje grafa G s $\chi(G)$ barvami. Vozlišče v je v enoelementnem barvnem razredu $C_{\chi(G)}$, hkrati pa mora biti sosednje z nekaterimi vozlišči barve c_1 grafa G. V nasprotnem primeru bi bilo barvanje c $(\chi(G) - 1)$-barvanje grafa G, kar pa je protislovje. Ker je število povezav med razredoma $C_{\chi(G)}$ in C_1 ravno število sosedov od v, ki so z barvanjem c pobarvana z barvo c_1, kar je največ $|E'| = es_\chi(G)$, je $\rho(G) \leq es_\chi(G)$. Dokaz druge neenakosti sledi iz leme 1.24. $\square$

Posledica 1.26 *Če v grafu G obstaja vozlišče v incidenčno z $es_\chi(G)$ povezavami E', ki tvorijo ublažitveno množico, potem obstaja χ-barvanje grafa G z vozliščem v, ki je v barvnem razredu z enim samim elementom.*

Izrek 1.27 *[12] V grafu G velja, da je $es_\chi(G) = \rho(G)$ natanko tedaj, ko je graf G prazen ali pa obstaja tako χ-barvanje grafa G, da je število povezav med nekim parom barvnih razredov enako $es_\chi(G)$.*

Dokaz. Iz definicij števila kromatične stabilnosti povezav in vezanega kromatičnega števila sledi, da $es_\chi(G) = \rho(G) = 0$, če in samo če je graf G prazen, zato predpostavimo, da graf G ni prazen. Če je $es_\chi(G) = \rho(G)$, potem obstaja takšno χ-barvanje grafa G, da je število povezav med nekim parom barvnih razredov enako $\rho(G)$ in tudi enako $es_\chi(G)$. Za dokaz druge implikacije, naj obstaja takšno χ-barvanje grafa G, da je število povezav med nekim parom barvnih razredov enako $es_\chi(G)$. Torej je $\rho(G) \leq es_\chi(G)$. Druga neenakost sledi iz leme 1.24. $\square$

Poglavje 2

Število kromatične stabilnosti povezav posebnih družin grafov

V tem poglavju bomo predstavili število kromatične stabilnosti povezav za posebne družine grafov. Če ni navedeno drugače je zapisano povzeto po viru [12].

2.1 Dvodelni grafi

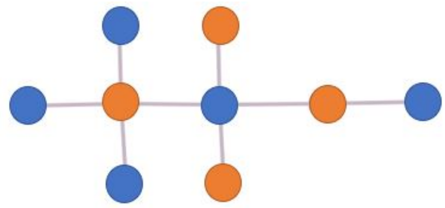
Trditev 2.1 *Naj bo G dvodelen, neprazen graf. Potem je $es_\chi(G) = \rho(G) = |E(G)|$.*

Dokaz. Ker je kromatično število dvodelnega grafa G enako 2, vsaka ublažitvena množica grafa G vsebuje vse povezave, saj so edini grafi s kromatičnim številom 1, grafi brez povezav. Torej v vsakem dvodelenem grafu velja $es_\chi(G) = |E(G)|$.

Ker je vsaka povezava grafa, povezava med edinima barvnima razredoma dobrega barvanja grafa G s $\chi(G) = 2$ barvami, je $\rho(G) = |E(G)|$. □

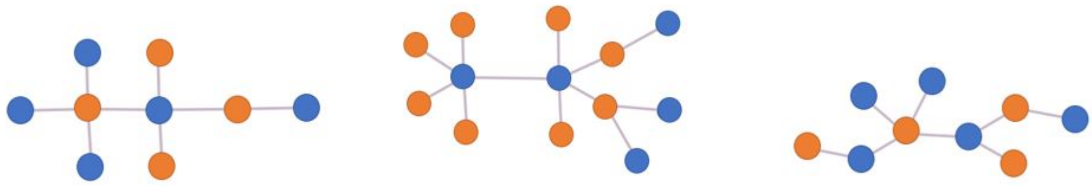
Graf G, ki ne vsebuje nobenega cikla, imenujemo gozd. Če je G povezan gozd, ga imenujemo drevo. Zato iz izreka 1.16 sledi, da so drevesa dvodelni grafi. Kromatično število dreves je zato $\chi(G) = 2$. Barvanje vozlišč drevesa je prikazano na sliki 2.1.

Drevesa z n vozlišči množice $V(G)$ imajo $|V(G)| - 1$ povezav. Število kromatične stabilnosti povezav drevesa je enako številu povezav, saj so drevesa dvodelni grafi in zaradi trditve 2.1 velja, da je $es_\chi(G) = |E(G)|$.



Slika 2.1: Barvanje vozlišč grafa G, ki je drevo.

Primer: Na sliki 2.2 so trije primeri grafov, ki spadajo v družino dreves, saj so povezani in brez ciklov. Vozlišča dreves na sliki so dobro pobarvana z dvema barvama. Torej je njihovo kromatično število enako $\chi(G) = 2$. Če želimo zmanjšati kromatično število za ena moramo pri prvem drevesu odstraniti osem povezav, pri drugem drevesu dvanajst povezav in pri tretjem drevesu osem povezav. Drevo G ima $|V(G)| - 1$ povezav in ravno toliko povezav moramo odstraniti, da se kromatično število zmanjša.



Slika 2.2: Dobro 2-barvanje dreves.

Pot P_n je graf, katerega vozlišča so zaporedoma povezana in ne vsebuje ciklov. Pot P_n ima n vozlišč in $n - 1$ povezav. Ker so poti posebni primeri dreves imajo kromatično število enako dve in število kromatične stabilnosti povezav enako $n - 1$.

2.2 Disjunktna unija grafov

Če sta G in H disjunktna grafa potem sta lahko grafa G in H neodvisno pobarvana graf G z barvami $\{1, \ldots, \chi(G)\}$ in graf H z barvami $\{1, \ldots, \chi(H)\}$. Če imata grafa G in H skupno natanko eno vozlišče v, potem sta lahko grafa kljub temu neodvisno pobarvana, če upoštevamo, da vozlišče v ohrani enako barvo v obeh barvanjih grafov. Iz tega sledi, da v obeh primerih velja, da je $\chi(G \cup H) = max\,\{\chi(G), \chi(H)\}$.

Izrek 2.2 *Če sta grafa G in H disjunktna grafa ali če imata grafa G in H skupno natanko eno vozlišče, potem velja, da je:*

$$es_\chi(G \cup H) = \begin{cases} es_\chi(G); & \text{če je } es_\chi(G) > es_\chi(H) \\ es_\chi(H); & \text{če je } es_\chi(G) < es_\chi(G) \\ es_\chi(G) + es_\chi(H); & \text{če je } es_\chi(G) = es_\chi(H) \end{cases}$$

Dokaz. Če velja $\chi(G) \neq \chi(H)$, lahko brez izgube za splošnost trdimo, da $\chi(G) > \chi(H)$, potem zaradi posledice 3.3 velja, da je $es_\chi(G \cup H) \geq es_\chi(G)$, ker je $G \subseteq G \cup H$ in $\chi(G) = \chi(G \cup H)$. Za dokaz druge neenakosti naj bo E' ublažitvena množica grafa G z močjo $|E'| = es_\chi(G)$. Potem je $\chi(G - E') = \chi(G) - 1 \leq \chi(H)$ in zato je $\chi((G \cup H) - E') = \chi(G \cup H) - 1$, kar pomeni, da je E' ublažitvena množica grafa G. Zato je $es_\chi(G \cup H) \leq |E'| = es_\chi(G)$.

Če je $\chi(H) = \chi(G)$ potem sta bodisi G in H prazna in zato je tudi $G \cup H$ prazen in posledično je $es_\chi(G \cup H) = es_\chi(G) = es_\chi(H) = 0$ bodisi pa iz posledice 3.2 sledi, da je $es_\chi(G \cup H) \geq es_\chi(G) + es_\chi(H)$. Za dokaz druge neenakosti naj bo $E' = E'_G \cup E'_H$, kjer je E'_G najmanjša ublažitvena množica grafa G in E'_H najmanjša ublažitvena množica grafa H. Očitno je $\chi((G \cup H) - E') = \chi(G \cup H) - 1$, kar pomeni, da je E' ublažitvena množica grafa $G \cup H$. Zato je $es_\chi(G \cup H) \leq es_\chi(G) + es_\chi(H)$. □

2.3 Cikli

Trditev 2.3 *Število kromatične stabilnosti povezav in vezano kromatično število ciklov C_n je:*

$$es_\chi(C_n) = \rho(C_n) = \begin{cases} 1; & \text{če je } n \text{ liho število} \\ n; & \text{če je } n \text{ sodo število} \end{cases}$$

Dokaz. Naj bo najprej n sodo število. Ker je C_n dvodelni graf, je kromatično število grafa C_n enako 2 (vsako biparticijo pobarvamo z eno barvo). Edini podgraf grafa C_n, ki ima kromatično število enako 1, je graf brez povezav. Zato je najmanjša ublažitvena množica, množica vseh povezav grafa C_n, torej je $es_\chi(C_n) = n$. Ker ima vsaka povezava grafa C_n eno krajišče ene barve in drugo krajišče druge barve, je vsaka poveza grafa povezava med edinima barvnima razredoma. Zato je $\rho(G) = n$.

Naj bo sedaj n lih. V tem primeru C_n ni dvodelen, njegovo kromatično število pa je 3. Ker z odstranitvijo poljubne povezave grafa C_n dobimo graf P_n, ki je dvodelen in ima zato kromatično število enako 2, je $es_\chi(C_n) = 1$. Ker znamo C_n dobro pobarvat s tremi barvami, npr. 1,2,3, tako, da ima natanko eno vozlišče barve 3, soseda od vozlišča barve 3 pa sta pobarvana z različnima barvama, je med barvnima razredoma C_1 in C_3 natanko ena povezava. Zato je $\rho(G) = 1$. □

2.4 Kaktus grafi

Kaktus grafi so grafi z lastnostjo, da vsaka povezava leži v največ enem ciklu. Iz tega sledi, da so bloki kaktus grafov enaki grafom K_1, K_2 ali ciklom. Da lahko določimo kromatično stabilnost povezav kaktus grafov upoštevamo to lastnost in naslednji trditvi.

Iz izreka 2.2 sledi, da lahko za vsak graf G, ki ni 2-povezan $es_\chi(G)$ dobimo kot vsoto $es_\chi(G_i)$, kjer so G_i maksimalni 2-povezani podgrafi grafa G. Zato velja naslednja trditev.

Trditev 2.4 *Naj bo G kaktus graf z b bloki $B_1, B_2, ..., B_b$, takšnimi, da velja, da $\chi(B_i) = \chi(G)$ za $1 \leq i \leq s$ in, da je $\chi(B_i) < \chi(G)$ za $s \leq i \leq b$. Potem velja, da je število kromatične stabilnosti povezav grafa G enako vsoti števil kromatičnih stabilnosti povezav grafov B_i, za $1 \leq i \leq s$.*

Izrek 2.5 *Naj bo G kaktus graf s s lihimi cikli. Če je $s > 0$, potem je $es_\chi(G) = \rho(G) = s$, v nasprotnem primeru je $es_\chi(G) = \rho(G) = |E(G)|$.*

Dokaz. Če je $s = 0$, potem je graf G K_1 ali dvodelen graf. Zato iz trditve 2.1 sledi, da je $es_\chi(G) = \rho(G) = |E(G)|$. Če ima G $s \geq 1$ lihih ciklov, potem so le-ti po povezavah disjunktni in je kromatično število grafa G tri. Ker je za zmanjšanje kromatičnega števila, vsakemu od teh s ciklov potrebno odstranit vsaj eno povezavo, je $es_\chi(G) \geq s$. Da dokažemo, da je $\rho(G) \leq s$ iterativno pobarvamo povezane bloke z barvami $1, 2, 3$ kot je opisano v nadaljevanju.

Upoštevati moramo, da za vsako komponento grafa ima blok, razen prvega, že eno pobarvano presečno vozlišče. Pobarvajmo vsa izolirana vozlišča z barvo 1. Če je blok grafa graf K_2, potem uporabimo barvi $1, 2$ ali $1, 3$. Če je blok grafa sodi cikel, potem vozlišča obarvamo z $1, 2$ oziroma, če odstranjeno vozlišče pobarvamo s 3, potem lahko vozlišča obarvamo z $1, 3, 1, 2, ..., 1, 2$. Če je blok grafa lihi cikel, potem obarvamo vozlišča z $1, 2, ..., 1, 2, 3$. Zaradi tega, točno s povezav povezuje barvna razreda C_2 in C_3. Iz česar sledi, da $\rho(G) \leq s$. Iz leme 1.24, ki pravi, da za vsak neprazen graf G velja, da $1 \leq es_\chi(G) \leq \rho(G)$, sledi $s \leq es_\chi(G) \leq \rho(G) \leq s$, kar pomeni $es_\chi(G) = \rho(G) = s$. □

2.5 $G \vee H$ - spoj grafov

Spoj disjunktnih grafov G in H, $G \vee H$, je graf sestavljen iz kopije grafa G in kopije grafa H, pri čemer je vsako vozlišče grafa G sosednje z vsakim vozliščem grafa H. Iz tega sledi, da je vsak barvni razred dobrega barvanja grafa $G \vee H$ vsebovan v množici vozlišč $V(G)$ ali $V(H)$. Z dobrim barvanjem kopije grafa G s $\chi(G)$ barvami in H kopije grafa z drugimi barvami sledi, da je $\chi(G \vee H) = \chi(G) + \chi(H)$. Vsako χ-barvanje grafa $G \vee H$ inducira χ-barvanje grafa G in χ-barvanje grafa H z disjunktnimi množicami barv. Velja tudi obratno.

Številu kromatične stabilnosti povezav spoja grafov lahko določimo zgornjo mejo. Za določitev le te potrebujemo naslednji izrek, ki opiše vezano kromatično število grafa $G \vee H$, in trditev, da je število kromatične stabilnosti grafa G med ena in vezanim kromatičnim številom grafa G.

Za poljuben graf G, naj bo:

$$\rho'(G) = \begin{cases} \rho(G); & \text{če G ni prazen} \\ \infty; & \text{če je G prazen} \end{cases}$$

Izrek 2.6 *Za grafa G in H velja:*

$$\rho(G \vee H) = min\,\{\rho'(G), \rho'(H), t(G) \cdot t(H)\}.$$

Dokaz. Če sta grafa G in H neprazna, potem obstajata dva poljubna barvna razreda χ-barvanja grafa $G \vee H$. Vsak barvni razred je v celoti vsebovan v grafu G ali v grafu H. Če sta oba barvna razreda iz grafa G ali oba iz grafa H, potem je med njima najmanj $\rho(G)$ oziroma $\rho(H)$ povezav. V primeru, da je en barvni razred iz G in drugi iz H, potem je med njima najmanj $t(G)t(H)$ povezav. Iz tega sledi, da $\rho(G \vee H) \geq min\,\{\rho(G), \rho(H), t(G)t(H)\}$.

Po drugi strani lahko najdemo χ-barvanje grafa $G \vee H$ z $\rho(G)$ povezavami med dvema barvnima razredoma grafa G, oziroma z $\rho(H)$ povezavami med dvema barvnima razredoma grafa H. Prav tako lahko najdemo barvni razred grafa G s $t(G)$ vozlišči in barvni razred grafa H s $t(H)$ vozlišči. Iz tega sledi, da $\rho(G \vee H) \leq min\,\{\rho(G), \rho(H), t(G)t(H)\}$, enakost velja, če sta grafa G in H neprazna.

Če sta grafa G in H prazna oz. če je eden izmed grafov G ali H prazen, potem sta lahko zaradi definicije ρ', eden oz. oba pogoja $\rho'(G)$, $\rho'(H)$ odstranjena iz predpostavke. Zato enakost velja za vse grafe G in H. □

Naslednji izrek določa zgornjo mejo števila kromatične stabilnosti povezav grafa $G \vee H$, ki izhaja iz izreka 2.6 in leme 1.24.

Za poljuben graf G velja:

$$es'_{\chi}(G) = \begin{cases} es_{\chi}(G); & \text{če G ni prazen} \\ \infty; & \text{če je G prazen} \end{cases}$$

Izrek 2.7 *Za poljubna grafa G in H velja:*

$$es_\chi(G \vee H) \leq min\left\{es'_\chi(G), es'_\chi(H), t(G) \cdot t(H)\right\}.$$

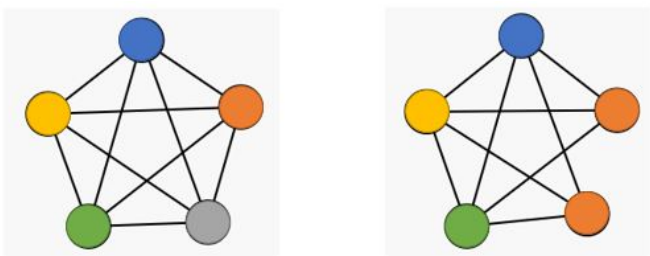
Dokaz. Če je graf G neprazen, potem obstaja $es_\chi(G)$ povezav E' v grafu G takšnih, da velja $\chi(G - E') = \chi(G) - 1$. Zaradi tega, za graf $G' = (G \vee H) - E' \cong (G - E') \vee H$ velja $\chi(G') = \chi(G - E') + \chi(H) = \chi(G) + \chi(H) - 1 = \chi(G \vee H) - 1$. Tako sledi, da je število kromatične stabilnosti povezav grafa $G \vee H$ manjše ali enako številu kromatične stabilnosti povezav grafa G ($es_\chi(G \vee H) \leq es_\chi(G)$). Podobno velja tudi v primeru, če je graf H neprazen, $es_\chi(G \vee H) \leq es_\chi(H)$. Iz izreka 2.6 in leme 1.24 sledi, da je $es_\chi(G \vee H) \leq \rho(G \vee H) \leq t(G)t(H)$. □

Kot spoj grafov lahko dobimo številne razrede grafov, katerih število kromatične stabilnosti bomo opisali v naslednjih podpoglavjih. Ti razredi grafov so:

- polni grafi $K_n = K_1 \vee K_1 \vee ... \vee K_1$,
- polni večdelni grafi $K_{n_1,n_2,...,n_r} = \overline{K_{n_1}} \vee \overline{K_{n_2}} \vee ... \vee \overline{K_{n_r}}$,
- kolesa $W_n = C_n \vee K_1 (n \geq 3)$,
- pahljače $P_n \vee K_1$.

2.5.1 Polni grafi

Za polne grafe K_n, pri čemer je $n \geq 2$, velja, da je $es_\chi(K_n) = \rho(K_n) = t(K_n) = 1$. Kromatično število polnih grafov je $\chi(K_n) = n$ in $\chi(K_n - e) = n - 1$ za vsako povezavo $e \in E(K_n)$. Iz tega sledi, da je število kromatične stabilnosti povezav $es_\chi(K_n) = 1$. Ker ima vsak barvni razred dobrega n-barvanja grafa K_n eno samo vozlišče velja $\rho(K_n) = t(K_n) = 1$.



Slika 2.3: Graf K_5 in njegov podgraf H.

Primer: Na levi sliki 2.3 je polni graf K_5. Z barvami je prikazano dobro 5-barvanje grafa K_5 s kromatičnim številom $\chi(K_5) = 5$. Na desni je njegov podgraf H, ki ima eno povezavo manj. Z odstranitvijo ene povezave smo zmanjšali kromatično število grafa K_5 za ena, zato je število kromatične stabilnosti povezav enako $es_\chi(G) = 1$. Najmanjše število povezav med katerima koli barvnima razredoma je $\rho(K_5) = 1$.

2.5.2 Polni večdelni grafi

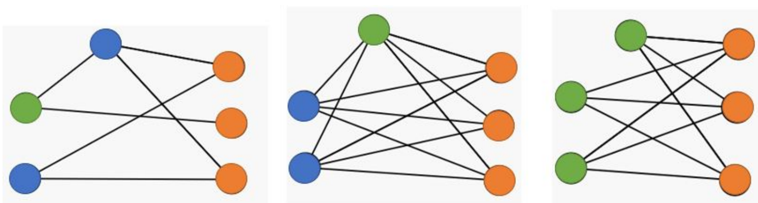
Graf G je večdelen, če lahko njegovo množico vozlišč $V(G)$ razbijemo na n disjunktnih podmnožic $X_1, X_2, ..., X_n$ tako, da ima vsaka povezava grafa eno krajišče v eni podmnožici in drugo krajišče v drugi podmnožici. Polni večdelni graf je večdelni graf, pri katerem med vozlišči iz različnih podmnožic obstajajo vse možne povezave in ne vsebuje povezave, ki bi povezovala katerikoli dve vozlišči iz iste podmnožice.

Trditev 2.8 *Naj bo $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ polni večdelni graf, kjer $k > 2$ in $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_k$. Potem velja, da je število kromatične stabilnosti povezav $es_\chi(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) = n_1 n_2$.*

Dokaz. Naj bo $G = K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ in naj bo $V(G) = X_1 \cup \ldots \cup X_k$ particija množice vozlišč, kjer $|X_1| = n_1, \ldots, |X_k| = n_k$. Ker lahko vsa vozlišča ene particije pobarvamo z isto barvo, poljubni dve vozlišči različnih particij pa morata imeti različni barvi, je $\chi(G) = k$. Če grafu G odstranimo vse povezave med particijama X_1 in X_2, (torej $n_1 n_2$ povezav), dobimo graf, ki ga znamo pobarvat s $\chi(G) - 1$ barvami, saj lahko vsa vozlišča iz $X_1 \cup X_2$ pobarvamo z isto barvo. Zato je $es_\chi(G) \leq n_1 n_2$.

Za dokaz druge neenakosti najprej opazimo, da ima graf G $n_1 n_2 \ldots n_k$ grafov K_k. Poleg tega se z odstranitvijo ene povezave grafa G število podgrafov K_k zmanjša največ za $n_3 \ldots n_k$. Naj bo $F \subseteq E(G)$ z $|F| \leq n_1 n_2 - 1$. Potem je število podgrafov K_k grafa $G - F$ vsaj $n_1 \ldots n_k - (n_1 n_2 - 1) n_3 \ldots n_k \geq 1$. Ker $G - F$ vsebuje vsaj en K_k je $\chi(G - F) = k = \chi(G)$, kar pomeni, da F ni ublažitvena množica. Zato je $es_\chi(G) \geq n_1 n_2$ s čimer je trditev dokazana.

□



Slika 2.4: Večdelni graf, polni večdelni graf in njegov podgraf.

Na sliki 2.4 je prikazan večdelni graf, s kromatičnim številom $\chi(G) = 3$. Na sredini je polni večdelni graf $F = K_{1,2,3}$ s kromatičnim številom tri. Na desni strani je podgraf

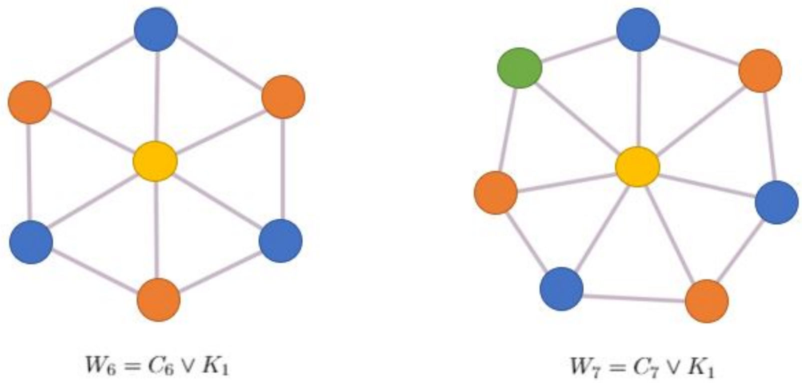
H grafa F za katerega velja, da je $\chi(H) = \chi(F) - 1$. Glede na trditev 2.8 velja, da je število kromatične stabilnosti povezav polnih večdelnih grafov enako $es_{\chi}(G) = n_1 n_2$, torej je $es_{\chi}(K_{1,2,3}) = 1 \cdot 2 = 2$. Grafu F smo odstranili dve povezavi, da se je kromatično število zmanjšalo.

2.5.3 Kolesa

Trditev 2.9 *Za kolesa $W_n = C_n \vee K_1$ velja:*

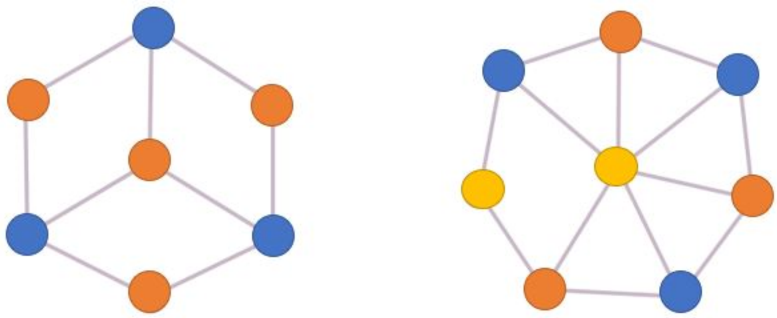
$$es_{\chi}(W_n) = \rho(W_n) = \begin{cases} 1; & \text{če je } n \text{ liho število} \\ \frac{n}{2}; & \text{če je } n \text{ sodo število} \end{cases}$$

Dokaz. Če je n liho število potem iz izreka 2.6 sledi, da $\rho(W_n) = min\{\rho(C_n), t(C_n)\} = min\{1, 1\} = 1$. Ker za vsak graf G velja $1 \le es_{\chi}(G) \le \rho(G)$, sledi, da je $es_{\chi}(W_n) = 1$. Če je n sodo število potem iz leme 1.24 in izreka 2.6 sledi $es_{\chi}(W_n) \le \rho(W_n) = min\{\rho(C_n), t(C_n)\} = min\{n, \frac{n}{2}\} = \frac{n}{2}$. Po drugi strani velja, da je kromatično število koles tri in vsako kolo W_n vsebuje $\frac{n}{2}$ disjunktnih K_3. Zato je za zmanjšanje kromatičnega števila potrebno odstranit vsaj $\frac{n}{2}$ povezav, kar pomeni $es_{\chi}(W_n) \ge \frac{n}{2}$. □



Slika 2.5: Dobro barvanje grafov $W_6 = C_6 \vee K_1$ in $W_7 = C_7 \vee K_1$.

Slika 2.5 prikazuje dobro barvanje grafov $W_6 = C_6 \vee K_1$ in $W_7 = C_7 \vee K_1$. Kromatično število grafa na levi je tri. Graf W_6 je spoj sodega cikla C_6 in polnega grafa K_1. Kromatično število grafa na desni je štiri. Graf W_7 je spoj lihega cikla C_7 in polnega grafa K_1. Na sliki 2.6 sta podgrafa grafov na sliki 2.5. Odstranjene so povezave tako, da se kromatično število grafoma W_6 in W_7 zniža za ena. Graf W_6 vsebuje sodi cikel C_6 zato je število kromatične stabilnosti enako $\frac{n}{2}$, kar je v tem primeru enako tri. Tudi na sliki 2.6 vidimo, da je podgraf H nastal iz grafa W_6 tako, da smo odstranili tri povezave in velja, da je $\chi(H) = \chi(W_6) - 1$, ter $es_\chi(W_6) = 3$. Podgraf I grafa W_7 je nastal tako, da smo odstranili eno povezavo in s tem zmanjšali kromatično število grafa za ena. Graf W_7 vsebuje lihi cikel C_7 in zato velja, da je število kromatične stabilnosti povezav enako ena. To lahko vidimo tudi iz primera na sliki 2.6, saj velja, da $\chi(I) = \chi(W_7) - 1$, ter $es_\chi(W_7) = 1$.



Podgraf H grafa W_6. Podgraf I grafa W_7.

Slika 2.6: Podgrafa grafov W_6 in W_7.

2.5.4 Pahljače

Trditev 2.10 *Za pahljače $F_n = P_n \vee K_1$ velja:*

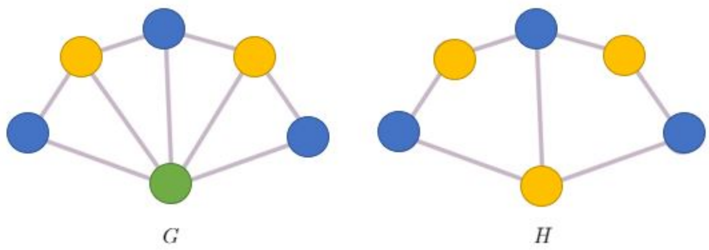
$$es_\chi(F_n) = \rho(F_n) = \begin{cases} 1; & \text{če je } n = 1 \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor; & \text{če je } n \geq 2 \end{cases}$$

Dokaz. Najprej dokažimo trditev 2.10 za prvi primer, ko je $n = 1$. Velja, da je $es_\chi(F_1) = \rho(F_1) = 1$, saj je $F_1 \cong K_2$.

V nadaljevanju moramo dokazati še drugi del, ko je $n \geq 2$. Velja, da je $\rho(G) = 1$, če je tudi $es_\chi(G) = 1$ in je graf G neprazen. Iz izreka 2.6 in leme 1.24 sledi, da $es_\chi(F_n) \leq \rho(F_n) = min\,\{\rho(P_n), t(P_n)\} = \{n-1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Za dokaz druge neenakosti opazimo, da F_n vsebuje $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ disjunktnih podgrafov K_3, zato iz posledice 3.2 sledi, da je $es_\chi(F_n) \geq \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} es_\chi(K_3) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

□



Slika 2.7: Graf G in njegov podgraf H.

Slika 2.7 prikazuje graf $F_5 = P_5 \vee K_1$ s kromatičnim številom $\chi(G) = 3$. Zaradi trditve 2.10 velja, $es_\chi(F_5) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$. To nam pove, da moramo odstraniti dve povezavi, da zmanjšamo kromatično število za ena. Tako dobimo podgraf H grafa F_n in velja $\chi(H) = \chi(G) - 1$. Tudi na sliki 2.7 je podgraf H nastal tako, da smo grafu F_n odstranili dve povezavi in dobili kromatično število dve.

2.6 Kartezični produkti

Iz definicije povezav kartezičnega produkta grafov G in H sledi, da lahko množico povezav kartezičnega produkta grafov G in H razdelimo v $|V(H)|$ kopij množice $E(G)$ in $|V(G)|$ kopij množice $E(H)$. Kromatično število kartezičnega produkta grafov $\chi(G \Box H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$.

V nadaljevanju predstavimo izrek, ki opisuje število kromatične stabilnosti povezav za kartezični produkt grafov G in H.

Izrek 2.11 *Za poljubna grafa G in H velja:*

$$es_\chi(G \Box H) = \begin{cases} |V(H)|\, es_\chi(G); & \text{če je } \chi(G) > \chi(H) \\ |V(G)|\, es_\chi(H); & \text{če je } \chi(G) < \chi(H) \\ |V(H)|\, es_\chi(G) + |V(G)|\, es_\chi(H); & \text{če je } \chi(G) = \chi(H) \end{cases}$$

Dokaz. Naj bo najprej $\chi(G) \neq \chi(H)$. V tem primeru lahko brez izgube za splošnost predpostavimo, da $\chi(G) > \chi(H)$. Zato velja, da $\chi(G \Box H) = \chi(G)$ in $G \Box H$ vsebuje $|V(H)|$ po vozliščih disjunktnih podgrafov, ki so izomorfni z G. Iz posledice 3.2 sledi, da je $es_\chi(G) \geq |V(H)|\, es_\chi(G)$.

Za dokaz druge neenakosti naj bo E_G ublažitvena množica povezav grafa G z $|E_G| = es_\chi(G)$. Naj bo E' unija $|V(H)|$ množic povezav, ki ustrezajo $|V(H)|$ kopijam E_G v $G \Box H$. Iz tega sledi, da $G\Box H - E' \cong (G - E_G)\Box H$ in $\chi(G\Box H - E') = max\,\{\chi(G - E_G), \chi(H)\} = \chi(G - E_G) = \chi(G) - 1$, iz česar sledi, da je $es_\chi(G\Box H) \leq |E'| = |V(H)|\, es_\chi(G)$.

Na koncu naj bo $\chi(G) = \chi(H)$. Če sta G in H prazna, potem je tudi $G\Box H$ prazen in zato je $es_\chi(G\Box H) = es_\chi(G) = es_\chi(H) = 0$. Sicer $G\Box H$ vsebuje $|V(H)|$ kopij grafa G in $|V(G)|$ kopij grafa H, ki so po povezavah paroma disjunktne in imajo enako kromatično število kot graf $G\Box H$. Iz posledice 3.2 sledi, da je $es_\chi(G\Box H) \geq |V(H)|\, es_\chi(G) + |V(G)|\, es_\chi(H)$. Za dokaz druge neenakosti naj bo E_G ublažitvena množica povezav grafa G moči $es_\chi(G)$ in E_H ublažitvena množica povezav grafa H moči $es_\chi(H)$. Naj bo E' unija $|V(H)|$ kopij E_G in $|V(G)|$ kopij E_H v $G\Box H$. Iz tega sledi, da $G\Box H - E' \cong (G - E_G)\Box(H - E_H)$ in $\chi(G\Box H - E') = max\,\{\chi(G - E_G), \chi(H - E_H)\} = \chi(G - E_G) = \chi(G) - 1$. Zato je $es_\chi(G\Box H) \leq |E'| = |V(H)|\, es_\chi(G) + |V(G)|\, es_\chi(H)$. $\Box$

Poglavje 3

Meje števila kromatične stabilnosti povezav

V tem poglavju bomo predstavili nekaj različnih mej za število kromatične stabilnosti povezav. Če ni navedeno drugače je zapisano povzeto po virih [1, 12].

3.1 Spodnje meje za $es_\chi(G)$

Naslednji izrek opisuje splošno spodnjo mejo števila kromatične stabilnosti povezav.

Izrek 3.1 *Naj bo G graf s kromatičnim številom $\chi(G) = k \geq 2$. Če graf G vsebuje s podgrafov $G_1, \ldots, G_s$ s kromatičnimi števili $\chi(G_1) = ... = \chi(G_s) = k$ in če je q največje število teh podgrafov, ki imajo skupno povezavo, potem za število kromatične stabilnosti povezav velja $es_\chi(G) \geq \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{s} es_\chi(G_i) \geq \frac{s}{q}$.*

Dokaz. Naj bo E' ublažitvena množica grafa G z $|E'| = es_\chi(G)$. Za vsak $i \in \{1, \ldots, s\}$ mora množica E' vsebovati vsaj $es_\chi(G_i)$ povezav grafa G_i. Zato velja: $b = \sum_{i=1}^{s} |E' \cap E(G_i)| \geq \sum_{i=1}^{s} es_\chi(G_i) \geq s$. Po drugi strani, vsako povezavo množice E' v b štejemo največ q krat. Zato je $|E'|q \geq b$ in posledično $es_\chi(G) = |E'| \geq \frac{b}{q} \geq \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{s} es_\chi(G_i) \geq \frac{s}{q}$. $\square$

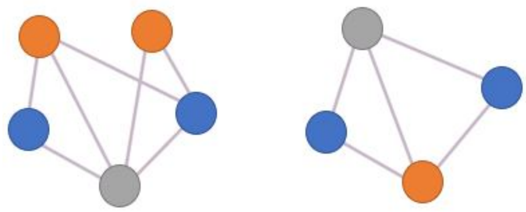
Posledica 3.2 *Naj bo G graf s kromatičnim številom $\chi(G) = k \geq 2$. Če graf G vsebuje s podgrafov $G_1, \ldots, G_s$ s kromatičnimi števili $\chi(G_1) = ... = \chi(G_s) = k$, ki imajo paroma disjunktne množice povezav, potem je $es_\chi(G) \geq \sum_{i=1}^{s} es_\chi(G_i) \geq s$.*

Dokaz. Posledica sledi iz izreka 3.1, saj je vsaka povezava grafa G vsebovana v natanko enem danem podgrafu. $\square$

Če v posledici 3.2 določimo $s = 1$, dobimo naslednjo posledico.

Posledica 3.3 *Naj bosta G in H grafa. Če je $H \subseteq G$ in je $\chi(H) = \chi(G)$, potem velja, da je $es_\chi(H) \leq es_\chi(G)$.*

Dokaz. Dokaz posledice 3.3 sledi iz dokaza izreka 3.1 za primer, ko je $s = 1$. $\square$



Slika 3.1: Graf G (levo) in njegov podgraf H (desno) z enakim kromatičnim številom.

Na sliki 3.1 je na levi primer grafa G, na desni pa podgraf H. Oba grafa na sliki imata kromatično število enako tri. Za določitev števila kromatične stabilnosti povezav grafa G moramo odstraniti toliko povezav, da zmanjšamo kromatično število na novo nastalega podgrafa za ena. Da to dosežemo za graf G, moramo grafu G odstraniti dve povezavi in bo $es_\chi(G) = 2$. Za podgraf H na sliki 3.1 na desni moramo za določitev števila kromatične stabilnosti povezav podgrafa H, odstraniti eno povezavo in zato bo $es_\chi(G) = 1$. Tako velja, da je $es_\chi(G) \geq es_\chi(H)$, tudi za primer na sliki 3.1, kar pa seveda sledi iz posledice 3.3.

Posledica 3.4 *Naj bo G graf s kromatičnim številom tri. Če graf vsebuje s lihih ciklov, ki so po povezavah paroma disjunktni, potem je spodnja meja števila kromatične stabilnosti povezav grafa G število s.*

Dokaz. Naj bodo $C_{2n_1+1}, \ldots, C_{2n_s+1}$ po povezavah disjunktni lihi cikli vsebovani v grafu G. Ker je $3 = \chi(G) = \chi(C_{2n_1+1}) = \ldots = \chi(C_{2n_s+1})$ iz posledice 3.2 sledi, da je $es_\chi(G) \geq \sum_{i=1}^{s} es_\chi(C_{2n_i+1}) = s$. $\square$

3.2 Zgornje meje za $es_\chi(G)$

Za določitev zgornje meje števila kromatične stabilnosti povezav grafa bomo najprej opisali izrek, ki opisuje splošno zgornjo mejo za število kromatične stabilnosti povezav grafa.

Izrek 3.5 *Naj bo G graf z $|V(G)| = n$ in $\chi(G) = r$. Potem velja:*

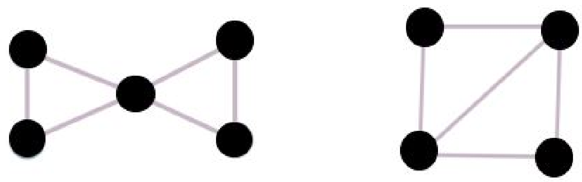
$$es_\chi(G) \leq \begin{cases} \lfloor \frac{n}{r} \rfloor \lfloor \frac{n}{r} + 1 \rfloor; & n \equiv r - 1 (\text{mod } r) \\ \lfloor \frac{n}{r} \rfloor^2; & \text{sicer.} \end{cases}$$

Še več, obstajajo grafi, pri katerih sta ti dve meji doseženi.

Dokaz. Imejmo dobro r-barvanje grafa G. Naj bo e_{ij} število povezav med i-tim in j-tim barvim razredom. Očitno velja, da je število kromatične stabilnosti povezav manjše ali enako od e_{ij} za vse i, j iz množice $\{1, 2, \ldots, r\}$. Če je $n \equiv r - 1 (\text{mod } r)$, potem obstajata vsaj dva barvna razreda z največ $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ in $\lfloor \frac{n}{r} + 1 \rfloor$ vozlišči. Od tod sledi, da je $e_{ij} \leq \lfloor \frac{n}{r} \rfloor \lfloor \frac{n}{r} + 1 \rfloor$ za neka različna i, j iz množice $\{1, \ldots, r\}$ in zato $es_\chi(G) \leq \lfloor \frac{n}{r} \rfloor \lfloor \frac{n}{r} + 1 \rfloor$. Po drugi strani, če $n \not\equiv r - 1 (\text{mod } r)$ potem obstajata najmanj dva barvna razreda C_i, C_j z največ $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ vozlišči. Iz tega sledi, da je $es_\chi(G) \leq e_{ij} \leq \lfloor \frac{n}{r} \rfloor^2$.

Za dokaz ostrosti meje predpostavimo, da je $n \equiv r - 1 (\text{mod } r)$. Naj bo $n = n_1 + n_2 + ... + n_r$ in je $n_1 = \lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ in $n_2 = n_3 = ... = n_r = \lfloor \frac{n}{r} + 1 \rfloor$. Naj bo $k \geq 2$. Ker je $n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_k$, iz trditve 2.8 sledi, da je $es_\chi(K_{n_1, n_2, \ldots, n_k}) = n_1 n_2 = \lfloor \frac{n}{r} \rfloor \lfloor \frac{n}{r} + 1 \rfloor$. Podobno velja, če $n \not\equiv r - 1 (\text{mod } r)$. V tem primeru naj bo $n = n_1 + n_2 + ... + n_r$ in $n_1 = n_2 = \lfloor \frac{n}{r} \rfloor$, $n_3, n_4, ..., n_r$ so urejeni naraščajoče in vsi vsaj $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$. Iz trditve 2.8 sledi, da je $es_\chi(K_{n_1, n_2, \ldots, n_k}) = n_1 n_2 = (\lfloor \frac{n}{r} \rfloor)^2$. $\square$

Na sliki 3.2 sta primera za izrek 3.5. Primer za prvo neenakost je graf z dvema trikotnikoma, ki imata natanko eno skupno vozlišče. Za drugo neenakost pa je primer grafa K_4 brez ene povezave.



Slika 3.2: Graf z dvema trikotnikoma (levo) in graf K_4 brez ene povezave (desno).

Staton je v izreku 3.6, ki je zapisan v nadaljevanju dokazal, da če maksimalna stopnja grafa ni velika v primerjavi s kromatičnim številom grafa, potem tudi število kromatične stabilnosti povezav grafa ni veliko.

Izrek 3.6 *Če je G graf z $\Delta(G) < a(\chi(G)-1)$, potem velja, da je $es_\chi(G) \leq (a-1)t(G)$.*

Dokaz. Naj bo $c : V(G) \to \{1,\ldots,\chi(G)\}$ χ-barvanje grafa G, ki ima barvni razred velikosti $t(G)$. Brez izgube za splošnost lahko predpostavimo, da je $|C_1| = t(G)$. Ker je $\Delta(G) < a(\chi(G)-1)$ za vsako vozlišče $v \in C_1$ obstaja barvni razred C_j, $j \in \{2,\ldots,\chi(G)\}$, tako, da ima v v C_j manj kot a sosedov. Z E_v označimo množico vseh povezav z enim krajiščem v in drugim krajiščem v C_j. Ker je $F = \bigcup_{v\in C_1} E_v$ ublažitvena množica, velja $es_\chi(G) \leq |F| \leq (a-1)|C_1| = (a-1)t(G)$. $\square$

Če je $\Delta(G) \leq 2\chi(G)-3$, potem je $es_\chi(G) \leq t(G)$ in iz tega očitno sledi, da je $es_\chi(G) \leq t(G) \leq \lfloor n/\chi(G) \rfloor \leq \alpha(G)$ za katerikoli graf G z n vozlišči in neodvisnostnim številom $\alpha(G)$.

Posledica 3.7 *Naj bo G graf z $\Delta(G) \leq 2\chi(G)-3$. Potem je $es_\chi(G) \leq \alpha(G)$.*

V nadaljevanju bomo izpeljali meje za podkubične grafe, nato pa bomo dokazali zgornjo mejo števila kromatične stabilnosti povezav za poljubne grafe v odvisnosti od $\Delta(G), \chi(G)$ in moči množice najmanjšega možnega barvnega razreda v optimalnem barvanju.

Definicija 3.8 *Graf G je podkubičen, če je $\Delta(G) \leq 3$.*

Dvodelna gostota $b(G)$ grafa G je definirana kot največje razmerje med velikostjo dvodelnega podgrafa G in velikostjo grafa G:

$$b(G) = max\left\{\frac{|E(H)|}{|E(G)|}; H \text{ je dvodelen podgraf grafa } G\right\}$$

Za dvodelno gostoto velja naslednja spodnja meja, z uporabo katere lahko dobimo zgornjo mejo za število kromatične stabilnosti povezav podkubičnih grafov.

Izrek 3.9 *[5] Če je graf G povezan podkubičen graf, potem velja, da $b(G) \geq \frac{3}{4} - \frac{1}{4|E(G)|}$.*

Izrek 3.10 *Če je graf G povezan podkubičen graf, potem $es_\chi(G) \leq \frac{|E(G)|+1}{4}$. Velja tudi, da je meja ostra.*

Dokaz. Po izreku 3.9 velja, da je $b(G) \geq \frac{3}{4} - \frac{1}{4|E(G)|}$. Naj bo $m'(G)$ največje število povezav dvodelnega podgrafa G' grafa G. Ker je $F = E(G) - E(G')$ najmanjša ublažitvena množica je $m'(G) = |E(G)| - es_\chi(G)$. Zato velja:

$$b(G) = \frac{m'(G)}{|E(G)|} = \frac{|E(G)| - es_\chi(G)}{|E(G)|} \geq \frac{3}{4} - \frac{1}{4\,|E(G)|},$$

iz česar sledi,

$$es_\chi(G) \leq \frac{|E(G)|+1}{4}.$$

Za $k \geq 1$ naj bo G_k graf reda $3k$ z vozlišči $V(G_k) = \{x_1, y_1, z_1, ..., x_k, y_k, z_k\}$ in vozlišča $x_1, y_1, ..., x_k, y_k$ tvorijo pot dožine $2k-1$. Naj bo vozlišče z_i sosednje z vozliščema x_i in y_i, za $i \in [k]$. Graf G_1 je izomorfen z grafom K_3. Očitno je, da je $|E(G_k)| = 4k-1$, še več, da zmanjšamo kromatično število, moramo odstraniti vsaj eno povezavo vsakega trikotnika v grafu G_k, zato je število kromatične stabilnosti povezav grafa G_k enako k. Od tod sledi, da $es_\chi(G_k) = k = \frac{|E(G)|+1}{4}$ kar dokazuje, da je meja ostra. □

Izrek 3.11 *Če je G graf, potem velja:*

$$es_\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{\Delta(G)}{\chi(G)-1} \right\rfloor t(G).$$

Še več, meja je ostra.

Dokaz. Naj bo $\Delta = \Delta(G)$ in $r = \chi(G)$. Naj bo C_1 barvni razred z $|C_1| = t(G)$ v dobrem r-barvanju grafa G. Ker je moč barvnega razreda C_1 najmanjša, med vsemi barvnimi razredi vseh r-barvanj grafa G, ima vsako vozlišče v množici C_1 vsaj enega soseda v vseh drugih barvnih razredih. Sicer bi obstajalo vozlišče $v \in C_1$, ki v barvnem razredu $C_j \neq C_1$ nima nobenega soseda. Tako lahko tvorimo novo r-barvanje grafa G, ki ga iz prejšnjega dobimo tako, da vozlišče v pobarvamo z barvo j. V tem r-barvanju grafa G ima barvo 1 $t(G)-1$ vozlišč, kar vodi v protislovje.

Po pravilu golobnjaka je vsako vozlišče v množici C_1 povezano z vsaj nekim barvnim razredom z največ $\lfloor \frac{\Delta}{r-1} \rfloor$ povezavami. Če odstranimo te povezave lahko na novo pobarvamo vsako vozlišče množice C_1, da dobimo $(\chi(G)-1)$-barvanje. Zaradi tega z odstranitvijo največ $t(G)\frac{\Delta}{r-1}$ povezav zmanjšamo kromatično število grafa G.

Za dokaz ostrosti meje, naj bo H_k za $k \geq 3$ graf sestavljen iz dveh disjunktnih polnih grafov K_k pri čemer eno od povezav prvega K_k identificiramo z eno od povezav drugega K_k. Tako je na primer graf H_3 izomorfen grafu $K_4 \setminus e$ za neko povezavo e. V tem primeru velja, da $\Delta(H_k) = 2k-3$, $\chi(H_k) = k$ in $t(H_k) = 1$, zato je zgornja meja iz izreka 3.11 enaka ena. Ker se z odstranitvijo ene povezave grafa H_k kromatično število zmanjša, je dokaz ostrosti zaključen. □

To podpoglavje zaključujemo z izrekom, ki določa spodnjo mejo števila kromatične stabilnosti povezav za grafe izraženo s t.

Izrek 3.12 *Če graf G vsebuje tako ublažitveno množico F z $|F| = es_\chi(G)$, da lahko množico krajišč od F razbijemo v dve neodvisni množici, potem je $es_\chi(G) \geq t(G)$. Še več, spodnja meja je ostra.*

Dokaz. Po predpostavki lahko množico krajišč povezav iz F razbijemo na dve neodvisni množici S_1 in S_2. Denimo, da je $|S_1| < t(G)$ in naj bo $G' = G - F$. Pobarvajmo graf G' s $\chi(G) - 1$ barvami. Nato pa enako barvanje uporabimo tudi za graf G le, da vozlišča množice S_1 pobarvamo z novo barvo. Tako dobimo χ-barvanje grafa G. V tem barvanju množica S_1 tvori barvni razred z $|S_1| < t(G)$, kar vodi v protislovje. Zaradi tega velja, da $|S_1| \geq t$ in sledi, da $es_\chi(G) \geq |S_1|$.

Da dokažemo ostrost meje, uporabimo graf H_k iz dokaza za izrek 3.11. Ker je $es_\chi(H_k) = t(H_k) = 1$, so predpostavke izreka izpolnjene, zato je meja ostra. □

Zgornjo mejo števila kromatične stabilnosti povezav bomo v naslednjem podpoglavju opisali tudi z Nordhaus-Gaddum neenakostjo.

3.3 Rezultati tipa Nordhaus-Gaddum

Leta 1956 sta Nordhaus in Gaddum opisala spodnje in zgornje meje za vsoto in produkt kromatičnih števil grafov G in $\overline{G}$ glede na red grafa G. V nadaljevanju je najprej zapisana meja tipa Nordhaus-Gaddum za kromatično število grafa. Na koncu tega podpoglavja pa predstavimo mejo tipa Nordhaus-Gaddum za število kromatične stabilnosti povezav grafa. To pomeni, da predstavimo zgornjo mejo vsote števila kromatične stabilnosti povezav grafa G in števila kromatične stabilnosti povezav komplementa grafa G.

Nordhaus in Gaddum sta preučevala kromatično število grafa G skupaj z njegovim komplementom $\overline{G}$. Opisala in dokazala sta spodnjo in zgornjo mejo vsote in produkta $\chi(G)$ in $\chi(\overline{G})$ glede na red n grafa G. Zaradi njunih ugotovitev je katerakoli meja vsote ali produkta grafa G in njegovega komplementa $\overline{G}$, poimenovana Nordhaus-Gaddum tip neenakost oz. relacija. V nadaljevanju bomo zapisali njun najbolj znan rezultat.

Izrek 3.13 *Naj bo G graf z n vozlišči. Potem velja:*

- $\lceil 2\sqrt{n} \rceil \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$ *in*
- $n \leq \chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \leq \lfloor (\frac{n+1}{2})^2 \rfloor$

Raziskovanje na to temo se je skozi zgodovino odvijalo v različne smeri. Prva taka je iskanje grafov pri katerih so meje izreka 3.13 dosežene. Prva, ki sta se s tem ukvarjala sta bila Finck in Sachs [9, 10, 11].

Poleg tega obstajajo podobne neenakosti, ki so namesto od reda grafa odvisne od nekih drugih parametrov grafa. Še več, raziskovnje je šlo tudi v drugo smer, in sicer neenakosti tipa Nordhaus-Gaddum so bile raziskovane za mnoge druge grafovske parametre, kot so neodvisnostno število, seznamsko kromatično število, povezanostno število grafa [6, 7, 8], itd. Zato lahko problem zapišemo takole.

Pravimo, da je $f(n)$ optimalna spodnja meja za $\pi(G) + \pi(\overline{G})$, če za vsak n velja $f(n) \leq \pi(G) + \pi(\overline{G})$ za katerikoli graf G z n vozlišči. Vrednost $f(n)$ ne more biti zamenjana s katerim koli večjim realnim številom. Ker na n vozliščih obstaja končno število grafov, je $f(n)$ najmanjša vrednost za $\pi(G)+\pi(\overline{G})$ med vsemi grafi G z n vozlišči. Zaradi tega za vsak n obstaja vsaj en graf G z n vozlišči za katerega velja $f(n) = \pi(G) + \pi(\overline{G})$. V posebnem primeru, ko je $\pi = \chi$, je $f(n) = \lceil 2\sqrt{n} \rceil$ in je to optimalna spodnja meja za $\chi(G) + \chi(\overline{G})$.

Mi se bomo v nadaljevanju tega poglavja osredotočili na neenakost tipa Nordhaus-Gaddum za število kromatične stabilnosti povezav grafa, ki je zapisana v izreku 3.14.

Izrek 3.14 *Če je graf G reda $n(G) \geq 3$, potem velja:*

$$es_\chi(G) + es_\chi(\overline{G}) \leq \begin{cases} \frac{n(G)^2}{4} + 2; \textit{ n(G) je sodo število,} \\ \frac{n(G)^2}{4} + \frac{3}{4}; \textit{ za ostale vrednosti n(G).} \end{cases}$$

Še več, enakost velja natanko tedaj, ko je $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

Dokaz. Naj bo $n = n(G)$ in predpostavimo najprej, da noben izmed grafov G in $\overline{G}$ ni dvodelen, zato velja, da $\chi(G) \geq 3$ in $\chi(\overline{G}) \geq 3$. Naj bo $n = 6k$ za nek $k \in \mathbb{N}$. Če je kromatično število vsaj enega izmed grafov G in $\overline{G}$ vsaj 4, potem iz izreka 3.5 sledi, da je

$$es_\chi(G) + es_\chi(\overline{G}) \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor^2 \leq \frac{25k^2}{4} < 9k^2 = es_\chi(G'), \text{ kjer je } G' = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}.$$

Zadnja enakost ($9k^2 = es_\chi(G')$) drži zato, ker je število kromatične stabilnosti povezav dvodelnega grafa enako številu povezav grafa in ker je $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil} = K_{3k,3k}$. Podobno velja, če je $\chi(G) = \chi(\overline{G}) = 3$, potem po izreku 3.5 sledi:

$$es_\chi(G) + es_\chi(\overline{G}) \leq 2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor^2 = 8k^2 < 9k^2 = es_\chi(G').$$

Če število šest ne deli števila n, potem velja, da $es_\chi(G) + es_\chi(\overline{G}) \leq es_\chi(G')$.

S tem smo dokazali, da je največja vrednost $es_\chi(G) + es_\chi(\overline{G})$ dosežena, če je vsaj eden izmed grafov G in $\overline{G}$ dvodelen.

Brez izgube za splošnost lahko predpostavimo, da je graf G dvodelen in, da je $V(G) = X \cup Y$ particija grafa G, kjer je $|X| = n_1$ in $|Y| = n_2$. Še več, predpostavimo, da je G nepoln dvodelen graf in naj bo $G' = K_{n_1,n_2}$. Ker je komplement grafa G' disjunktna unija dveh polnih grafov velja:

– $es_\chi(G') + es_\chi(\overline{G'}) = n_1n_2 + 2;$ če je $n_1 = n_2 = \frac{n}{2}$ in

– $es_\chi(G') + es_\chi(\overline{G'}) = n_1n_2 + 1;$ sicer.

Po drugi strani, če je $n_1 = n_2 = \frac{n}{2}$, potem je:

$$es_\chi(G) + es_\chi(\overline{G}) \leq |E(G)| + (|E(G')| - |E(G)|) + 2 = n_1n_2 + 2,$$

oziroma za ostale primere velja:

$$es_\chi(G) + es_\chi(\overline{G}) \leq |E(G)| + (|E(G')| - |E(G)|) + 1 = n_1n_2 + 1.$$

Če želimo dobiti največjo vrednost za $es_\chi(G) + es_\chi(\overline{G})$, mora biti graf G poln dvodelen graf K_{n_1,n_2} in je $n_1 + n_2 = n$. Ker je $es_\chi(G) + es_\chi(\overline{G}) = n_1n_2 + k$, kjer $k \in \{1, 2\}$, je največja vrednost dosežena v primeru, ko je $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$. Zato je v primeru, ko je n sod, $es_\chi(G)+es_\chi(\overline{G}) \leq \frac{n^2}{4}+2$, v primeru, ko je n lih pa $es_\chi(G)+es_\chi(\overline{G}) \leq \frac{(n-1)(n+1)}{4}+1 = \frac{n^2+3}{4}$. Še več, graf $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$ je edini graf za katerega je zgornja meja dosežena. □

Poglavje 4

Grafi z $es_\chi = 1$

V tem poglavju bomo obravnavali grafe za katere velja, da je njihovo število kromatične stabilnosti povezav enako ena. Najprej bomo zapisali splošne rezultate za $es_\chi(G) = 1$, nato pa bomo opisali število kromatične stabilnosti povezav za regularne grafe, ter grafe Mycielskega. Če ni navedeno drugače je zapisano povzeto po viru [1].

Trditev 4.1 *Če obstaja χ-barvanje grafa G z najmanj dvema barvnima razredoma moči 1, potem velja, da $es_\chi(G) = \rho(G) = 1$.*

Dokaz. Predpostavimo, da obstaja χ-barvanje c grafa G, s $C_1 = \{v_1\}$ in $C_2 = \{v_2\}$ torej obstajata dva barvna razreda z enim samim vozliščem. Ker je c optimalno barvanje, sta v_1 in v_2 sosednji, saj bi sicer lahko dobili isto barvo. Zato je $\rho(G) = 1$. Zato iz leme 1.24 sledi, da je $es_\chi(G) = 1$. □

Za vsak graf G stopnje n, ki ima po dve vozlišči v_1 in v_2 stopnje $n-1$ velja, da ima v vsakem optimalnem barvanju grafa G samo v_1 barvo i in samo v_2 barvo j, za $j \neq i$. Zato iz trditve 4.1 sledi, da je $es_\chi(G) = \rho(G) = 1$. Primeri takšnih grafov so polni grafi K_n, $n \geq 2$, ali bolj splošno, polni večdelni grafi $K_{1,1,n_3,\ldots,n_r}$ za $r \geq 2$.

Izrek 4.2 *Če je $es_\chi(G) = 1$, potem $t(G) = 1$.*

Dokaz. Predpostavimo, da je $es_\chi(G) = 1$ in, naj bo $e = v_1v_2 \in E(G)$, tako da je $\chi(G-e) = \chi(G) - 1$. Recimo, da je c dobro barvanje grafa $G-e$ z $\chi(G) - 1$ barvami. Kromatično število grafa $G-e$ je manjše od kromatičnega števila grafa G, zato morata imeti krajišči povezave e enako barvo, $c(v_1) = c(v_2)$. Vozlišče v_1 ni povezano z nobenim vozliščem barve $c(v_2)$ v grafu $G - e$. Dodajmo grafu $G - e$ povezavo $e = v_1v_2$ in ponovno pobarvajno vozlišče v_1 z barvo $\chi(G)$, da dobimo dobro barvanje $\overline{c}$ grafa G, pri čemer je $\overline{c}(v_1) = \chi(G)$ in $\overline{c}(v) = c(v)$, za $v \neq v_1$. V tem χ-barvanju je edino vozlišče v_1 barve $\chi(G)$ povezano z natanko enim vozliščem v_2 barve $c(v_2)$. Iz tega sledi, da je $\rho(G) = 1$ in, da $\chi(G)$-barvanje grafa G vsebuje vsaj en barvni razred, z enim vozliščem, torej $t(G) = 1$. $\square$

V dokazu izreka 4.2 smo med drugim dokazali, da ima vsak graf G z $es_\chi(G) = 1$ tudi vezano kromatično število enako 1. Zato iz leme 1.24 sledi naslednje.

Posledica 4.3 *Naj bo G graf. Potem je $\rho(G) = 1$ natanko tedaj, ko je $es_\chi(G) = 1$.*

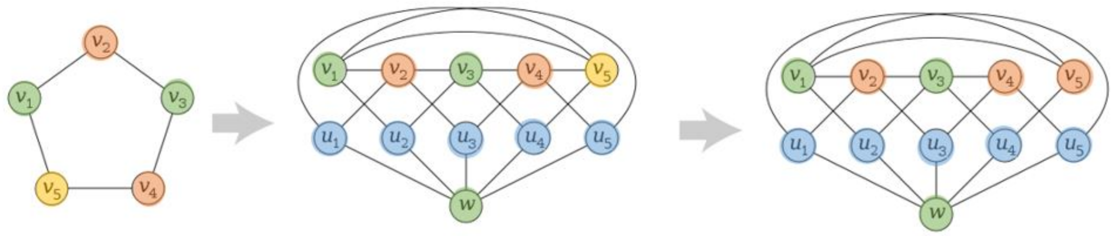
Za graf G, ki ima $t(G) = 1$, velja, da na tem grafu G obstaja χ-barvanje v katerem je ena izmed barv uporabljena natanko enkrat.

V nadaljevanju se osredotočimo na grafe Mycielskega za katere velja $\chi(M(G)) = \chi(G) + 1$, kar smo dokazali v poglavju 1.2. Med drugim tudi zaradi tega velja naslednja trditev o grafih Mycielskega in njihovih številih kromatične stabilnosti povezav.

Trditev 4.4 *Če je G graf s $t(G) = 1$, potem je $es_\chi(M(G)) = 1$.*

Dokaz. Naj bo $V(G) \cup V' \cup \{w\}$ množica vozlišč grafa $M(G)$, pri čemer je $V' = \{x' : x \in V(G)\}$ in naj bo vozlišče $u \in V(G)$ tako vozlišče grafa G, da tvori barvni razred velikosti 1 v χ-barvanju c grafa G. Brez izgube za splošnost lahko predpostavimo, da je $c(u) = 1$. Naj bo $e = wu'$ povezava in naj bo c' barvanje grafa $M(G) \setminus e$. Barvanje c' grafa $M(G) \setminus e$ definiramo takole: naj bo $c'(w) = 1$ in za vsak $x \in V(G)$ naj velja $c'(x) = c'(x') = c(x)$. Potem očitno velja, da je c' dobro barvanje grafa $M(G) \setminus e$ s $\chi(G)$ barvami. Ker iz izreka 1.20 sledi, da je $\chi(M(G)) = \chi(G)+1$, je $\chi(M(G) \setminus e) = \chi(M(G)) - 1$ iz česar sledi, da je $es_\chi(M(G)) = 1$. $\square$

Na sliki 4.1 je graf G z barvnim razredom moči 1. Kromatično število grafa G je tri. Na sredini je graf Mycielskega $M(G)$ s kromatičnim številom štiri. Na desni strani slike pa je podgraf H grafa Mycielskega, kateremu smo odstranili eno povezavo, da smo kromatično število zmanjšali za ena. Tako za omenjene grafe na sliki velja, da $\chi(H) = \chi(M(G)) - 1$. Slika potrjuje že dokazano trditev 4.4, ki pravi, da je število kromatične stabilnosti povezav grafa Mycielskega v tem primeru enako ena.



Slika 4.1: Primer grafa G (levo) in grafa Mycielskega $M(G)$ (sredina) ter podgraf H grafa $M(G)$ (desno).

Iz trditve 4.4 sledi nekaj zanimivih rezultatov za število kromatične stabilnosti povezav. Te predstavljamo v nadaljevanju. Z $n(G)$ označimo red grafa, to je $n(G) = |V(G)|$.

Lema 4.5 *Naj bo G graf. Velja, da je $es_\chi(G) = 1$, če drži eden izmed naslednjih pogojev.*

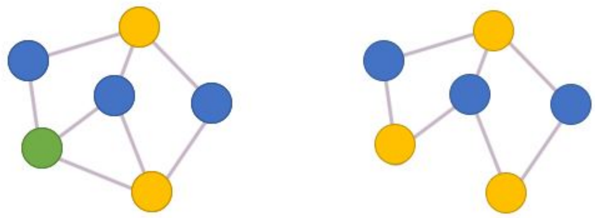
- $\Delta(G) \leq 2\chi(G) - 3$, $t(G) = 1$,
- $n(G) \leq 2\chi(G) - 2$,
- *graf G vsebuje dve vozlišči stopnje $n(G) - 1$.*

Dokaz.

- Naj bo $\chi(G) = k$ in naj bo $\{v\}$ barvni razred z enim vozliščem v χ-barvanju grafa G. Ker je $deg(v_1) \leq 2\chi(G) - 3$ in je vozlišče v sosednje z $\chi(G) - 1$ barvnimi razredi, iz načela golobnjaka sledi, da obstaja najmanj en barvni razred, ki je soseden z vozliščem v z natanko eno povezavo e. Če odstranimo povezavo e, lahko spremenimo barvo vozlišču v, in dobimo $(\chi(G) - 1)$-barvanje grafa $G \setminus e$.
- Če je $n(G) \leq 2\chi(G) - 2$, po načelu golobnjaka dobimo barvni razred z enim vozliščem. Prav tako velja naslednje $\Delta(G) \leq n(G) - 1 \leq (2\chi(G) - 2) - 1 = 2\chi(G) - 3$. Zato trditev sledi iz prejšnje.
- Naj bosta u in v vozlišča grafa G s stopnjami vozlišč $deg(u) = deg(v) = n(G) - 1$. Vozlišči u in v sta sosednji z vsemi ostalimi vozlišči grafa G, ter med seboj, zato vsako izmed vozlišč u in v tvori barvni razred z enim vozliščem v kateremkoli χ-barvanju grafa G. Zato velja, da je $\chi(G \setminus uv) = \chi(G) - 1$, saj lahko v grafu $G \setminus uv$ vozlišči u in v pobarvamo z isto barvo.

$\square$

Na sliki 4.2 sta graf G in njegov podgraf H, ki smo ga dobili tako, da smo grafu G odstranili eno povezavo. Z odstranitvijo ene povezave smo dosegli, da velja $\chi(H) = \chi(G) - 1$ in tako je $es_\chi(G) = 1$. Za graf G drži prvi pogoj iz leme 4.5 in sicer, da $\Delta(G) \leq 2\chi(G) - 3$. Poleg tega ima graf G en barvni razred z enim samim vozliščem (na sliki 4.2 zeleno obarvano vozlišče). Tudi zaradi leme 4.5 velja, da je $es_\chi(G) = 1$.



Slika 4.2: Primer grafa G (levo) in njegovega podgrafa H (desno).

V nadaljevanju bomo opisali k-regularne grafe G za $k \leq 5$, ki imajo število kromatične stabilnosti povezav enako ena. Regularni grafi so grafi z enako stopnjo vseh vozlišč.

Izrek 4.6 *Naj bo G povezan, k-regularni graf in $k \leq 5$. Potem je $es_\chi(G) = 1$ natanko tedaj, ko*

- *$G = K_2$,*
- *G je lihi cikel ali*
- *$\chi(G) > 3$ in $t(G) = 1$.*

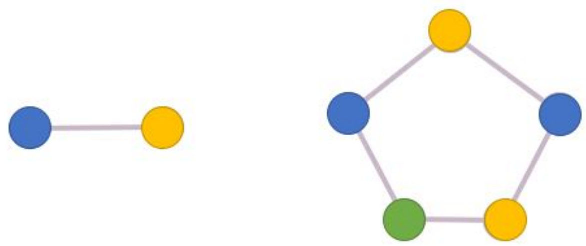
Dokaz. Če je $\chi(G) = 2$, potem je G dvodelen graf. Zato iz trditve 2.1 sledi, da je $es_\chi(G) = |E(G)|$. Zato je edini dvodelni graf z $es_\chi(G) = 1$ graf $G = K_2$.

V nadaljevanju predpostavimo, da je $\chi(G) = 3$. Če je $k = 2$, potem je graf G lihi cikel za katerega je število kromatične stabilnosti povezav grafa enako ena. Dokazati moramo, da če je $\chi(G) = 3$ in je $k \geq 3$, potem je število kromatične stabilnosti grafa G večje od ena. Da dokažemo izrek, moramo predpostaviti nasprotno. Naj bo G k-regularen graf za $k \geq 3$, pri čemer je kromatično število grafa G tri in število kromatične stabilnosti povezav enako ena. Naj bo $e = uv$ taka povezava, da bo $G' = G \setminus e$ dvodelen graf. Naj bo (S_1, S_2) biparticija grafa G' in naj velja $|S_1| = s_1$ in $|S_2| = s_2$. Očitno je, da sta vozlišči u, v v množici S_1 ali v S_2. Brez izgube za splošnost predpostavimo, da velja prva možnost. V G' je vsako vozlišče iz množice S_2 stopnje k, zato velja, da je $|E(G')| = ks_2$. Po drugi strani so tudi vsa vozlišča množice S_1, razen u in v, stopnje k. Vozlišči u in v v grafu G' sta stopnje $k-1$. Iz tega sledi, da je $|E(G')| = 2(k-1) + (s_1 - 2)k$. Torej velja, da je $ks_2 = k(s_1 - 2) + 2(k-1)$. Vendar iz tega sledi, da je $2(k-1)$ deljivo s k, kar pa je protislovje.

Dokazati moramo še, da izrek velja za grafe, ki so k-regularni in je $k \leq 5$, njihovo kromatično število pa je večje ali enako od štiri. Trdimo, da je $es_\chi(G) = 1$, če in samo če obstaja χ-barvanje grafa G z barvnim razredom, ki vsebuje natanko eno vozlišče.

Predpostavimo najprej, da graf G vsebuje povezavo e, da velja $\chi(G \setminus e) < \chi(G)$. Če pobarvamo graf $G \setminus e$ z $\chi(G) - 1$ barvami in spremenimo barvo enemu od krajišč povezave e, dobimo barvni razred z enim samim vozliščem, torej $t(G) = 1$. V obratnem primeru predpostavimo, da obstaja χ-barvanje grafa G z barvnim razredom, ki vsebuje natanko eno vozlišče. Iz izreka 1.8 sledi, da je $\chi(G) \in \{4, 5, 6\}$. Za vsako od teh možnosti pa velja, da $\Delta(G) \leq 2\chi(G) - 3$. Zato iz leme 4.5 sledi, da je število kromatične stabilnosti povezav grafa G enako ena. $\square$

Na sliki 4.3 sta primera dveh regularnih grafov, ki zadostujeta prvima dvema pogojema iz izreka 4.6. Graf na levi je poln graf K_2 s kromatičnim številom enakim dve, če odstranimo povezavo dobimo graf G' s $\chi(G') = \chi(G) - 1$, torej $es_\chi(G) = 1$, kar je zapisano tudi v izreku 4.6. Na desnem delu slike 4.3 je primer 2-regularnega lihega cikla. Če ciklu na sliki odstranimo eno povezavo, zmanjšamo kromatično število grafa za ena, zato je tudi v tem primeru število kromatične stabilnosti enako ena, saj bi odstranili eno povezavo.



Slika 4.3: Primer regularnega grafa $G = K_2$ (levo) in 2-regularnega lihega cikla (desno).

Literatura

[1] S. Akbari, S. Klavžar, N. Movarraei, M. Nahvi, Nordhaus-Gaddum and other bounds for chromatic edge-stability number, European Journal of Combinatorics 84 (2020) Article 103042.

[2] M. Aouchiche, P. Hansen, A survey of Nordhaus-Gaddum type relations, Discrete Applied Mathematics (2013) 466–546.

[3] A. Božič, Grafi Mycielskega in njihov kromatični indeks, Univerza v Ljubljani, Matrika 1 (2014) 1–14.

[4] J. I. Brown, R. Hoshino, Nordhaus-Gaddum inequalities for the fractional and circular chromatic numbers, Discrete Mathematics (2009) 2223–2232.

[5] S. Bylka, A. Idzik, J. Komar, Bipartite subgraphs of graphs with maximum degree three, Graphs and Combinatorics 15 (1999) 129–136.

[6] G. Chartrand, S. Schuster, On the independence numbers of complementary graphs, Transactions of the New York Academy of Sciences 36 (1974) 247–251.

[7] R.J. Cook, Graph factorization and theorems of the Nordhaus–Gaddum class, Periodica Mathematica Hungarica 15 (1984) 109–120.

[8] S. Dantas, S. Gravier, F. Maffray, Extremal graphs for the list-coloring version of a theorem of Nordhaus and Gaddum, Discrete Applied Mathematics141 (2004) 93–101.

[9] H.J. Finck, Über die Chromatischen Zahlen eines Graphen und seines Komplements. I, II Wiss. Z. Tech. Hochsch. Ilmenau, 12 (1966), pp. 243–246.

[10] H.J. Finck, On the chromatic numbers of a graph and its complement, Theory of Graphs, Proc. Coll. Tihany (1968), pp. 99–113.

[11] H.J. Finck, H. Sachs, Über eine von H. S. Wilf Angegebene Schranke für die Chromatische Zahl endlicher Graphen, Math. Nachr., 39 (1969), pp. 373–386.

[12] A. Kemnitz, M. Marangio, N. Movarraei, On the chromatic edge stability number of graphs, Graphs and Combinatorics 34 (2018) 1539–1551.

[13] J. Salvatore, Bipartite graphs and problem solving, University of Chicago (2007) 1–7.

[14] R. J. Wilson, J. J. Watkinson, Uvod v teorijo grafov, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1997.

[15] J. Žerovnik, Osnove teorije grafov in diskretne optimizacije, Fakulteta za strojništvo, Maribor, 2005.

Priloga 6 – IZJAVA O AVTORSTVU IN ISTOVETNOSTI TISKANE IN ELEKTRONSKE OBLIKE ZAKLJUČNEGA DELA

UNIVERZA V MARIBORU
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
(ime članice UM)

IZJAVA O AVTORSTVU IN ISTOVETNOSTI TISKANE IN ELEKTRONSKE OBLIKE ZAKLJUČNEGA DELA

Ime in priimek študent-a/-ke: Tjaša Kos
Študijski program: IZOBRAŽEVALNA MATEMATIKA
Naslov zaključnega dela: Število kromatične stabilnosti povezav

Mentor: Tanja Dravec
Somentor: ____________

Podpisan-i/-a študent/-ka Tjaša Kos

- izjavljam, da je zaključno delo rezultat mojega samostojnega dela, ki sem ga izdelal/-a ob pomoči mentor-ja/-ice oz. somentor-ja/-ice;
- izjavljam, da sem pridobil/-a vsa potrebna soglasja za uporabo podatkov in avtorskih del v zaključnem delu in jih v zaključnem delu jasno in ustrezno označil/-a;
- na Univerzo v Mariboru neodplačno, neizključno, prostorsko in časovno neomejeno prenašam pravico shranitve avtorskega dela v elektronski obliki, pravico reproduciranja ter pravico ponuditi zaključno delo javnosti na svetovnem spletu preko DKUM; sem seznanjen/-a, da bodo dela deponirana/objavljena v DKUM dostopna široki javnosti pod pogoji licence Creative Commons BY-NC-ND, kar vključuje tudi avtomatizirano indeksiranje preko spleta in obdelavo besedil za potrebe tekstovnega in podatkovnega rudarjenja in ekstrakcije znanja iz vsebin; uporabnikom se dovoli reproduciranje brez predelave avtorskega dela, distribuiranje, dajanje v najem in priobčitev javnosti samega izvirnega avtorskega dela, in sicer pod pogojem, da navedejo avtorja in da ne gre za komercialno uporabo;
- dovoljujem objavo svojih osebnih podatkov, ki so navedeni v zaključnem delu in tej izjavi, skupaj z objavo zaključnega dela;
- izjavljam, da je tiskana oblika zaključnega dela istovetna elektronski obliki zaključnega dela, ki sem jo oddal/-a za objavo v DKUM.

Uveljavljam permisivnejšo obliko licence Creative Commons: ____________ (navedite obliko)

Datum in kraj: Maribor, 27.07.2020

Podpis študent-a/-ke:

____