UNIVERZA V MARIBORU
FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO
Oddelek za matematiko in računalništvo

MAGISTRSKO DELO

Tea Jelen

Maribor, 2020

UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Oddelek za matematiko in računalništvo

Magistrsko delo

UPORABA METODE VERIŽENJA IN DRUGIH SORODNIH METOD PRI DOLOČANJU ŠKODNIH REZERVACIJ

na študijskem programu 2. stopnje Matematika

Mentor: izr. prof. dr. Marko Jakovac

Kandidatka: Tea Jelen

Maribor, 2020

ZAHVALA

Velika zahvala gre mentorju, izr. prof. dr. Marku Jakovcu, za vso strokovno pomoč, usmerjanje in podporo pri nastajanju magistrske naloge.

Posebna zahvala gre še posebej mojim staršem in dobrim prijateljem, ki so me podpirali, spodbujali in verjeli vame tekom celotnega študija.

Vsem iskreno hvala.

Uporaba metode veriženja in drugih sorodnih metod pri določanju škodnih rezervacij

Rezervacije so v aktuarstvu zelo pomembne, saj njihov izračun zagotavlja preživetje zavarovalnice. V magistrskem delu bodo podrobno opisane škodne rezervacije, ki jih uporabljamo pri neživljenskih zavarovanjih. Nekatere škode lahko zavarovalnica pokrije hitro, pri nekaterih bolj kompleksnih škodah pa lahko mine veliko časa, preden bo zavarovalnica pokrila nastalo škodo. V ta namen mora za vsako škodo, ki nastane, oceniti končni strošek in pripraviti sredstva, ki so namenjena za prihodnje poplačilo te škode. Podrobno bodo predstavljene škode IBNR (incurred but not reported), ki se zgodijo, a še niso bile prijavljene. Ker zavarovalnica v tej situaciji ne ve, koliko škod je nastalo in kako velike so te škode, je IBNR potrebno oceniti. Obstaja več pristopov, kako napraviti to oceno. V magistrskem delu bo predstavljenih nekaj metod s poudarkom na metodi veriženja (chain-ladder). Omenjena metoda je v aktuarstvu že dolgo poznana, zato bodo v nalogi predstavljene tudi nekatere sodobne izboljšave te metode.

Osnovni viri:

1. T. Mack, *A Simple Parametric Model for Rating Automobile Insurance or Estimating IBNR Claims Reserves*, Astin Bull. 21 (1991) 93–109.

2. A. Olivieri, E. Pitacco, *Introduction to Insurance Mathematics: Technical and Financial Features of Risk Transfers*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.

3. G. Taylor, *Loss Reserving: An Actuarial Perspective*, Springer Science + Business Media New York, 2010.

izr. prof. dr. Marko Jakovac

JELEN, T.: Uporaba metode veriženja in drugih sorodnih metod pri določanju škodnih rezervacij.
Magistrsko delo, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Oddelek za matematiko in računalništvo, 2020.

IZVLEČEK

Magistrsko delo se nanaša na računanje škodnih rezervacij. Predstavljena je izpeljava in uporaba metode veriženja, ki se uporablja za računanje rezervacij. Opisanih je še nekaj sorodnih metod, s katerimi lahko tudi naredimo izračun za oceno škode.

V delu je predstavljena še ocena števila škod in ocena vrednosti škod ter povezava med metodo veriženja in avtomobilskim zavarovanjem.

Ključne besede: neživljenjsko zavarovanje, metoda veriženja, škodne rezervacije.

Math. Subj. Class. (2010): 91B30, 62P05.

JELEN, T.: Using the chain-ladder method and other related methods for determining claim reserves.
Master Thesis, University of Maribor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Department of Mathematics and Computer Science, 2020.

ABSTRACT

The master's thesis is based on the calculation of claim reserves. It focuses on the derivation and the use of the chain-ladder method for calculating claim reserves. Some related methods are also presented, which can also be used for calculating claim reserves.

The thesis presents an estimate of the number of claims and an estimate of the value of claims. It also presents the relation between the chain-ladder method and automobile insurance.

Keywords: non-life insurance, chain-ladder method, claim reserves.

Math. Subj. Class. (2010): 91B30, 62P05.

Kazalo

Uvod **1**

1 Osnovni pojmi **2**

1.1 Verjetnost in porazdelitve 2

1.1.1 Poissonova porazdelitev 3

1.1.2 Gamma porazdelitev 4

1.2 Cenilke in metode za pridobivanje cenilk 5

1.2.1 Cenilka parametra 5

1.2.2 Metode za pridobivanje cenilk 5

2 Teorija o zavarovanju in škodnih rezervacijah **7**

2.1 Neživljenjsko zavarovanje in zahtevek 7

2.2 Škodne rezervacije 8

2.3 Škode IBNR in njihova ocena 9

3 Ocena števila škod IBNR **11**

3.1 Uvodni pojmi 11

3.2 Metode, ki temeljijo na finančni izpostavljenosti 14

3.2.1 Primer 15

3.3 Metoda normalizacije 18

3.4 Metoda veriženja 19

3.4.1 Prva izpeljava 19

3.4.2 Druga izpeljava 21
3.4.3 Tretja izpeljava 24

4 Ocena vrednosti škod IBNR **26**

4.1 Metoda veriženja 26
4.1.1 Plačilo škode 27
4.2 Bornhuetter-Fergusonova metoda 31
4.3 Metoda separacije 31
4.4 Individualna ocena 35

5 Izboljšave in alternativne metode veriženja **37**

5.1 Metode za ocenjevanje avtomobilskega zavarovanja 37
5.1.1 Prva metoda 38
5.1.2 Druga metoda 38
5.1.3 Tretja metoda 39
5.2 Ocenjevanje škod IBNR in povezava z zavarovanjem 39
5.3 Parametrični model za ocenjevanje škod IBNR ali zavarovanja 40
5.4 Izboljšava metode 42

6 Primer **44**

Literatura **49**

Uvod

Tema magistrskega dela je izpeljava in uporaba metode veriženja pri določanju škodnih rezervacij. V zavarovalništvu je pomembno, da si zavarovalnice ustvarijo dovolj velike rezerve za pokritje nastalih škod. Ravno to predstavlja izraz "škodna rezervacija".

V praksi se velikokrat zgodi, da pride do nastanka škode veliko prej, kot pa je ta škoda prijavljena zavarovalnici. Zaradi tega je potrebno oceniti novonastale škode in ustvariti potrebno rezervo. V zavarovalništvu se za te izračune večinoma uporablja metoda veriženja, ki je tudi ena izmed najbolj uveljavljenih metod.

Magistrsko delo je organizirano v več poglavij.

Na začetku so predstavljeni osnovni pojmi o neživljenjskem zavarovanju in škodnih rezervacijah. Predstavjene so tudi škode IBNR.

Drugo in tretje poglavje zajemata izpeljavo metode veriženja in nekaterih sorodnih metod, ki se uporabljajo za računanje škodnih rezervacij. V drugem poglavju se osredotočimo na ocenjevanje števila škod IBNR, v tretjem pa na oceno vrednosti škod IBNR.

Naslednje poglavje predstavlja povezavo metode veriženja z avtomobilskim zavarovanjem.

Na koncu pa je predstavljen še praktičen primer uporabe metode veriženja.

Poglavje 1

Osnovni pojmi

1.1 Verjetnost in porazdelitve

Izid nekega dogodka označimo s spremenljivko. Če je ta odvisen zgolj od naključja, to spremenljivko imenujemo naključna ali slučajna spremenljivka in jo označimo z veliko tiskano črko. Vrednost, ki jo ta spremenljivka zavzame, pa z malo tiskano črko. Vse vrednosti, ki jih dana spremenljivka lahko doseže, sestavljajo zalogo vrednosti spremenljivke. Če je zaloga vrednosti števna množica, govorimo o tako imenovani diskretni naključni spremenljivki, če pa je zaloga vrednosti neštevna, govorimo o zvezni naključni spremenljivki.

Verjetnost je število, ki nam pove, kolikšna je možnost, da se zgodi nek dogodek.

Definicija 1.1 *Verjetnost za končno število izidov dogodka A definiramo kot število $P(A) = \frac{k}{n}$, kjer vrednost k predstavlja število izidov, ki so ugodni za dogodek A, in vrednost n število vseh možnih izidov.*

Definicija 1.2 *Naj bo X neka naključna zvezna spremenljivka. Porazdelitveno funkcijo $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ definiramo s predpisom $F_X(x) = P[X < x]$ za vsako realno število x. Zapis $P[X < x]$ predstavlja verjetnost, da slučajna spremenljivka X zavzame vrednost, ki je manjša od vrednosti x.*

Definicija 1.3 *Naj bo X naključna spremenljivka in F_X njena porazdelitvena funkcija. Pravimo, da je X porazdeljena zvezno, če obstaja nenegativna realna funkcija $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, da velja*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt. \tag{1.1}$$

Funkcijo p imenujemo gostota verjetnosti.

Definicija 1.4 *Naj bo X naključna diskretna spremenljivka. Pričakovana vrednost oz. matematično upanje od X je vrednost spremenljivke X, ki jo pričakujemo po veliko poskusih opazovanega dogodka. Definiramo jo s predpisom $E(X) = \sum_i x_i p(x_i)$, kjer so x_i vse vrednosti, ki jih lahko zavzame spremenljivka X, $p(x_i)$ pa predstavlja verjetnost, da spremenljivka X zavzame vrednost x_i. Očitno velja omejitev $\sum_i p_i = 1$.*

Definicija 1.5 *Naj bo X naključna zvezna spremenljivka z gostoto verjetnosti p. Pričakovano vrednost spremenljivke X definiramo s predpisom $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$.*

Definicija 1.6 *Naj bo X naključna spremenljivka s pričakovano vrednostjo $E(X)$. Varianca oz. disperzija je mera za razpršenost porazdelitve spremenljivke X okoli njene pričakovane vrednosti $E(X)$ in jo definiramo s predpisom $Var(X) = E((X - E(X)^2)$.*

Tudi porazdelitve spremenljivk ločimo na diskretne in zvezne porazdelitve, odvisno od tipa naključne spremenljivke. Med diskretne porazdelitve spadajo enakomerna diskretna porazdelitev, binomska porazdelitev, Poissonova porazdelitev in geometrijska porazdelitev. Med zvezne porazdelitve pa uvrščamo enakomerno porazdelitev na zaprtem intervalu, Gaussovo porazdelitev, eksponentno porazdelitev in Gamma porazdelitev. Kasneje bomo v izračunih uporabili Poissonovo in Gamma porazdelitev, zato si ti dve poglejmo podrobneje.

1.1.1 Poissonova porazdelitev

Poissonova porazdelitev spada med diskretne porazdelitve. Naključna spremenljivka X ima torej števno zalogo vrednosti. Poissonova porazdelitev izhaja iz binomske porazdelitve. Pri binomski porazdelitvi zaporedoma opazujemo n Bernoullijevih poskusov, torej preprostih poskusov, ki imajo samo dva možna izida. Zaloga vrednosti spremenljivke X v tem primeru vključuje samo dve vrednosti, običajno ju označimo z 0 in 1.

Poissonova porazdelitev služi kot aproksimacija binomske porazdelitve, le da sedaj število izidov opazujemo v časovnem intervalu in ne več v n ponovitvah poskusa. Ta porazdelitev je znana kot porazdelitev redkih dogodkov. Opazovani dogodek se zgodi redko, čeprav ima veliko možnosti, da se zgodi. Kot primer si lahko predstavljamo nesreče v prometu. Prometa je na cestah veliko in zato je velika možnost, da se zgodi nesreča.

Naj bo $\lambda > 0$ neko pozitivno realno število, ki je enako pričakovanemu številu dogodkov, ki se zgodijo v opazovanem obdobju. Naj še število k predstavlja število pojavov dogodka.

Poissonovo porazdelitev označimo kot $Poiss[\lambda]$. Verjetnostna funkcija Poissonove porazdelitve je enaka

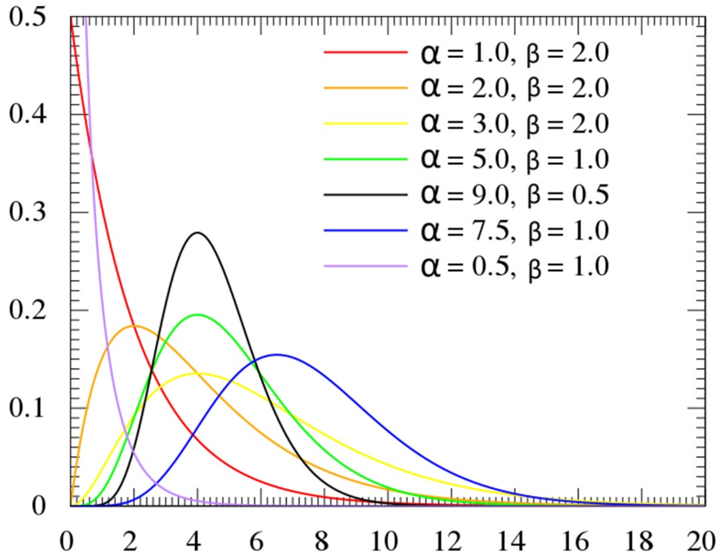
$$P[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \tag{1.2}$$

1.1.2 Gamma porazdelitev

Gamma porazdelitev je dvoparametrična družina verjetnostnih porazdelitev. Označimo jo z oznako $\Gamma(\alpha, \beta)$, kjer prvi parameter imenujmo verjetnostni parameter, drugega pa srednja vrednost. Naključna spremenljivka X je porazdeljena po Gamma porazdelitvi $\Gamma(\alpha, \beta)$, če je njena gostota verjetnosti enaka

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}; & x \geq 0 \\ 0; & x < 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

kjer je $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$ predpis Eulerjeve funkcije. Na sliki 1.1 je prikazana verjetnostna funkcija Gamma porazdelitve ob različnih vrednostih parametrov α in β.



Slika 1.1: Verjetnostna funkcija Gamma porazdelitve.

1.2 Cenilke in metode za pridobivanje cenilk

1.2.1 Cenilka parametra

Statistika je veda o metodah zbiranja in analize podatkov o množičnih pojavih.

Naj bo G statistična množica oz. populacija, ki vsebuje posamezne statstične enote e_i. Vsako podmnožico množice G imenujemo vzorec. Opazovano ali merjeno lastnost, ki jo imajo statistične enote, imenujemo statistična spremenljivka. Naj bo X statistična spremenljivka na G, q populacijski parameter ter H vzorec, ki vsebuje spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Definicija 1.7 *Cenilka parametra q je ocena populacijskega parametra $C_q = C(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, ki je namenjena ocenjevanju parametra q.*

Definicija 1.8 *Točkovna ocena parametra q je vrednost cenilke $C_q = C_q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ izračunana na konkretnih vrednostih $x_1, x_2, \ldots, x_n$.*

1.2.2 Metode za pridobivanje cenilk

Poglejmo si dve metodi za pridobivanje cenilk.

Metoda momentov

Naj bo X zvezna naključna spremenljivka. Naj bo njena porazdelitvena funkcija F_X odvisna še od m neznanih parametrov $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Predpis porazdelitvene funkcije torej zapišemo kot $F_X(x, q_1, q_2, \ldots, q_m)$. Predpostavimo še, da imamo podan vzorec velikosti n enot in izračunamo prvih m začetnih momentov

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = Z_1(q_1, q_2, \ldots, q_m), \\
Z_2 &= \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = Z_2(q_1, q_2, \ldots, q_m), \\
&\vdots \\
Z_m &= \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^m = Z_m(q_1, q_2, \ldots, q_m).
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Če lahko iz enačbe (1.4) izrazimo parametre $q_1, q_2, \ldots, q_m$ kot funkcije začetnih momentov, kot je to prikazano pod enačbo (1.5), potem pravimo, da smo dobili cenilke $C_1, C_2, \ldots, C_m$

parametrov $q_1, q_2, \ldots, q_m$ po metodi momentov.

$$\begin{aligned} q_1 &= C_1(Z_1, Z_2, \ldots, Z_m) = C_1(X_1, X_2, \ldots, X_m), \\ q_2 &= C_2(Z_1, Z_2, \ldots, Z_m) = C_2(X_1, X_2, \ldots, X_m), \\ &\vdots \\ q_m &= C_m(Z_1, Z_2, \ldots, Z_m) = C_m(X_1, X_2, \ldots, X_m). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Metoda največjega verjetja

Naj bo X naključna spremenljivka, ki je porazdeljena zvezno z gostoto, ki ima predpis $p(x, q_1, q_2, \ldots, q_m)$ in je odvisna od m parametrov $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Denimo, da imamo podanih n enot. Gostota naključnega vektorja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ se imenuje funkcija verjetja in jo zapišemo na naslednji način:

$$L(x_1, \ldots, x_n, q_1, \ldots, q_m) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, q_1, q_2, \ldots, q_m). \tag{1.6}$$

Dobili smo funkcijo, ki je odvisna od parametrov $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Denimo, da funkcija L doseže maksimum pri parametrih $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_m$. Potem pravimo, da smo dobili cenilke

$$\begin{aligned} C_1 &= \bar{q}_1(X_1, X_2, \ldots, X_n), \\ C_2 &= \bar{q}_2(X_1, X_2, \ldots, X_n), \\ &\vdots \\ C_m &= \bar{q}_m(X_1, X_2, \ldots, X_n) \end{aligned} \tag{1.7}$$

parametrov $q_1, q_2, \ldots, q_m$ po metodi največjega verjetja. V nadaljevanju bo oznaka *strešica* ($\wedge$) nad posamezno vrednostjo predstavljala oceno te vrednosti

Če imamo začetne podatke podane v obliki logaritmov, funkcijo verjetja imenujemo log-funkcija verjetja.

Poglavje 2

Teorija o zavarovanju in škodnih rezervacijah

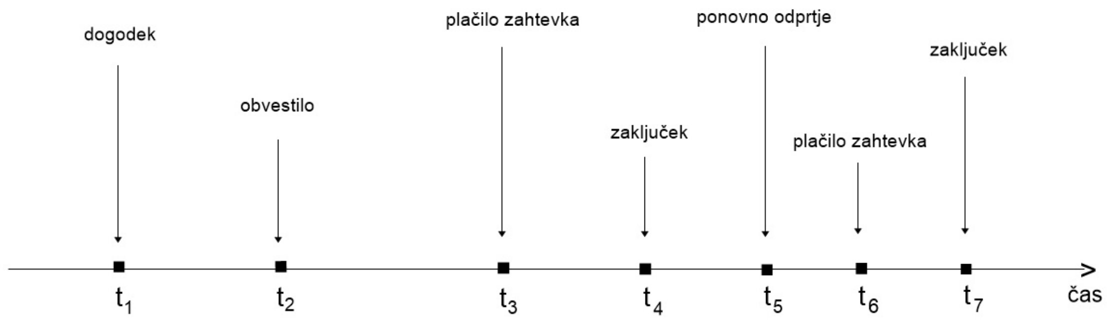
2.1 Neživljenjsko zavarovanje in zahtevek

Zavarovanje je pojem, ki predstavlja zaščito pred finančno izgubo. Podjetje, ki zagotavlja zavarovanje, imenujemo zavarovalnica. Podjetje ali osebo, ki si zagotovi to zavarovanje, pa imenujemo zavarovanec.

Ločimo med življenjskim in neživljenjskim zavarovanjem. Življenjska zavarovanja temeljijo na zavarovanju fizičnih oseb in njihovih potreb. Poznamo na primer življenjsko zavarovnje v primeru smrti, življenjsko zavarovanje za delovno nezmožnost, življenjsko zavarovanje kreditojemalcev in različna zavarovanja za doživetje. Neživljenjska zavarovanja pa predstavljajo avtomobilska zavarovanja, zavarovanja nepremičnin in ostala zavarovanja materialnih dobrin. Življenjska zavarovanja temeljijo na verjetnosti s finančno matematiko, neživljenjska zavarovanja pa običajno zgolj na verjetnosti. V magistrski nalogi bomo obravnavali neživljenjska zavarovanja.

Zavarovanje je torej pogodba sklenjena med zavarovalnico in zavarovancem. Ta zagotavlja, da zavarovanec od zavarovalnice prejme izplačilo ob določenih dogodkih. Višina tega izplačila je večinoma odvisna od okoliščin, v katerih se dani dogodek zgodi. Pravico zavarovanca do te vsote izplačila in skupek dejstev, ki ustvarja to pravico ter izpolnitev le te od zavarovalnice, imenujemo zahtevek zavarovanca do zavarovalnice. Vrednost, ki jo ta zahtevek predstavlja, imenujemo vrednost zahtevka oziroma vrednost izgube. Plačilo, ki pokrije to vrednost, imenujemo plačilo zahtevka.

Na sliki 2.1 je prikazan časovni potek posameznega zahtevka. Čas t_1 prikazuje datum nastanka zahtevka. To je datum, ko se je zgodil dogodek, na katerega se navezuje dani



Slika 2.1: Časovna črta posameznega zahtevka.

zahtevek. V času t_2 je zavarovalnica obveščena o zahtevku. Ta zahtevek ne bo poravnan v istem trenutku. Časovni zamik običajno povzročijo administrativne zadeve. Plačilo zahtevka zato nastopi v času t_3 (izplačilo je lahko v večih manjših plačilih in v časovnem zamiku). Ko je plačilo zahtevka poravnano, zavarovalnica označi obravnavo tega zahtevka kot zaključeno, kar je prikazano na sliki v času t_4. Včasih se zgodi, da pride do ponovnega odprtja primera. To se lahko zgodi zaradi kakšne napake ali naknadnih informacij. To je na premici prikazano v času t_5. Potem se naredi ponovni izračun in v času t_6 pride do ponovnega izplačila zahtevka. Nato pa se primer znova zaključi, kar je prikazano v času t_7.

Zahtevek predstavlja pravico zavarovanca do nekega zneska ob določenih pogojih. Nas bo dejansko zanimala samo vrednost zahtevka oziroma plačilo zahtevka, zato bomo to vrednost v prihodnje predstavljali z besedo škoda.

2.2 Škodne rezervacije

Rezervacijo sredstev za plačilo zahtevkov imenujemo škodne rezervacije. Te predstavljajo sredstva, ki jih zavarovalnice namenijo za plačila zavarovancem, ki so že vložili, ali se pričakuje, da bodo vložili, prošnjo za plačilo škode. Zavarovalnice uporabljajo sklad za izplačilo nastalih škod, ki jih je še treba poravnati.

Zavarovanci plačujejo zavarovalno kritje, da se zaščitijo pred finančno izgubo. Ker zavarovalnica prevzame to tveganje, zavarovancem zaračunava premije. Pri sklepanju takšne pogodbe se zavarovalnica zaveže, da bo prevezela škodo pri nastanku dogodka, katerega zajema ta pogodba. Sprejeti škodo pomeni izplačati škodo zavarovanim osebam, ki bodo vložile upravičen zahtevek.

Vsako leto se zavarovalnice soočajo z zahtevki, ki so vloženi proti zavarovalnim policam, ki jih prodajajo. Na primer zavarovanec avtomobilskega zavarovanja, ki je udeležen v nesreči, bo vložil zahtevek za povrnitev škode na njegovem avtomobilu.

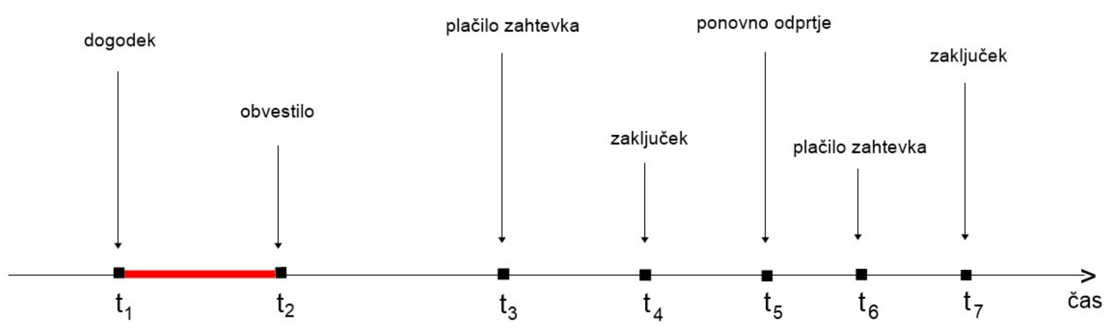
Nekatere škode je lahko oceniti in jih poravnati. Medtem pa je veliko primerov, ki so bolj kompleksni in njihova poravnava traja tudi več let.

Zavarovalnica zato vsaki škodi določi škodno rezervacijo, ki odraža najboljšo oceno zneska poravnave. Vrednost neporavnane škode je vedno aktuarska ocena, saj dejanska vrednost škode ni znana do poravnave. To vrednost je mogoče izračunati subjektivno z uporabo presoje zavarovalnice ali statistično z uporabo preteklih podatkov.

Poglejmo si primer. Recimo, da neko podjetje zagotavlja zavarovanje doma prebivalcem Združenih držav Amerike. Pojavi se nevihta, ki uniči veliko lastnine prebivalcem Floride, ki jo imajo zavarovano pri tem podjetju. To podjetje ve, da bo prejelo veliko zahtevkov za poravnavo škode, čeprav še nobena izmed teh škod ni bila prijavljena. V ta namen podjetje naredi oceno škode in potem sredstva, ki pokrijejo to oceno, namenijo za škodne rezervacije.

Denar, ki je namenjen za škodne rezervacije, se pridobi iz dela zavarovalnih premij, ki jih zavarovanci plačujejo tekom njihove zavarovalne pogodbe.

2.3 Škode IBNR in njihova ocena



Slika 2.2: Časovna črta posameznega zahtevka in pojav škode IBNR.

Na sliki 2.2 vidimo označen interval med časoma t_1 in t_2. Na tem intervalu je zavarovalnica odgovorna za plačilo nastale škode zavarovancu, a še ne ve, da ta zahtevek sploh obstaja, saj še o tem ni bila obveščena. Na tem intervalu se torej škoda pojavi, a še ni prijavljena zavarovalnici. Zato se ta škoda imenuje škoda IBNR (incurred but not reported). V večini primerov se odgovornost za poravnavo škode pripiše zavarovalnici na mestu nastanka škode, torej v času t_1, čeprav ji ta čas ni poznan.

Škode IBNR lahko ocenimo samo kot celoto nekega statističnega povprečja. Večina aktuarskih ocen neporavnih izgub je narejena s pomočjo skupka škod, ne glede na to ali so že prijavljene ali ne.

V naslednjem poglavju bomo najprej ocenili število škod IBNR. Najprej bodo predstavljene metode, ki temeljijo na finančni izpostavljenosti, nato pa še normalizirane metode. S pomočjo teh dveh postopkov bomo kasneje izpeljali metodo veriženja.

Nato se bomo posvetili še oceni vrednosti škod IBNR. Tudi tu si bomo pogledali več metod. Najprej se bomo posvetili najpogosteje uporabljeni metodi, to je metodi veriženja, kasneje pa še Bornhuetter-Fergusonovi metodi, individualni oceni škode in metodi separacije.

Poglavje 3

Ocena števila škod IBNR

3.1 Uvodni pojmi

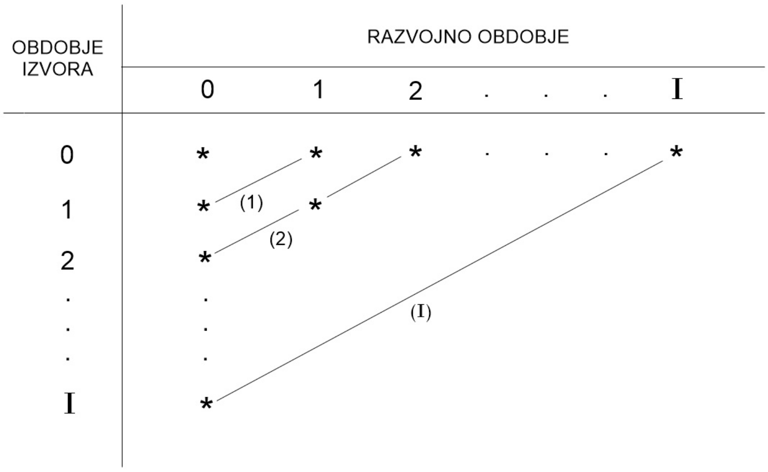
Naj i predstavlja obdobje pojava oziramo nastanka škode. To je lahko koledarski mesec, leto ali podobno obdobje, ki vsebuje datum pojava škode. Vse škode, ki se pojavijo v enakem i-tem obdobju, obravnavamo kot eno skupino. Obdobje, v katerem se pojavi prvi zahtevek, označimo z $i = 0$ in obdobje, v katerem se pojavi zadnja nastala škoda, označimo z $i = I$. Iz tega vidimo, da velja naslednja omejitev: $0 \leq i \leq I$.

Naj bo $i \in [0, I]$. Z oznakami i, $i{+}1$, $i{+}2$, $\ldots$ beležimo opažanja, ki jih imenujemo koledarska obdobja. Te pa označimo s števili 0, 1, 2, $\ldots$, ki jih imenujemo razvojna obdobja. Na koledarsko obdobje $i + j$ lahko torej gledamo kot na razvojno obdobje j od obdobja i.

Naj bo $k = i + j$ neko koledarsko obdobje, ki ga preindeksiramo tako, da velja $k = 0$. Torej $k = 0$ predstavlja obdobje, v katerem se je pojavila prva škoda. Koledarsko obdobje k vsebuje prereze različnih razvojnih obdobij zahtevkov, ki so se pojavili v različnih obdobjih. To koledarsko obdobje imenujemo izkušenjsko obdobje k.

Včasih je bolj uporabno, če gledamo razvojna obdobja glede na obvestilo zahtevka zavarovalnici, kot pa na pojav zahtevka. Izraz obdobje izvora lahko tako predstavlja čas pojava zahtevka ali obvestilo zahtevka zavarovalnici.

Na sliki 3.1 je prikazan diagram, ki predstavlja zveze med obdobjem izvora, razvojnim obdobjem in izkušenjskim obdobjem. Zadnje od teh je na sliki prikazano z oznakami v oklepajih. Položaj (i, j) v diagramu predstavlja celico (i, j). S pomočjo tega diagrama lahko razberemo neporavnane škode za skupke zahtevkov. Naj oznaka $C(i, j)$ predstavlja plačilo škode v celici (i, j). Neporavnane škode na koncu razvojnega obdobja j od obdobja



Slika 3.1: Zveze med obdobjem izvora, razvojnim in izkušenjskim obdobjem.

izvora i pa zapišemo kot

$$P(i,j) = \sum_{m=j+1}^{I} C(i,m). \tag{3.1}$$

Če vrednost $P(i,j)$ povežemo z izkušenjskim obdobjem k, dobimo

$$P(i,j) = \overline{P}(i,k) = \sum_{m=k-i+1}^{I} C(i,m), \tag{3.2}$$

kjer vrednost $\overline{P}(i,k)$ predstavlja enako vrednost kot je $P(i,j)$, le da je izražena z obdobjem izvora i in izkušenjskim obdobjem k.

Če je f neka funkcija odvisna od obdobja izvora i in razvojnega obdobja j, potem funkcija $\overline{f}$ predstavlja enako vrednost izraženo z obdobjem izvora i in izkušenjskim obdobjem k. Velja

$$\overline{f}(i,k) = f(i,j) = f(i,k-i). \tag{3.3}$$

Vpeljemo tudi krajši zapis za izraz (3.3):

$$\overline{f}(\cdot,k) = \sum_{i=0}^{I} \overline{f}(i,k). \tag{3.4}$$

S pomočjo teh oznak lahko zapišemo naslednjo enakost:

$$\overline{P}(k) = \sum_{i=0}^{I} \overline{P}(i,k) = \sum_{i=0}^{I} \sum_{m=k-i+1}^{\infty} C(i,m), \tag{3.5}$$

ki predstavlja skupno neporavnano škodo na koncu izkušenjskega obdobja k. Ta enačba nakazuje na to, da neporavnana škoda sestavlja vso škodo glede na vse celice (i, j), ki imajo obdobje izvora manjše od vrednosti I. Napoved oziroma ocena teh neporavnanih škod pomeni dopolnitev naše trikotne oblike podatkov.

Stroški zahtevkov so običajno podvrženi inflaciji. Vendar to ni enaka inflacija, kot jo poznamo pri cenah oziroma plačah. Ta nam predstavlja neko specifično obliko stroškov pri obravnavanih škodah. Bistvo te inflacije je, da lahko vpliva na vrednost škode tudi kasneje in ne samo v njenem obdobju izvora. Zato vpeljemo vrednost C^*, ki predstavlja enako vrednost kot C, le da pri tej vrednosti upoštevamo inflacijo. Osnovna ideja indeksiranih vrednosti C^* je ta, da se dve plačili, ki se navezujeta na enake okoliščine, ne razlikujeta. Recimo, da imamo dve plačili, ki se navezujeta na enaka dogodka, ki sta se zgodila v različnih časovnih obdobjih. Ker imamo časovni zamik, bi plačili škod bili različni zaradi inflacije. Indeksirane vrednosti pa poskrbijo, da so plačila enotna za enake okoliščine, ne glede na čas, v katerem se zgodijo.

Oceno teh neporavnanih škod torej izrazimo z indeksiranimi vrednostmi. Naj vrednost $C^*(i, j)$ predstavlja vrednost $C(i, j)$, da velja

$$C(i, j) = C^*(i, j)\,\frac{\lambda(k)}{\lambda_0}, \tag{3.6}$$

kjer je parameter $\lambda(k)$ primeren inflacijski indeks škod glede na izkušenjsko obdobje k in parameter λ_0 vrednost tega indeksa na določen datum.

V tem poglavju bomo obravnavali ocene števila škod IBNR. Tu bomo za obdobje izvora vzeli datum pojava zahtevka in ne obvestilo zahtevka, saj drugače ne moremo govoriti o škodah IBNR. Naj spremenljivka $N(i, j)$ predstavlja število zabeleženih oz. obveščenih škod pri zavarovalnici in spremenljivka $C(i, j)$ vrednost plačila škod.

Naj bo $0 \leq i \leq I$ obdobje izvora. Potem definiramo pričakovano vrednost števila zabeleženih škod na naslednji način:

$$E(N(i, j)) = e(i)\mu(j), \tag{3.7}$$

kjer je $N(i, j)$ naključna spremenljivka, $\mu(j)$ neka količina, ki definira porazdelitev obvestil preko razvojnih obdobij in ni odvisna od i, ter $e(i)$ finančna izpostavljenost. Finančna izpostavljenost predstavlja znesek, ki ga vlagatelj izgubi pri naložbi, če ta ne uspe. Na primer finančna izpostavljenost pri nakupu avtomobila bi bila začetna naložbena vsota brez zavarovalniškega dela. Torej alternativno ime za finančno izpostavljenost je tveganje.

Sedaj lahko enačbo (3.7) zapišemo kot

$$\frac{E(N(i, j))}{e(i)} = \mu(j). \tag{3.8}$$

V tem primeru lahko količino $\mu(j)$ obravnavamo kot relativno frekvenco škod v razvojnem obdobju j. V zapisu

$$\frac{E(N(i,\cdot))}{e(i)} = \mu(\cdot), \tag{3.9}$$

vrednost $\mu(\cdot)$ predstavlja relativno frekvenco pojavov škod v obdobju i. V abstraktnem matematičnem smislu lahko vrednost $e(i)$ interpretiramo kot količino, ki omogoča, da lahko vrednost $E(N(i,j))$ zapišemo kot produkt, oziroma omogoča, da lahko dvodimenzionalno odvisnost te količine reduciramo na enodimenzionalno, kot je prikazano v enačbi (3.8). V praktičnih primerih pa izraz $\frac{E(N(i,j))}{e(i)}$ aproksimiramo z vrednostjo $\mu(i,j)$,

$$\frac{E(N(i,j))}{e(i)} = \mu(i,j), \tag{3.10}$$

kjer imamo šibko odvisnost vrednosti $\mu(i,j)$ od parametra i. To pomeni, da je število $\mu(i_1,j) - \mu(i_2,j)$ poljubno majhno za vsak i_1, i_2 in j. Ta aproksimacija nam dopušča, da lahko na dano vrednost vplivamo tako s parametrom i kot tudi s parametrom j. Zaradi te lastnosti bo vrednost $\frac{E(N(i,j))}{e(i)}$ še vedno dober približek, ki ga bomo lahko uporabili za nadaljnje izračune.

3.2 Metode, ki temeljijo na finančni izpostavljenosti

Denimo, da je število $N(i,j)$ podano v standardni trikotni obliki, kot je prikazano na sliki 3.1. Škode IBNR ocenimo tako, da izpolnimo podano trikotno obliko. Torej, če imamo za $j = 0,1,\ldots,I-i$ podane podatke $N(i,j)$, poskušamo napovedati vrednost $N(i,j)$ za $j = I-i+1, I-i+2, \ldots$.

Recimo, da obstaja finančna izpostavljenost $e(i)$, ki zadošča enačbi (3.10). S spreminjanjem parametra i lahko vrednost $\mu(i,j)$ zapišemo kot

$$\mu(i,j) = f(i)\nu(j), \tag{3.11}$$

kjer je f neka predpisana funkcija od i, kot je na primer funkcija s predpisom $f(i) = \alpha + \beta i$. Ta funkcija predstavlja linearno naraščanje frekvence škod za ustrezna parametra α in β. Posplošitev tega modela dopušča spreminjanje funkcije f s parametrom j, torej

$$\mu(i,j) = f_j(i)\nu(j). \tag{3.12}$$

Nesmisleno pa je dovoliti popolno splošnost parametra j, saj bi potem bila prisotnost vrednosti $\nu(j)$ odveč oziroma nesmiselna.

Predpostavimo, da velja enačba (3.11). Če združimo to enačbo z enačbo (3.10), dobimo naslednje:

$$E(N(i,j)) = e(i)f(i)\nu(j). \tag{3.13}$$

Če predpostavimo, da je vrednost $N(i,j)$ porazdeljena po Poissonovi porazdelitvi, $N(i,j) \sim Poiss[e(i)\, f(i)\, \nu(j)]$, velja

$$N(\cdot,j) \sim Poiss\left[\nu(j)\sum_i e(i)f(i)\right]. \tag{3.14}$$

Vrednost $\nu(j)$ pa lahko ocenimo kot

$$\widehat{\nu}(j) = \frac{N(\cdot,j)}{\sum_i e(i)f(i)}, \tag{3.15}$$

kjer parameter $\widehat{\nu}(j)$ predstavlja oceno parametra $\nu(j)$. Ocena števila škod IBNR za obdobje izvora i je definirana z vrednostmi $e(i)$, $f(i)$ in $\widehat{\nu}(j)$ na naslednji način:

$$e(i)f(i)\sum_{j=I-i+1}^{\infty}\widehat{\nu}(j) = e(i)f(i)\left(\sum_{j=I-i+1}^{I} + \sum_{j=I+1}^{\infty}\right)\widehat{\nu}(j). \tag{3.16}$$

Ta predstavitev zajema dve komponenti za ocenjevanje števila škod IBNR. Prva temelji na znanih podatkih, torej za razvojna obdobja, ki so manjša od vrednosti I, druga pa temelji na nepoznanih podatkih, torej zajema razvojna obdobja, ki so večja od vrednosti I. V drugem primeru nimamo podatkov, da bi lahko direktno izračunali oceno parametra $\widehat{\nu}(j)$, kot je prikazano v enačbi (3.15). V tem primeru moramo vrednost $\widehat{\nu}(j)$ oceniti iz zaporedja vrednosti $\widehat{\nu}(0), \ldots, \widehat{\nu}(I)$. Poglejmo si ta postopek na naslednjem primeru.

3.2.1 Primer

Primer zajema 18 obdobij izvora, od leta 1978 do leta 1995, in posledično 17 razvojnih obdobij. Na sliki 3.2 je predstavljeno število škod IBNR glede na posamezno enoto. Predstavljenih imamo samo deset razvojnih obdobij, saj v kasnejših ni bilo zabeleženih nobenih vrednosti. Opazimo lahko, da vrednosti števil tekom časa padajo, še posebej v zadnjih izkušenjskih obdobjih.

V takšnih primerih je običajno, da za nadaljnje računanje vzamemo povprečja večih podskupin. Utežena povprečja so predstavljena na sliki 3.3. Utežena so s pomočjo vrednosti $e(i)\, f(i)$ in enačbe (3.15). Opazimo lahko, da je uteženo povprečje med letoma 1993 in 1995

Obdobje izvora	Število obveščenih škod v razvojnih obdobjih										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1978	514	267	39	11,2	8,4	7,0	4,2	1,4	0,0	0,0	1,4
1979	519	200	33	7,9	5,3	6,6	5,3	1,3	2,6	1,3	0,0
1980	522	187	29	17,2	11,1	10,1	8,1	1,0	0,0	0,0	1,0
1981	561	247	48	21,4	16,5	5,8	2,9	0,0	1,0	0,0	0,0
1982	582	193	37	15,0	2,8	6,6	0,0	0,9	0,0	0,0	0,0
1983	596	219	25	10,8	10,8	3,6	3,6	0,9	0,0	0,0	0,0
1984	583	205	46	8,7	7,0	3,5	5,2	0,9	0,0	0,0	0,0
1985	488	227	53	10,2	4,3	6,0	5,1	4,3	0,9	0,0	0,9
1986	472	228	26	21,9	9,7	10,5	4,9	1,6	0,8	0,0	
1987	434	175	34	14,3	9,6	7,2	4,0	1,6	0,0		
1988	388	203	37	16,8	11,4	3,0	6,1	0,0			
1989	422	150	21	12,2	8,6	2,9	6,4				
1990	369	128	15	7,8	5,9	3,3					
1991	379	127	18	5,6	4,4						
1992	414	104	12	7,4							
1993	364	112	24								
1994	381	93									
1995	375										

Slika 3.2: Število obveščenih škod.

manjše od uteženega povprečja med letoma 1990 in 1995, ki pa je manjše od povprečja vseh let.

Po drugi strani pa lahko opazimo, da se razlike zmanjšujejo, če povečujemo parameter j. Zaradi tega razloga vidimo, da je povprečje vseh let sprejemljivo za vrednosti parametra j, ki je večji od vrednosti šest ali sedem.

Pri osnovnem modelu, ki je predstavljen na sliki 3.3, so upoštevana samo utežena povprečja. Ta vsebujejo tudi kakšne nenavadne podatke, kot so na primer od četrtega razvojnega obdobja dalje. Zato ta model izboljšamo. Upoštevamo negativno eksponentno krivuljo za model od četrtega razvojnega obdobja dalje. Te vrednosti je potrebno upoštevati tudi pri izračunih za vrednosti $j > 4$. To negativno eksponentno krivuljo pa lahko uporabimo za izračune tudi od desetega razvojnega obdobja dalje za manjkajoče podatke.

Poglejmo si konkreten primer, kako deluje ta negativna eksponentna krivulja. Podrobneje si oglejmo podatke za leto 1989. Pri četrtem razvojnem obdobju vidimo, da je vrednost enaka $8,6$, pri petem $2,9$ in pri šestem $6,4$. Podatki nam tako povedo, da je bila zadnja škoda, ki se je zgodila v letu 1989, prijavljena leta 1995. Da vsota števil vseh škod sovpada z razpršenimi škodami preko let v tabeli, je število zabeleženih škod leta 1989 v šestem razvojnem obdobju večje od števila v petem razvojnem obdobju. Tega se želimo znebiti. Za to poskrbi negativna eksponentna krivulja, ki upošteva, da bo na primer zadnja škoda,

Utežena povprečja	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
vsi	449	170	29	12,3	8,2	5,6	4,7	1,3	0,5	0,1	0,4
zadnjih 6 izkušenjskih let	380	118	21	10,3	8,0	5,3	5,3	1,5	0,3	0,0	0,3
zadnja 3 leta	373	103	18	6,9	6,2	3,1	5,5	1,1	0,5	0,0	0,3
model	373	103	18	6,9	6,2	3,1	4,7	1,3	0,5	0,1	0,4
model (izboljšan)	373	103	18	6,9	6,2	3,9	2,1	1,1	0,6	0,3	0,2

Slika 3.3: Utežena povprečja.

ki se je zgodila leta 1989, prijavljena šele leta 1999. V tem primeru je uporabljena negativna eksponentna funkcija

$$\widehat{\nu}(j) = 3,87 \cdot (0,54)^{j-5}, \quad j \geq 5. \tag{3.17}$$

Po uporabi te funkcije so vrednosti pri izboljšanemu modelu na sliki 3.3 v padajočem vrstnem redu tudi pri kasnejših razvojnih obdobjih.

3.3 Metoda normalizacije

Pri izračunih za povprečno število zabeleženih zahtevkov velikokrat naletimo na problem določanja vrednosti finančne izpostavljenosti $e(i)$. V takšnih primerih enakost (3.7) nadomestimo z enačbo

$$E(N(i,j)) = \alpha(i)\mu(j), \tag{3.18}$$

kjer je $\alpha(i)$ nek abstrakten parameter, ki regulira število obvestil glede na obdobje izvora i. Vrednost $\mu(j)$ pa še vedno definira porazdelitev obvestil preko razvojnih obdobij. Iz te enačbe sledi enakost, ki je neodvisna od i:

$$\frac{E(N(i,j))}{E(N(i,0))} = \frac{\mu(j)}{\mu(0)}. \tag{3.19}$$

Ugotovimo, da lahko za računanje uporabimo razmerje $\frac{N(i,j)}{N(i,0)}$, če sta vrednosti, ki to razmerje predstavljata, stohastično neodvisni. V tem primeru je matematično upanje tega razmerja enako

$$E\left(\frac{N(i,j)}{N(i,0)}\right) = E(N(i,j)) \cdot E\left(\frac{1}{N(i,0)}\right). \tag{3.20}$$

Recimo, da ima vrednost $N(i,0)$ napako ε in je porazdeljena po Poissonovi porazdelitvi. Za napako ε velja, da je njena pričakovana vrednost enaka vrednosti 0, $E(\varepsilon) = 0$. Potem velja enakost

$$E\left(\frac{1}{N(i,0)}\right) = \left(\frac{1}{E(N(i,0))}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{E(N(i,0))}\right). \tag{3.21}$$

Iz enačb (3.20) in (3.21) dobimo enakost

$$E\left(\frac{N(i,j)}{N(i,0)}\right) = \frac{E(N(i,j))}{E(N(i,0))} \cdot \left(1 + \frac{1}{E(N(i,0))}\right). \tag{3.22}$$

To nakazuje, da je razmerje $\frac{N(i,j)}{N(i,0)}$ skoraj nepristrana vrednost za oceno $\frac{E(N(i,j))}{E(N(i,0))}$, ko je vrednost $E(N(i,0))$ veliko število.

Proces delitve vseh $N(i,j)$ za nek fiksen i z vrednostjo $N(i,0)$ bomo imenovali normalizacija. Ta proces služi skoraj istemu namenu kot prej deljenje s finančno izpostavljenostjo.

Zaradi dosedanjih izpeljav velja naslednja ocena:

$$E\left(\frac{N(i,j)}{N(i,0)}\right) = \frac{\mu(j)}{\mu(0)}. \tag{3.23}$$

Iz tega sledi

$$E\left(\frac{\sum\limits_i N(i,j)}{\sum\limits_i N(i,0)}\right) = \frac{\mu(j)}{\mu(0)}, \tag{3.24}$$

kjer vsote tečejo po vseh i, za katere obstajata vrednosti $N(i,0)$ in $N(i,j)$.

Zato je potem

$$\widehat{\nu}(j) = \frac{\sum\limits_i N(i,j)}{\sum\limits_i N(i,0)} \tag{3.25}$$

nepristrana ocena za razmerje $\frac{\mu(j)}{\mu(0)}$. Na podlagi enačbe (3.19) lahko vrednost $E(N(i,j))$ ocenimo z $N(i,0)\ \widehat{\nu}(j)$:

$$E(N(i,j)) = E(N(i,0)) \cdot \frac{\mu(j)}{\mu(0)}. \tag{3.26}$$

Predvideno število škod IBNR glede na obdobje izvora i je

$$N(i,0)\left(\sum_{j=I-i+1}^{I} + \sum_{j=I+1}^{\infty}\right)\widehat{\nu}(j). \tag{3.27}$$

3.4 Metoda veriženja

Metoda veriženja je ena izmed najbolj razširjenih metod za računanje škodnih rezervacij. Ime metode se nanaša na veriženje zaporedja razmerij v lestvico faktorjev, ki nam omogočajo, da s pomočjo prejšnjih podatkov napovemo predvideno končno vrednost.

V nalogi bodo predstavljene tri izpeljave te metode.

3.4.1 Prva izpeljava

Ta izpeljava metode bo povsem hevristična, a je to vseeno značilna oblika, ki se pogosto uporablja. Ta izpeljava je bila narejena s strani Macka (leto 1991), ki pa se je nanašala na Kremerja (leto 1985).

Denimo, da velja enačba (3.18). Postopek je enak kot pri metodi normalizacije, saj na začetku vzamemo razmerja, s katerimi želimo odpraviti učinek vrednosti $\alpha(i)$. Vendar namesto enačbe (3.19), vzamemo enačbo

$$\frac{E(A(i,j+1))}{E(A(i,j))} = \frac{\sum\limits_{m=0}^{j+1} \mu(m)}{\sum\limits_{m=0}^{j} \mu(m)}, \tag{3.28}$$

kjer vrednost $A(i,j)$ predstavlja kumulativno število škod in je definirana kot

$$A(i,j) = \sum_{m=0}^{j} N(i,m). \tag{3.29}$$

Za oceno parameta $\nu(j)$ lahko vzamemo razmerje $\frac{A(i,j+1)}{A(i,j)}$. Podobno lahko za to oceno vzamemo tudi kakšno kombinacijo teh vrednosti glede na različne vrednosti i, kot na primer

$$\widehat{\nu}(j) = \frac{\sum\limits_{i} A(i,j+1)}{\sum\limits_{i} A(i,j)}, \tag{3.30}$$

kjer dani vsoti tečeta po vseh vrednostih i, za katere sta defnirani vrednosti $A(i,j)$ in $A(i,j+1)$. Ta razmerja imenujemo verižni faktorji, starostni faktorji ali povezovalna razmerja. Nadaljnje vrednosti od $A(i,j)$ so ocenjene na naslednji način:

$$\widehat{A}(i,j) = A(i,I-i)\ \widehat{\nu}(I-i)\ \widehat{\nu}(I-i+1)\ \cdots\ \widehat{\nu}(j-1). \tag{3.31}$$

Poseben primer enačbe (3.31) je enačba

$$\widehat{A}(i,\infty) = A(i,I-i)\widehat{\pi}(I-i), \tag{3.32}$$

kjer je vrednost $\widehat{\pi}(I-i)$ definirana kot

$$\widehat{\pi}(I-i) = \prod_{m=0}^{\infty} \widehat{\nu}(I-i+m) \tag{3.33}$$

in jo imenujemo starost končnih faktorjev.

V naslednjih dveh izpeljavah bodo predstavljeni teoretični razlogi, zakaj uporabiti kumulativne podatke.

3.4.2 Druga izpeljava

Ta izpeljava temelji na strogo teoretičnih predpostavkah, zato je treba na $N(i,j)$ gledati kot na naključno spremenljivko. Predpostavimo, da je $N(i,j)$ porazdeljena po Poissonovi porazdelitvi:

$$N(i,j) \sim Poiss[\alpha(i)\,\mu(j)]. \tag{3.34}$$

Predpostavimo še, da so naključne spremenljivke $N(i,j)$ paroma neodvisne. Vidimo, da bo model (3.34) ostal enak, če pravilno spremenimo vrednosti parametrov. To lahko naredimo tako, da vse vrednosti $\alpha(i)$ zamenjamo z vrednostmi $k\alpha(i)$ in vse vrednosti $\mu(j)$ zamenjamo z vrednostmi $\frac{\mu(j)}{k}$, kjer je $k > 0$ neka konstanta. Če želimo, da se spremeni model ob spremembi parametrov, omejimo vrednost $\mu(j)$:

$$\sum_{j=0}^{J} \mu(j) = 1, \tag{3.35}$$

kjer je število J največja vrednost izmed vseh števil j, za vse obravnavane vrednosti $N(i,j)$. V tem primeru parameter $\mu(j)$ predstavlja delež vseh zabeleženih škod ob koncu razvojnega obdobja J, katera so bila zabeležena v razvojnem obdobju j.

Predpostavimo, da imamo zbrane podatke o številu škod v diagramu, kot je prikazano na sliki 3.1. Torej imamo podane vrednosti $N(i,j)$, kjer je $i = 0, 1, \ldots, I$ in $j = 0, 1, \ldots, I - i$.

Naslednje enačbe sta izpeljala Hachmeister in Stanard leta 1975. Pri enačbi (3.34) je log-funkcija verjetja od $N(i,j)$ enaka

$$L = \sum_{i=0}^{I} \sum_{j=0}^{I-i} \left(-\alpha(i)\mu(j) + N(i,j)(\log\, \alpha(i) + \log\, \mu(j))\right). \tag{3.36}$$

Potem veljata naslednji enakosti:

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha(i)} = \sum_{j=0}^{I-i} \left(-\mu(j) + \frac{N(i,j)}{\alpha(i)}\right), \tag{3.37}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu(j)} = \sum_{i=0}^{I-j} \left(-\alpha(i) + \frac{N(i,j)}{\mu(j)}\right). \tag{3.38}$$

Enačbi (3.37) in (3.38) enačimo z vrednostjo nič in parametra $\alpha(i)$ in $\mu(j)$ ocenimo z metodo največjega verjetja. Ti oceni zadoščata naslednjima enakostima:

$$A(i, I-i) = \widehat{\alpha}(i) \sum_{j=0}^{I-i} \widehat{\mu}(j), \tag{3.39}$$

$$\sum_{i=0}^{I-j} N(i,j) = \widehat{\mu}(j) \sum_{i=0}^{I-j} \widehat{\alpha}(i). \tag{3.40}$$

Izrek 3.1 [3] *Enačbi (3.39) in (3.40) nakazujeta oceno parametra $\nu(j)$ z metodo največjega verjetja glede na enačbo (3.30).*

Dokaz. V enačbo (3.39) vstavimo vrednost $i = 0$ in dobimo

$$A(0, I) = \widehat{\alpha}(0) \sum_{j=0}^{I} \widehat{\mu}(j). \tag{3.41}$$

Upoštevamo še enačbo (3.35) in dobimo

$$A(0, I) = \widehat{\alpha}(0) \cdot 1 = \widehat{\alpha}(0). \tag{3.42}$$

V enačbo (3.40) vstavimo vrednost $j = I$ in dobimo

$$\sum_{i=0}^{0} N(i, I) = \widehat{\mu}(I) \sum_{i=0}^{0} \widehat{\alpha}(i), \tag{3.43}$$

kar lahko zapišemo tudi na naslednji način:

$$N(0, I) = \widehat{\mu}(I)\widehat{\alpha}(0), \tag{3.44}$$

od koder lahko izrazimo vrednost $\widehat{\mu}(I)$.

Ko združimo enačbi (3.35) in (3.39) ter vstavimo vrednost $i = 1$, dobimo enačbo

$$A(1, I-1) = \widehat{\alpha}(1) \sum_{j=0}^{I-1} \widehat{\mu}(j) = \widehat{\alpha}(1) \left(\sum_{j=0}^{I} \widehat{\mu}(j) - \widehat{\mu}(I) \right) = \widehat{\alpha}(1)(1 - \widehat{\mu}(I)), \tag{3.45}$$

od koder lahko izrazimo vrednost $\widehat{\alpha}(1)$. Na podoben način lahko izračunamo potrebne ocene za parametre $\widehat{\mu}(I-1)$, $\widehat{\alpha}(2)$, $\widehat{\mu}(I-2)$ in tako naprej.

Sedaj uporabimo matematično indukcijo. Predpostavimo, da velja

$$\sum_{i=0}^{I-j} A(i,j) = \sum_{i=0}^{I-j} \widehat{\alpha}(i) \sum_{m=0}^{j} \widehat{\mu}(m), \tag{3.46}$$

za nek določen j.

Iz enačbe (3.42) sledi, da to velja za $j = I$. Iz enačb (3.40) in (3.46) sledi

$$\sum_{i=0}^{I-j} A(i,j-1) = \sum_{i=0}^{I-j} (A(i,j) - N(i,j)) = \sum_{i=0}^{I-j} \widehat{\alpha}(i) \sum_{m=0}^{j-1} \widehat{\mu}(m). \tag{3.47}$$

Iz enačb (3.46) in (3.47) nato sledi

$$\frac{\sum\limits_{i=0}^{I-j} A(i,j)}{\sum\limits_{i=0}^{I-j} A(i,j-1)} = \frac{\sum\limits_{m=0}^{j} \widehat{\mu}(m)}{\sum\limits_{m=0}^{j-1} \widehat{\mu}(m)}, \tag{3.48}$$

kar predstavlja enačbo (3.30). Od tod lahko zapišemo:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{I-j+1} A(i,j-1) &= \sum_{i=0}^{I-j} A(i,j-1) + A(I-j+1,j-1) \\ &= \sum_{i=0}^{I-j} \widehat{\alpha}(i) \sum_{m=0}^{j-1} \widehat{\mu}(m) \; + \; \widehat{\alpha}(I-j+1) \sum_{m=0}^{j-1} \widehat{\mu}(m) \\ &= \sum_{i=0}^{I-j+1} \widehat{\alpha}(i) \sum_{m=0}^{j-1} \widehat{\mu}(m), \end{aligned} \tag{3.49}$$

kar predstavlja enačbo (3.46), če j nadomestimo z $j-1$. □

Ocena vrednosti $A(i,j)$ po metodi največjega verjetja je podana na naslednji način:

$$\widehat{A}(i,j) = \widehat{\alpha}(i) \sum_{m=0}^{j} \widehat{\mu}(m) = A(i,I-i) \frac{\sum\limits_{m=0}^{j} \widehat{\mu}(m)}{\sum\limits_{m=0}^{I-i} \widehat{\mu}(m)}. \tag{3.50}$$

Ob upoštevanju enačbe (3.50) dobimo naslednjo enakost:

$$\begin{aligned} \widehat{A}(i,j) &= A(i,I-i) \frac{\sum_{m=0}^{j} \widehat{\mu}(m)}{\sum_{m=0}^{I-i} \widehat{\mu}(m)} \\ &= A(i,I-i) \frac{\sum_{m=0}^{j} \widehat{\mu}(m)}{\sum_{m=0}^{I-i} \widehat{\mu}(m)} \cdot \frac{\sum_{m=0}^{I-i+1} \widehat{\mu}(m)}{\sum_{m=0}^{I-i+1} \widehat{\mu}(m)} \cdot \frac{\sum_{m=0}^{I-i+2} \widehat{\mu}(m)}{\sum_{m=0}^{I-i+2} \widehat{\mu}(m)} \cdot \ldots \cdot \frac{\sum_{m=0}^{j-1} \widehat{\mu}(m)}{\sum_{m=0}^{j-1} \widehat{\mu}(m)} \\ &= A(i,I-i) \frac{\sum_{m=0}^{I-i+1} \widehat{\mu}(m)}{\sum_{m=0}^{I-i} \widehat{\mu}(m)} \cdot \frac{\sum_{m=0}^{I-i+2} \widehat{\mu}(m)}{\sum_{m=0}^{I-i+1} \widehat{\mu}(m)} \cdot \ldots \cdot \frac{\sum_{m=0}^{j} \widehat{\mu}(m)}{\sum_{m=0}^{j-1} \widehat{\mu}(m)}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Če upoštevamo še enačbi (3.48) in (3.30), lahko oceno $A(i,j)$ zapišemo kot

$$\begin{aligned}\widehat{A}(i,j) &= A(i,I-i)\,\frac{\sum_i A(i,I-i+1)}{\sum_i A(i,I-i)}\cdot\frac{\sum_i A(i,I-i+2)}{\sum_i A(i,I-i+1)}\cdot\ldots\cdot\frac{\sum_i A(i,j)}{\sum_i A(i,j-1)}\\ &= A(i,I-i)\,\widehat{\nu}(I-i)\,\widehat{\nu}(I-i+1)\cdots\widehat{\nu}(j-1).\end{aligned} \tag{3.52}$$

Vidimo, da dobimo enako oceno kot pri prvi izpeljavi metode veriženja. Pri tej izpeljavi je pomembna predpostavka (3.34), saj drugače zaradi Poissonove porazdelitve in metode največjega verjetja ne bi prišli do enakih zaključkov. Zaradi tega je ta izpeljava parametrične oblike.

3.4.3 Tretja izpeljava

Mack (leta 1993) je izpostavil, da lahko spremenljivko $N(i,j)$ modeliramo tudi neparametično. Enačbi (3.30) in (3.31) potem še vseeno držita, ne glede na porazdelitev $N(i,j)$.

Enačbo (3.34) zamenjamo s predpostavko

$$E(N(i,j+1)|A(i,j)) = x(j)\,A(i,j), \tag{3.53}$$

za nek parameter $x(j)$. Ta matematični zapis predstavlja pogojno matematično upanje, kar sovpada z našo matematično formulacijo. Torej, ta zapis nam predstavlja dejstvo, da poznamo vrednost $A(i,j)$, vrednost $N(i,j+1)$ pa nam je nepoznana. Zaradi tega razloga bomo ta isti zapis uporabljali tudi pri zapisu variance.

Ekvivaletno lahko enačbo (3.53) ocenimo na naslednji način:

$$E(A(i,j+1)|A(i,j)) = (1\ +\ x(j))\,A(i,j) = \nu(j)\,A(i,j). \tag{3.54}$$

Sedaj želimo oceniti vrednost $\nu(j)$. Zaradi neparametričnega načina ne moremo uporabiti metode največjega verjetja. Zato uporabimo metodo uteženih najmanjših kvadratov. Za to potrebujemo dodatno predpostavko o varianci:

$$\mathrm{Var}(N(i,j+1)|A(i,j)) = \sigma^2(j)A(i,j), \tag{3.55}$$

kjer je $\sigma^2(j) > 0$ neka konstanta. Potem velja

$$\sigma^2(j)\,A(i,j) = \mathrm{Var}(A(i,j+1)|A(i,j)). \tag{3.56}$$

Parameter $\nu(j)$ lahko ocenimo z metodo uteženih najmanjših kvadratov, ki minimizirajo naslednjo vrednost:

$$Q = \sum_{i=0}^{I-j-1} \frac{(A(i,j+1) - \widehat{\nu}(j)\, A(i,j))^2}{\sigma^2(j)\, A(i,j)}. \tag{3.57}$$

Velja

$$\frac{\partial Q}{\partial \widehat{\nu}(j)} = \frac{-2}{\sigma^2(j)} \sum_{i=0}^{I-j-1} (A(i,j+1) - \widehat{\nu}(j)\, A(i,j)). \tag{3.58}$$

Od tod sledi ocena po metodi uteženih najmanjših kvadratov za $\nu(j)$:

$$\widehat{\nu}(j) = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} A(i,j+1)}{\sum_{i=0}^{I-j-1} A(i,j)}, \tag{3.59}$$

ki predstavlja enačbo (3.30).

Za napoved vrednosti večkrat uporabimo enačbo (3.54), da dobimo naslednje:

$$\begin{aligned} E(A(i,j)|A(i,I-i)) &= E\left(E(A(i,j)|A(i,j-1))|A(i,I-i)\right) \\ &= E\left(E(A(i,j-1)\,\nu(j-1)|A(i,I-i)\right) \\ &= E\left(E(A(i,j-1)\,\nu(j-1)|A(i,j-2))|A(i,I-i)\right) \\ &\ \ \vdots \\ &= A(i,I-i)\,\nu(I-i)\,\nu(I-i+1)\,\ldots\,\nu(j-1), \end{aligned} \tag{3.60}$$

kar je predvideno po enačbi (3.31), kot tudi v prvi in drugi izpeljavi.

Ta izpeljava temelji na predpostavkah (3.53) in (3.55), predpostavke o porazdelitvi pa tu nimamo. Prav zaradi tega se je Mack zavzemal, da moramo ti dve enačbi v splošnem upoštevati kot predpostavki za metodo veriženja.

Kljub več različnim načinom oblikovanja metode veriženja, imajo vse tri izpeljave skupni vzorec obveščanja škod. Skupen imajo torej parameter $\mu(j)$, kot je definiran v enačbi (3.18), za različne vrednosti i. V tem primeru vidimo, da več kot imamo podatkov za pretekla obvestila, več ocen za prihodnja obvestila lahko izračunamo. To je razvidno iz enačbe (3.31), saj je sestavljena iz produka kumulativne vrednosti števila zabeleženih zahtevkov in verižnih faktorjev. Več kot imamo podatkov, več verižnih faktorjev je vključenih v izračun in posledično dobimo natančnejši rezultat.

Poglavje 4

Ocena vrednosti škod IBNR

4.1 Metoda veriženja

V drugem poglavju je bila metoda veriženja predstavljena kot metoda za napovedovanje števila škod IBNR. Izpeljali smo jo s pomočjo predpostavk (3.18) in (3.53). Ti dve predpostavki, glede na število obveščenih škod, lahko zlahka razširimo na druge spremenljivke, ki vsebujejo strukturo prerezov različnih obdobij, ki so dobljeni iz obdobij izvora in razvojnih obdobij.

Recimo, da je $X(i,j)$ spremenljivka, ki vsebuje strukturo prerezov različnih obdobij, in $Y(i,j)$ njena kumulativna vrednost. Potem velja

$$Y(i,j) = \sum_{m=0}^{j} X(i,m), \tag{4.1}$$

kar lahko primerjamo z enačbo (3.29) iz drugega poglavja. Predpostavimo lahko tudi, da velja

$$E(X(i,j)) = \alpha(i)\,\mu(j) \tag{4.2}$$

ali

$$E(X(i,j+1)|Y(i,j)) = x(j)\,Y(i,j). \tag{4.3}$$

Ti dve enačbi pa lahko primerjamo z enačbama (3.18) in (3.53), saj imata spremenljivki $X(i,j)$ in $Y(i,j)$ enake lastnosti kot spremenljivki $N(i,j)$ in $A(i,j)$.

Metodo veriženja, ki jo definiramo s pomočjo enačb (3.30) in (3.31), lahko uporabimo tako, da parameter $A(i,j)$ nadomestimo s parametrom $Y(i,j)$. Iz tega sledi ocena $\widehat{Y}(i,j)$ vrednosti $Y(i,j)$. V tem postopku bomo uporabili pretekle podatke. Torej bo ta ocena izpeljana hevristično, tako kot je bila narejena prva izpeljava metode veriženja v drugem poglavju. Alternativno pa jo lahko formalno izpeljemo tudi na podlagi enačbe (4.3), kot je bilo predstavljeno v tretji izpeljavi metode veriženja, če imamo ob tem še dodatno predpostavko:

$$\mathrm{Var}(X(i,j+1)|Y(i,j)) = \sigma^2(j)\,Y(i,j). \tag{4.4}$$

Pri drugi izpeljavi metode veriženja v drugem poglavju smo potrebovali predpostavko, da imamo Poissonovo porazdelitev. Podobno predpostavko bomo imeli sedaj, da je spremenljivka $X(i,j)$ porazdeljena po Poissonovi porazdelitvi.

4.1.1 Plačilo škode

Čisto plačilo

Naj bo $X(i,j) = C(i,j)$. Potem je $\widehat{Y}(i,j)$ ocena plačila škode in posledično tudi od neporavnane škode.

V splošnem je postopek enak kot pri ocenjevanju števila škod IBNR. Podatke imamo zbrane v trikotni obliki. Tudi sedaj se lahko zgodi, da imamo med podatki kakšno vrednost, ki bo izstopala oziroma ne bo v skladu z ostalimi vrednostmi. Zato ta model izboljšamo. Uporabimo podoben postopek kot je bil predstavljen na primeru v drugem poglavju. V splošnem prihaja do napak od drugega razvojnega obdobja dalje. Ta trend vpliva tudi na večje vrednosti razvojnih obdobij j, čeprav manj izrazito.

Plačilo prilagojeno inflaciji

Predstavljena metoda veriženja je bila zgrajena na alternativnih oblikah enačb (4.2) in (4.3). Nikjer pa ni bila upoštevana inflacija posameznih škod. Ta je prisotna v podatkih in zato je nujno, da jo upoštevamo tudi pri izračunih. V splošnem to pomeni, da večja kot bo inflacija, večja bo vrednost $X(i,j+1)$ v povezavi z vrednostjo $Y(i,j)$. Posledično se bo povečala tudi vrednost $\nu(j)$.

Da bomo lahko upoštevali inflacijo, bomo enačbi (4.2) in (4.3) nadomestili z naslednjima enačbama:

$$E(X^*(i,j)) = \alpha^*(i)\,\mu^*(j) \tag{4.5}$$

in

$$E(X^*(i,j+1)|Y^*(i,j)) = x^*(j)\,Y^*(1,j), \tag{4.6}$$

kjer vrednosti $X^*(i,j)$ in $Y^*(i,j)$ predstavljata vrednosti $X(i,j)$ in $Y(i,j)$ po pretvorbi teh zneskov v denarne enote s pomočjo inflacijskega indeksa škod. Parametri $\alpha^*(i)$, $\mu^*(j)$ in $x^*(j)$ so inflacijsko prilagojene vrednosti od $\alpha(i)$, $\mu(j)$ in $x(j)$.

Z upoštevanjem $X(i,j) = C(i,j)$ in enačb (4.5) in (4.6) dobimo naslednji enakosti:

$$E(C^*(i,j)) \;=\; \alpha^*(i)\,\mu^*(j) \tag{4.7}$$

in

$$E(C^*(i,j+1)|D^*(i,j)) \;=\; x^*(j)\,D^*(i,j), \tag{4.8}$$

kjer $Y(i,j) = D(i,j)$ predstavlja kumulativne vrednosti plačila škode.

Če pri enačbi (4.7) uporabimo enačbo (3.6), dobimo enakost

$$E(C(i,j)) \;=\; \frac{\alpha^*(i)\,\mu^*(j)\,\lambda(k)}{\lambda_0}. \tag{4.9}$$

To lahko primerjamo z neprilagojeno obliko enačbe (4.2) in dobimo

$$E(C(i,j)) \;=\; \alpha(i)\,\mu(j). \tag{4.10}$$

Razmislimo, pod katerimi pogoji sta enačbi (4.9) in (4.10) dosledni, torej, kdaj je inflacijsko prilagojena ali neprilagojena metoda veriženja dosledna. Primerjava enačb nakazuje, da lahko vrednost $\lambda(k) = \lambda(i+j)$ razdelimo na faktorje, ki so odvisni od parametra i oziroma parametra j:

$$\lambda(i+j) \;=\; \lambda_1(i)\,\lambda_2(j). \tag{4.11}$$

To nakazuje naslednje:

$$\begin{aligned}
\lambda(k) \;&=\; \lambda_1(0)\,\lambda_2(k) \;=\; \lambda_1(1)\,\lambda_2(k-1) \;=\; \ldots \;=\; \lambda_1(k-1)\,\lambda_2(1),\\
\lambda(k-1) \;&=\; \lambda_1(0)\,\lambda_2(k-1) \;=\; \lambda_1(1)\,\lambda_2(k-2) \;=\; \ldots \;=\; \lambda_1(k-1)\,\lambda_2(0).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Iz tega sledi:

$$\frac{\lambda(k)}{\lambda(k-1)} \;=\; \frac{\lambda_2(k)}{\lambda_2(k-1)} \;=\; \frac{\lambda_2(k-1)}{\lambda_2(k-2)} \;=\; \ldots \;=\; \frac{\lambda_2(1)}{\lambda_2(0)}. \tag{4.13}$$

Do enakega zaključka pridemo tudi, če na začetku namesto enačbe (4.7) vzamemo enačbo (4.8). Za enačbo (4.8) velja

$$\begin{aligned}E(C^*(i,j)|C^*(i,0)) &= x^*(j-1)\,E(D^*(i,j-1)|C^*(i,0))\\ &= x^*(j-1)\,E(D^*(i,j-2)\,+\,C^*(i,j-1)|C^*(i,0))\\ &= x^*(j-1)\,(1\,+\,x^*(j-2))\,E(D^*(i,j-2)\,|C^*(i,0))\\ &\;\;\vdots\\ &= x^*(j-1)\,(1\,+\,x^*(j-2))\,\ldots\,(1\,+\,x^*(0))\,C^*(i,0),\end{aligned} \tag{4.14}$$

kjer se $E(C^*(i,j))$ izraža v enaki obliki kot v enačbi (4.7). Enačba (4.13) nakazuje, da števila $\lambda_2(j)$ tvorijo geometrijsko zaporedje. Potem tudi $\lambda(k) = \lambda_1(0)\,\lambda_2(k)$ tvori geometrijsko zaporedje. To dokaže tudi naslednjo trditev.

Trditev 4.1 [3] *Če vrednosti $\alpha(\cdot)$ in $\mu(\cdot)$ nista omejeni, potem je inflaciji prilagojena in neprilagojena metoda veriženja dosledna natanko tedaj, ko je stopnja inflacije danih škod konstatna čez celotno obdobje.*

Recimo, da imamo konstantno stopnjo inflacije. Potem velja

$$\lambda(k) \,=\, \lambda(0)\,(1+f)^k, \tag{4.15}$$

kjer f predstavlja stopnjo inflacije v danem obdobju.

Če vstavimo enačbo (4.15) v enačbo (4.9), dobimo

$$E(C(i,j)) \,=\, \frac{\lambda(0)}{\lambda_0}\,\alpha^*(i)\,\mu^*(j)\,(1+f)^{i+j}. \tag{4.16}$$

V času načrtovanja prihodnjih vrednosti plačil škod, moramo pri inflaciji prilagojeni metodi veriženja upoštevati inflacijo škod. Pri metodi veriženja, ki ne upošteva inflacije, tega podatka ne potrebujemo. Za inflaciji neprilagojeno metodo prihodnja plačila zapišemo podobno kot smo zapisali enačbo (3.31):

$$\widehat{D}(i,j) \,=\, D(i,I-i)\,\widehat{\nu}(I-i)\,\cdots\,\widehat{\nu}(j-1), \tag{4.17}$$

kjer je vrednost $\widehat{\nu}(j)$ definirana na podoben način kot v enačbi (3.30):

$$\widehat{\nu}(j) \,=\, \frac{\sum\limits_{i=0}^{I-j-1} D(i,j+1)}{\sum\limits_{i=0}^{I-j-1} D(i,j)}. \tag{4.18}$$

Za inflaciji prilagojeni metodi veriženja pa zapišemo naslednje enakosti:

$$\widehat{D}^*(i,j) = D^*(i, I-i)\,\widehat{\nu}^*(I-i)\cdots\widehat{\nu}^*(j-1), \tag{4.19}$$

$$\widehat{C}^*(i,j) = \widehat{D}^*(i,j) - \widehat{D}^*(i,j-1), \tag{4.20}$$

$$\widehat{C}(i,j) = \frac{\widehat{C}^*(i,j)\,\lambda(i+j)}{\lambda_0}. \tag{4.21}$$

Vidimo, da inflaciji neprilagojena metoda veriženja omogoča dodatek za inflacijo. Za pretekle podatke lahko enačbo (4.9) zapišemo tako:

$$E(C(i,j)) = \frac{\lambda(0)}{\lambda_0}\,\alpha^*(i)\,\mu^*(j)\,(1+f)^{i+j}\cdot\frac{\lambda(i+j)}{\lambda(0)}\,(1+f)^{i+j}. \tag{4.22}$$

V tej enačbi je uporabljen splošni inflacijski indeks $\lambda(\cdot)$. Parameter f predstavlja neko splošno vrednost in ne konstantno stopnjo inflacije, kot jo je predstavljal v enačbi (4.15).

Prva dva faktorja na desni strani enačbe (4.22) se pojavita tudi v enačbi (4.16). To je vrednost, ki bi jo dobili z oceno $E(C(i,j))$, če bi f bila konstantna stopnja inflacije. Iz enačbe (4.18) lahko dobimo prvo oceno za $E(\widehat{\nu}(j))$:

$$E(\widehat{\nu}(j)) \approx \frac{E\left(\sum_{i=0}^{I-j-1} D(i,j+1)\right)}{E\left(\sum_{i=0}^{I-j-1} D(i,j)\right)} = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1}\alpha^*(i)\,(1+f)^i\sum_{m=0}^{j+1}\mu^*(m)\,(1+f)^m\,\phi(i+m)}{\sum_{i=0}^{I-j-1}\alpha^*(i)\,(1+f)^i\sum_{m=0}^{j}\mu^*(m)\,(1+f)^m\,\phi(i+m)}, \tag{4.23}$$

kjer je vrednost $\phi(k)$ definirana kot

$$\phi(k) = \frac{\lambda(k)}{\lambda(0)}(1+f)^k. \tag{4.24}$$

Naj velja naslednje:

$$\nu_{i,\phi}(j) = \frac{\sum_{m=0}^{j+1}\mu^*(m)\,(1+f)^m\,\phi(i+m)}{\sum_{m=0}^{j}\mu^*(m)\,(1+f)^m\,\phi(i+m)}. \tag{4.25}$$

Recimo, da velja $\phi(i+m)=1$. Ocenimo parameter $\nu_{i,\phi}$ na naslednji način:

$$E(\widehat{\nu}(j)) \approx \nu_f(j) = \frac{\sum_{m=0}^{j+1}\mu^*(m)\,(1+f)^m}{\sum_{m=0}^{j}\mu^*(m)\,(1+f)^m}, \tag{4.26}$$

Iz ocene (4.26) vidimo, da je parameter ν odvisen samo od vrednosti f in ne več od vrednosti i in ϕ. Zato oznako $\nu_{i,\phi}(j)$ nadomestimo z oznako $\nu_f(j)$.

To je primer konstantne stopnje inflacije f. Bolj zanimiv primer je, če vzamemo inflacijo, ki ni konstantna, torej velja neenakost $\phi(i+m) \neq 1$. Poglejmo si oceno parametra ν za različne vrednosti $\phi(i+m)$.

Najprej recimo, da je vrednost $\phi(i+m)$ blizu vrednosti 1. Ta vrednost nas pripelje do enake ocene (4.26). V primeru, da se vrednost $\phi(i+m)$ spreminja od vrednosti 1 do vrednosti $i+m$, pa opazimo, da se vrednost $\nu_{i,\phi}(j)$ spreminja v odvisnosti od parametrov i in j. To nas spet privede do enačbe (4.26).

Podobne ocene neporavnanih škod lahko dobimo na dva načina [3]:

1. z neprilagojeno metodo veriženja,
2. z inflaciji prilogojeni metodi veriženja, s stopnjo inflacije, ki je v grobem podobna povprečju inflacije preko vseh obravnavanih izkušenjskih obdobij.

4.2 Bornhuetter-Fergusonova metoda

Bornhuetter-Fergusonova metoda je tehnika za računanje ocen za škode IBNR. To metodo sta razvila aktuarja Bornhuetter in Ferguson leta 1975. Ta metoda je ena izmed najbolj razširjenih metod za računanje škod, takoj za metodo veriženja.

Metoda temelji na obveščenih škodah. Opira se na predpostavko, da so preostale neprijavljene škode odvisne od vseh ocenjenih škod in ne samo od trenutno prijavljenih škod. Ocenjene škode se pomnožijo z odstotkom neprijavljenih škod, da dobimo oceno neprijavljenih škod v danem trenutku. Odstotek neprijavljenih škod lahko izračunamo tako, da od števila ena odštejemo obratno vrednost kumulativnega števila faktorja, ki predstavlja izračun za razliko med vrednostjo začetnih škod in dejanske vrednosti škod, ki jo zavarovalnica izplača po določenem času. Da dobimo končno oceno škod, ocenjene neprijavljene škode prištejemo k prijavljenim.

4.3 Metoda separacije

Osnovna sestava metode separacije je v bistvu enaka kot pri inflacijsko prilagojeni metodi veriženja. Vendar pa moramo normalizirano vrednost $\alpha^*(i)$ natančno določiti in ne samo posredno opisati, tako kot smo to storili pri metodi veriženja. Ponavadi za to vrednost vzamemo največje število zahtevkov, ki se pojavijo v obdobju izvora i, torej $N(i, \cdot)$, ali nek približek temu številu. Poleg tega bo sedaj parameter $\lambda(k)$ predstavljal neznano funkcijo, ki jo bo potrebno oceniti. Tudi vrednost λ_0 sedaj ne poznamo in zato jo tudi izpustimo iz zapisa enačbe. V tem primeru bo parameter $\lambda(k)$ ostal inflacijski indeks, vendar brez določenega datuma. Enačbo (4.9) pretvorimo v naslednjo obliko:

$$E(C(i,j)) \;=\; N(i)\,\mu^*(j)\,\lambda(k), \tag{4.27}$$

kjer je $N(i)$ krajši zapis za $N(i, \cdot)$. Ekvivalentno lahko zapišemo

$$\frac{E(C(i,j))}{N(i)} \;=\; \mu^*(j)\,\lambda(k). \tag{4.28}$$

Struktura tega modela je prikazana na sliki 4.1.

OBDOBJE IZVORA	RAZVOJNO OBDOBJE				
	0	1	. . .	I -1	I
0	$\mu^*(0)\lambda(0)$	$\mu^*(1)\lambda(1)$	. . .	$\mu^*(I-1)\lambda(I-1)$	$\mu^*(I)\lambda(I)$
1	$\mu^*(0)\lambda(1)$	$\mu^*(1)\lambda(2)$	. . .	$\mu^*(I-1)\lambda(I)$	
2	$\mu^*(0)\lambda(2)$	$\mu^*(1)\lambda(3)$	. . .		
.	.	.			
.	.	.			
.	.	.			
I	$\mu^*(0)\lambda(I)$				

Slika 4.1: Struktura pri metodi separacije.

Predpostavimo, da velja

$$\sum_{j=0}^{I} \mu^*(j) \;=\; 1. \tag{4.29}$$

Vrednost $\mu^*(j)$ še vedno označuje porazdelitev škod preko obdobij izvora škod, ki so izplačane v razvojnem obdobju j. To daje natančnejšo razlago za vrednost $\lambda(k)$. Denimo, da se ta vrednost ne spremnija s spreminjanjem parametra k. Potem iz enačbe (4.28) dobimo

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{E(C(i,j))}{N(i)} \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} \mu^*(j)\,\lambda(k) \;=\; \lambda(k). \tag{4.30}$$

Opazimo, da je leva stran enačbe enaka povprečju velikosti škod iz obdobja izvora i, ki je neodvisna od parametra i. Predstavlja nam vsoto povprečij pričakovane vrednosti plačila zahtevkov preko vseh razvojnih obdobij j. Če želimo iz te vsote pridobiti predvideno velikost škode za eno izkušenjsko obdobje, moramo predpostaviti, da so vsi stroški v vseh izkušenjskih obdobjih enaki. To nam pove trditev 4.2.

Trditev 4.2 [3] *Denimo, da imamo separacijski model (4.27), v katerem velja omejitev (4.29). Potem vrednost $\lambda(k)$ označuje predvideno povprečno velikost škode, če so vsi stroški v vseh izkušenjskih obdobjih enaki kot so v obdobju k.*

Recimo, da vse razpoložljive celice (i, j) razporedimo v trikotno obliko za $i = 0, 1, \dots, I$ in $j = 0, 1, \dots, I - i$. Potem lahko iz enačbe (4.28) dobimo naslednji dve enakosti:

$$\sum_{i=0}^{I-j} \frac{E(C(i,j))}{N(i)} = \mu^*(j) \sum_{k=j}^{I} \lambda(k), \quad \text{za } j = 0, 1, \dots, I, \tag{4.31}$$

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{E(C(i,k-i))}{N(i)} = \lambda(k) \sum_{j=0}^{k} \mu^*(j), \quad \text{za } k = 0, 1, \dots, I. \tag{4.32}$$

Parametre, ki jih želimo oceniti, izrazimo na naslednji način:

$$\mu^*(j) = \frac{\sum_{i=0}^{I-j} \frac{E(C(i,j))}{N(i)}}{\sum_{k=j}^{I} \lambda(k)}, \tag{4.33}$$

$$\lambda(k) = \frac{\sum_{i=0}^{k} \frac{E(C(i,k-i))}{N(i)}}{1 - \sum_{j=k+1}^{\infty} \mu^*(j)}. \tag{4.34}$$

Hevristčni oceni teh parametrov sta podani kot

$$\widehat{\mu}^*(j) = \frac{\sum_{i=0}^{I-j} \frac{C(i,j)}{\widehat{N}(i)}}{\sum_{k=j}^{I} \widehat{\lambda}(k)}, \tag{4.35}$$

$$\widehat{\lambda}(k) = \frac{\sum_{i=0}^{k} \frac{C(i,k-i)}{\widehat{N}(i)}}{1 - \sum_{j=k+1}^{\infty} \widehat{\mu}^*(j)}. \tag{4.36}$$

Če želimo poznati vrednosti za parametre $\mu^*(I+1)$, $\mu^*(I+2)$, ..., morajo ti parametri biti pridobljeni iz nekega zunanjega oziroma dodatnega vira, saj mi teh vrednosti ne poznamo. Za nas so poznane vrednosti samo parametri, ki zajemajo obdobje izvora i in razvojna obdobja j, ki so manjša od vrednosti I. Za delo samo s podatki, ki so nam na voljo, je dobro definirati naslednji vrednosti:

$$\nu^*(j) = \frac{\mu^*(j)}{\sum_{m=0}^{I} \mu^*(m)}, \tag{4.37}$$

$$\kappa(k) = \lambda(k) \sum_{m=0}^{I} \mu^*(m). \tag{4.38}$$

Vrednost $\nu^*(j)$ še vedno interpretiramo kot delež plačane škode v obdobju izvora, vendar upoštevamo le plačila, ki so bila izplačana do razvojnega obdobja I. Parameter $\kappa(k)$ pa predstavlja vrednost $\lambda(k)$ pomnoženo s porazdelitvijo škod preko razvojnih obdobij do obdobja I.

Iz enačbe (4.28) dobimo

$$\nu^*(j)\,\kappa(k) = \mu^*(j)\,\lambda(k) = \frac{E(C(i,j))}{N(i)} \tag{4.39}$$

in posledično tudi

$$\sum_{j=0}^{I} \nu^*(j) = 1. \tag{4.40}$$

Če enačbi (4.37) in (3.40) zamenjamo z enačbama (4.35) in (4.36), lahko zapišemo alterntivno obliko enačb na naslednji način:

$$\widehat{\nu}^*(j) = \frac{\sum_{i=0}^{I-j} \frac{C(i,j)}{\widehat{N}(i)}}{\sum_{k=j}^{I} \widehat{\kappa}(k)}, \tag{4.41}$$

$$\widehat{\kappa}(k) = \frac{\sum_{i=0}^{k} \frac{C(i,k-i)}{\widehat{N}(i)}}{1 - \sum_{j=k+1}^{I} \widehat{\nu}^*(j)}, \tag{4.42}$$

za $j,k = 0,1,\dots,I$. Če se v imenovalcu enačbe (4.42) pojavi vsota, ki teče od večje vrednosti do manjše, velja dogovor, da je takšna vsota enaka 0.

Te parametre lahko ocenimo v naslednjem vrstnem redu: $\widehat{\kappa}(I)$, $\widehat{\nu}^*(j)$, $\widehat{\kappa}(I-1)$, $\ldots$, $\widehat{\nu}^*(0)$.

Oceno škode v (i,j)-ti celici pa lahko določimo s pomočjo enačb (4.27), (4.37) in (4.38) na naslednji način:

$$\widehat{C}(i,j) \;=\; \widehat{N}(i)\,\widehat{\nu}^*(j)\,\widehat{\kappa}(k). \tag{4.43}$$

4.4 Individualna ocena

Invidualna ocena je ocena neporavnane škode glede na posamezno škodo. Takšne ocene so tipično subjektivne, saj v obravnavi škode upoštevamo specifične značilnosti vsakega zahtevka posebej. Zato so te ocene uporabne pri oceni majhnega števila škod in ne tako zelo, če moramo oceniti veliko število škod.

Označimo neporavnano škodo z oznako Q in njeno oceno z oznako $\widehat{Q}$. Recimo, da obravnavamo n škod. Ocena napake pri vrednosti $\widehat{Q}$ je:

$$\begin{aligned}
E((\widehat{Q}-Q)^2) \;&=\; E((\widehat{Q}-E(\widehat{Q})+E(\widehat{Q})-Q)^2)\\
&= E(\widehat{Q}^2-\widehat{Q}E(\widehat{Q})+\widehat{Q}E(\widehat{Q})-QE(\widehat{Q})-QE(\widehat{Q})+Q^2)\\
&= E(\widehat{Q}^2)-E(\widehat{Q})E(\widehat{Q})+E(\widehat{Q})E(\widehat{Q})-E(Q)E(\widehat{Q})-E(Q)E(\widehat{Q})+E(Q^2)\\
&= E(\widehat{Q}^2)-E^2(\widehat{Q})+E^2(\widehat{Q})-2E(Q\widehat{Q})+Q^2\\
&= \mathrm{Var}(\widehat{Q})+(E(\widehat{Q})-Q)^2,
\end{aligned} \tag{4.44}$$

če predpostavimo, da sta vrednosti Q in $\widehat{Q}$ neodvisni. Ta predpostavka bo v večini primerov veljala, saj se vrednost Q nanaša na prihodnost, medtem ko je ocena $\widehat{Q}$ funkcija, ki temelji na že znanih podatkih. Predspotavimo, da velja ocena

$$E(\widehat{Q}) \;=\; (1+b)Q, \tag{4.45}$$

in za vsak n tudi ocena

$$\frac{\mathrm{Var}(\widehat{Q})}{E^2(\widehat{Q})} \;=\; \frac{\tau^2}{n}, \tag{4.46}$$

kjer sta parametra b in τ^2 konstanti. Potem iz enačbe (4.44) dobimo relativno napako

$$R \;=\; \tfrac{E((\widehat{Q}-Q)^2)}{Q^2} \;=\; \tfrac{\mathrm{Var}(\widehat{Q})}{E^2(\widehat{Q})}\left(\tfrac{E(\widehat{Q})}{Q}\right)^2+\left(\tfrac{E(\widehat{Q})}{Q}\;-\;1\right)^2 \;=\; \tfrac{(1+b)^2\,\tau^2}{n}+b^2. \tag{4.47}$$

Iz tega je razvidno, da v relativni napaki za velike vrednosti n prevladuje vrednost b, za majhne vrednosti n pa je relativna napaka močno odvisna od vrednosti τ^2.

Naj parameter θ predstavlja vektor z nekimi specifičnimi lastnostmi zahtevka. Naj vrednost $q(\theta)$ predstavlja neporavnano škodo danega zahtevka in vrednost $\widehat{q}(\theta)$ oceno od vrednosti $q(\theta)$.

Oceno vrednosti Q zapišemo na naslednji način:

$$\widehat{Q} = \sum_{i=1}^{n} \widehat{q}(\theta_i). \tag{4.48}$$

Vidimo, da je ocena neporavnane škode enaka vsoti ocen neporavnanih škod vsakega posameznega zahtevka.

Poglavje 5

Izboljšave in alternativne metode veriženja

Dokazano je, da obstaja povezava med vrednotenjem avtomobilskega zavarovanja in ocenjevanjem škod IBNR. Povezavo lahko naredimo, ker imamo v obeh primerih ocenjevanje prepleta vsaj dveh spremenljivk - pri avtomobilskem zavarovanju lahko na primer preučujemo preplet kategorizacije vozila in lokacijo uporabe vozila.

Kot alternativo za obe metodi ocenjevanja bomo opisali realistični parametrični primer za skupno vsoto škode. Ta temelji na Gamma porazdelitvi in daje možnost za ocenjevanje bonitete in računanja napak pri ocenjevanju. Kljub temu, da je ta metoda zadovoljiva, v avtomobilskem zavarovanju ni preveč poznana. Pri računanju škod IBNR pa je poznavanje te motode še slabše, čeprav je njena uporaba skoraj tako preprosta kot uporaba metode veriženja.

5.1 Metode za ocenjevanje avtomobilskega zavarovanja

V ceno avtomobilskega zavarovanja je v različnih državah vključeno različno število cenovnih spremenljivk. Tako dobimo preplet vsaj dveh spremenljivk, ki bi naj bile med seboj homogene. Potem je zagotovljeno, da vsaka celica v tabeli predstavlja enako premijo za dane zavarovalne police. Zaradi enostavnosti predpostavimo, da je cena avtomobilskega zavarovanja odvisna samo od dveh spremenljivk, ki sta razdeljeni v m in n razredov. Vseh mn celic označimo z oznako (i, j), kjer je $i = 1, \ldots, m$ in $j = 1, \ldots, n$. Naj spremenljivka n_{ij} predstavlja število let, v katerih so bile sklenjene zavarovalne police. Spremenljivka s_{ij}

pa predstavlja opazovano skupno vsoto škode, ki je realizacija naključne spremenljivke S_{ij}. Lahko se zgodi, da je za nekatere celice število n_{ij} tako majhno, da ni priporočljiva uporaba vrednosti s_{ij} kot edina osnova za računanje neto premij $\frac{E(S_{ij})}{n_{ij}}$ za takšne celice. Zaradi tega razloga robne parametre, ki pripomorejo k doslednejšemu modelu, x_i, $i = 1, \ldots, m$, in y_j, $j = 1, \ldots, n$, izračunanamo na enega izmed naslednjih načinov:

$$x_i\, y_j = \frac{E(S_{ij})}{n_{ij}} \tag{5.1}$$

ali

$$x_i + y_j = \frac{E(S_{ij})}{n_{ij}}. \tag{5.2}$$

Prvi način se imenuje multiplikativni pristop, drugi pa aditivni pristop. Ta način tudi zmanjšuje količino števil, ki so potrebna za opis cen premij, iz števila mn na število $m + n$. V nadaljevanju bomo uporabili multiplikativni pristop. Vse izpeljane metode veljajo tudi za aditivni pristop.

Eden izmed tipičnih problemov pri aktuarski matematiki je iskanje primernih robnih parametrov x_i in y_j. V ta namen se je v zadnjih tridesetih letih razvilo več metod za iskanje takšnih parametrov. Na kratko predstavimo tri metode.

5.1.1 Prva metoda

Prvo metodo sta predstavila Bailey in Simon leta 1960. Parametra x_i in y_j sta ocenila s pomočjo minimizacije naslednjega izraza:

$$Q = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{(s_{ij} - n_{ij}\, x_i\, y_j)^2}{n_{ij}\, x_i\, y_j} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{n_{ij} \left(\frac{s_{ij}}{n_{ij}} - x_i\, y_j \right)^2}{x_i\, y_j}. \tag{5.3}$$

Njuna osnovna predpostavka je bila, da je spremenljivka Q porazdeljena po porazdelitvi χ^2. To pa običajno ne drži.

5.1.2 Druga metoda

Nato sta leta 1963 Bailey in kasneje Jung, leta 1968, predlagala oceno parametrov x_i in y_j direktno iz danih enakostih:

$$\sum_{j=1}^{n} n_{ij}\, x_i\, y_j = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{5.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} n_{ij}\, x_i\, y_j = \sum_{i=1}^{m} s_{ij}, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{5.5}$$

Enačbi lahko rešimo z iteracijo. Recimo, da je na začetku $y_j = 1$. Potem iz enačbe (5.4) dobimo rezultat $x_i = \sum\limits_j \frac{s_{ij}}{n_{ij}}$, ki ga vstavimo v enačbo (5.5). Od tod potem dobimo novo vrednost za y_j in tako lahko nadaljujemo. Izkaže se, da zaporedji (x_i) in (y_j) začneta hitro konvergirati. Ta metoda se imenuje "marginal totals", ki se rešuje s podatki vpisanimi v pravokotno obliko oziroma tabelo. Če naključna spremenljivka S_{ij} označuje število škod namesto skupno vsoto škod, potem lahko to metodo predstavimo kot metodo največjega verjetja, kjer so vse vrednosti S_{ij} neodvisne in porazdeljene po Poissonovi porazdelitvi s parametrom $n_{ij}\, x_i\, y_j$. Vendar pa, če naključna spremenljivka S_{ij} predstavlja skupno vsoto škode, nimamo modela iz katerega bi lahko izpeljali zgornji enačbi. Zaradi tega razloga tudi ne moremo narediti ocene za zavarovanje.

5.1.3 Tretja metoda

Leta 1980 je Sant predlagal ocenjevanje parametrov x_i in y_j po metodi uteženih najmanjših kvadratov tako, da je minimiziral naslednji izraz:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{(s_{ij} - n_{ij}\, x_i\, y_j)^2}{n_{ij}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} n_{ij}\Big(\frac{s_{ij}}{n_{ij}} - x_i\, y_j\Big)^2. \tag{5.6}$$

Da preverimo zanesljivost dobljenega modela, lahko izvedemo nekaj regresijskih testov kot so R^2, analiza residualov, ocena napake, ampak samo pod predpostavko, da so spremenljivke S_{ij} normalno porazdeljene z varianco, ki je sorazmerna z vrednostjo n_{ij}. Vendar pa tudi ti dve predpostavki nista realistični.

5.2 Ocenjevanje škod IBNR in povezava z zavarovanjem

Poglejmo si sedaj ocenjevanje škod IBNR. Naj sedaj spremenljivki s_{ij} in S_{ij} predstavljata inflaciji prilagojeno skupno vrednost plačil, ki so bila izvršena v razvojnem obdobju $j = 1, \ldots, n$, za škode, ki so se zgodile v obdobju izvora $i = 1, \ldots, m$. Namenoma vzamemo enake oznake kot prej. Ker bomo delali s postopnimi oziroma delnimi vsotami škod, lahko predpostavimo, da so S_{ij} neodvisne.

Ena izmed najbolj pomembnih stvari pri ocenjevanju škod IBNR je predpostavka o multiplikativni strukturi

$$E(S_{ij}) = x_i\, y_j. \tag{5.7}$$

Parametra x_i in y_j ocenjujemo s pomočjo trikotne oblike, ki je sestavljena iz pridobljenih podatkov. Takšen način je uporabil Vylder leta 1978, ki je ocenil parametra x_i in y_j z minimizacijo naslednjega izraza:

$$\sum_{i,j} (s_{ij} - x_i\, y_j)^2, \tag{5.8}$$

kjer vsota teče po vseh i in j, za katere vrednost s_{ij} obstaja. Ta metoda sovpada s tretjo metodo, ki je bila predstavljena v prejšnjem poglavju, če je $n_{ij} = 1$. Analogno lahko vsako metodo za vrednotenje avtomobilskega zavarovanja, ki ocenjuje robne parametre x_i in y_j za preplet vsaj dveh spremenljivk, pretvorimo v metodo za ocenjevanje škodnih rezervacij. Vzeti moramo samo drugačno obliko podatkov za izračun; trikotno namesto pravokotne.

5.3 Parametrični model za ocenjevanje škod IBNR ali zavarovanja

V tem poglavju bomo uporabili enake oznake kot prej. Imamo torej mn celic, ki jih označimo z oznako (i, j). Vsaka celica vsebuje znano vrednost finančne izpostavljenosti. Naključna spremenljivka S_{ij} pa predstavlja skupno vsoto škode. V primeru škodnih rezervacij poznamo vrednosti s_{ij} v trikotni obliki. Po Ter Bergu iz leta 1980 predpostavimo, da je skupna vsota R_{ijk} posameznega koledarskega leta za $k = 1, \ldots, n_{ij}$ porazdeljena po Gamma porazdelitvi s srednjo vrednostjo m_{ij} in verjetnostnim parametrom α. Torej je porazdeljena z gostoto verjetnosti

$$p_{ij}(z) = \exp\left(\frac{-\alpha z}{m_{ij}}\right) z^{\alpha-1}\, \frac{\left(\frac{\alpha}{m_{ij}}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}. \tag{5.9}$$

V praksi večkrat pride do primera, da ima več koledarskih let k realizacijo $r_{ijk} = 0$ od naključne spremenljivke R_{ijk}. Zato moramo zagotoviti, da bo naša funkcija z veliko verjetnostjo podala rezultat blizu vrednosti 0. To pa zagotovimo tako, da upoštevamo, da je vrednost verjetnostnega parametra α manjša od 1. To je razvidno iz slike 1.1, kjer vidimo, da funkcija zavzame vrednosti blizu 1, kadar je parameter α blizu vrednosti 0. Če predpostavimo, da so vse celice (i, j) neodvisne, potem naša predpostavka o porazdeljenosti nakazuje, da je tudi $S_{ij} = R_{ij1} + R_{ij2} + \ldots$ porazdeljena po Gamma porazdelitvi s srednjo vrednostjo $n_{ij}\, m_{ij}$ in verjetnostnim parametrom $n_{ij}\, \alpha$. S takšno porazdelitvijo bomo delali tudi v prihodnje, saj običajno poznamo samo vrednosti s_{ij} in ne vrednosti R_{ijk}.

V multiplikativnem pristopu bomo nadalje predpostavili, da lahko vrednost m_{ij} predstavimo kot $m_{ij} = x_i\, y_j$, kjer neznana parametra x_i in y_j ocenimo z metodo največjega verjetja. Pod predpostavko, da so vse spremenljivke S_{ij} neodvisne, je funkcija verjetja na osnovi realizacije $s_{ij} > 0$ podana z enačbo

$$L = \prod_{i,j} \exp \frac{\frac{-\alpha\, s_{ij}}{x_i\, y_j} \left(\frac{\alpha\, s_{ij}}{x_i\, y_j}\right)^{n_{ij}\alpha}}{s_{ij}\, \Gamma(n_{ij}\alpha)}. \tag{5.10}$$

Potem je funkcija log-verjetja enaka

$$\log(L) \;=\; \sum \left(\frac{-\alpha s_{ij}}{x_i\, y_j} \;+\; n_{ij}\, \alpha\, \log(\alpha s_{ij}) \;-\; n_{ij}\, \alpha\, \log(x_i\, y_j) \;-\; \log(s_{ij}\Gamma(n_{ij}\alpha)) \right), \tag{5.11}$$

kjer vsota teče po vseh i in j za katere s_{ij} obstaja. Ocena za največje verjetje so tiste vrednosti x_i in y_j, ki maksimizirajo vrednost L oziroma ekvivalentno vrednost $\log(L)$. Podane so z naslednjima enačbama:

$$0 \;=\; \frac{\partial \log(L)}{\partial x_i} \;=\; \alpha \sum_j \left(\frac{s_{ij}}{x_i^2\, y_j} \;-\; \frac{n_{ij}}{x_i} \right), \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{5.12}$$

$$0 \;=\; \frac{\partial \log(L)}{\partial y_j} \;=\; \alpha \sum_i \left(\frac{s_{ij}}{x_i\, y_j^2} \;-\; \frac{n_{ij}}{y_j} \right), \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{5.13}$$

Vidimo lahko, da zadnji pogoj $\frac{\partial \log(L)}{\partial \alpha} = 0$ ni potreben za izračun ocen x_i in y_j. Od tod lahko vidimo, da sta oceni za parametra enaki

$$x_i \;=\; \sum_j \frac{s_{ij}}{y_j} \cdot \frac{1}{n_{ij}}, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{5.14}$$

$$y_j \;=\; \sum_i \frac{s_{ij}}{x_i} \cdot \frac{1}{n_{ij}}, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{5.15}$$

Ti dve enačbi bi lahko zapisali tudi drugače:

$$\sum_j n_{ij}\, x_i \;=\; \sum_j \frac{s_{ij}}{y_j}, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{5.16}$$

$$\sum_i n_{ij}\, y_j \;=\; \sum_i \frac{s_{ij}}{x_i}, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{5.17}$$

kar je podobno kot enačbi (5.4) in (5.5), ni pa ekvivaletno. Izkaže se, da ta metoda daje praktično enake rezultate kot metoda "marginal totals".

Zanimivo je dejstvo, da moramo funkciji verjetja

$$\sum_j \Big(\frac{s_{ij}}{(x_i \,+\, y_j)^2} \,-\, \frac{n_{ij}}{x_i \,+\, y_j} \Big) \;=\; 0, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{5.18}$$

$$\sum_i \Big(\frac{s_{ij}}{(x_i \,+\, y_j)^2} \,-\, \frac{n_{ij}}{x_i \,+\, y_j} \Big) \;=\; 0, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{5.19}$$

določiti s pomočjo neke numerične metode, saj se je algebraično ne da izraziti. Uporabimo lahko recimo Newtonovo oz. tangentno metodo.

5.4 Izboljšava metode

Pogosto bomo imeli težave najti ustrezeno mero za finančno izpostavljenost, še posebej pri škodnih rezervacijah.

Zato se velikokrat predpostavi, da je ta vrednost enaka 1. To seveda ni zadovoljivo, saj se pogosto preko razvojnih obdobij ta vrednost spreminja. Še bolj pomembna mera za finančno izpostavljenost je število t_{ij}, ki predstavlja vrednost pri tistih škodah iz obdobja izvira i, kjer pride do spremembe zneska tekom razvojnega obdobja j. Ta števila so pogosto dostopna v praksi.

Pri ocenjevaju premoženjskega zavarovanja se soočamo s podobnimi problemi. Tam se celo tveganje ene celice razlikuje glede na njeno velikost, kar se ponavadi meri z zavarovalno vsoto $C(i,j)$. Zato število tveganj $e(i)$ ni dobro merilo za finančno izpostavljenost celice (i,j), ampak se meri kar z zavarovalno vsoto $C(i,j)$. Vendar potem naša predpostavka ni več izpolnjena, saj postanejo celice med seboj odvisne. Zato opustimo naš model in poskusimo težavo rešiti z Gamma modelom za spremenljivko S_{ij} s srednjo vrednostjo $E(S_{ij} = n_{ij}\, x_i\, y_j)$ in verjetnostnim parametrom $n_{ij}\, \alpha$, kjer n_{ij} predstavlja zavarovalno vsoto. Parameter α nima več kakšne posebne interpretacije. Če poleg tega poznamo še skupno število škod t_{ij} za posamezno celico (i,j), lahko za oceno skupne vsote škode S_{ij} uporabimo spodaj opisani postopek, ki ima za predpostavko Gamma porazdelitev za vsako škodo posebej. Ta postopek se lahko uporabi tudi pri avtomobilskih zavarovanjih, če poznamo podatek t_{ij}.

V tem primeru bi morali vrednost t_{ij} uporabiti kot dodatno mero za finančno izpostavljenost in slediti naslednjmu postopku, ki se izvede v treh korakih:

1. Vrednost t_{ij} vzamemo kot mero za finančno izpostavljenost in predpostavimo, da ima vsaka ustrezna vsota škod Gamma porazdelitev s srednjo vrednostjo $m_{ij} = x_i \, y_j$ in verjetnostnim parametrom α.

2. Priredimo vrednost t_{ij} tako, da predpostavimo, da so spremenljivke T_{ij} med seboj neodvisne in da ima spremenljivka T_{ij} Poissonovo porazdelitev s parametrom $n_{ij} \, v_i \, w_j$. Nato naredimo oceno največjega verjetja parametrov v_i in w_j, ki temelji na realizaciji t_{ij} in je dobljena iz enačb (5.4) in (5.5), kjer vrednosti x_i, y_j in s_{ij} zamenjamo z vrednostmi v_i, w_j in t_{ij}.

3. $E(S_{ij})$ ocenimo z izrazom $n_{ij} \, v_i \, w_j \, x_i \, y_j$ na osnovi predpostavke, da je v vsaki celici število škod neodvisno od povprečja vrednosti škod.

Poglavje 6

Primer

V tem poglavju za primer uporabimo plačila škod iz nekega izmišljenega portfelja pri neživljenjskem zavarovanju. Želja zavarovalnice je določiti škodne rezervacije za poravnavo škod, ki so že bile prijavljene ali pa za škode, ki še sploh niso bile prijavljene. Predpostavimo, da ima zavarovalnica vse podatke o škodah, ki so že bile prijavljene.

Prvi korak, pri tvorbi trikotne oblike, je grupiranje podatkov. Vse škode, ki imajo enako leto za obdobje izvora, damo v eno skupino. Ti podatki so prikazani na sliki 6.1.

Obdobje izvora	Vrednost škode
2005	3963
2006	4975
2007	5873
2008	6401
2009	6563
2010	6358
2011	6918
2012	3072

Slika 6.1: Vrednosti škod v posameznem letu.

Običajno škode s strani zavarovalnice niso poravnane takoj, ampak postopoma tekom več let. Tako so tudi predstavljeni začetni podatki na sliki 6.2. Vsota vsake vrstice predstavlja vrednost škod za posamezno leto, ki sovpada z vrednostjo predstavljeno na sliki 6.1.

Predpostavimo, da je poljubna škoda glede na pripadajočo obdobje izvora najkasnje poravnana v sedmem razvojnem obdobju. Vsako okence tabele predstavlja delno vrednost plačila škode. Posamezna vrstica nam pove v katerem obdobju izvora je prišlo do škode, vsak stolpec pa v katerem razvojnem obdobju je bil del te škode poravnan. Vsaka diagonala, ki gre

Obdobje izvora	Razvojno obdobje							
	0	1	2	3	4	5	6	7
2005	1232	946	520	722	316	165	48	14
2006	1469	1201	708	845	461	235	56	
2007	1652	1416	959	954	605	287		
2008	1831	1634	1124	1087	725			
2009	2074	1919	1330	1240				
2010	2434	2263	1661					
2011	2810	4108						
2012	3072							

Slika 6.2: Postopno plačilo škod predstavljeno v trikotni obliki.

vzdolž označene modre diagonale na sliki 6.2, predstavlja k-to koledarsko leto. Torej, vsota vrednosti, ki je na modri diagonali, predstavlja vrednost škode, ki je bila poravnana v letu 2012.

Z zeleno barvo so označena okenca, ki predstavljajo že poznane podatke. Torej, vse prijavljene škode, ki so se zgodile v letih 2005 do 2012. Rdeča okenca pa predstavljajo prostor, kamor vpišemo ocene za škode, ki so se že zgodile, a še niso bile prijavljene, ali pa za škode, ki se še sploh niso zgodile.

Obdobje izvora	Razvojno obdobje							
	0	1	2	3	4	5	6	7
2005	1232	2178	2698	3420	3736	3901	3949	3963
2006	1469	2670	3378	4223	4684	4919	4975	
2007	1652	3068	4027	4981	5586	5873		
2008	1831	3465	4589	5676	6401			
2009	2074	3993	5323	6563				
2010	2434	4697	6358					
2011	2810	4918						
2012	3072							

Slika 6.3: Kumulativno postopno plačilo škod predstavljeno v trikotni obliki.

Vrednosti, ki so predstavljene na sliki 6.2, lahko predstavimo tudi s kumulativnimi vrednostmi škod. Za vsako leto oziroma obdobje izvora je vrednost delne škode za posamezno razvojno obdobje enaka vrednosti, ki je poravnana do tistega razvojnega obdobja. Kumulativna vrednost plačila škode je skupna vsota škod, ki je že bila poravnana do tistega razvojnega obdobja. Ta vrednost je torej vsota delnih vrednosti škod do danega razvojnega obdobja. Te kumulativne vrednosti so predstavljene na sliki 6.3.

Torej, po definiciji je vsota vrednosti, ki so na modri diagonali, enaka vrednosti vseh škod skozi vsa leta. Pričakovano dobimo enako vrednost, če v tabeli iz slike 6.1 seštejemo vse škode.

Ko imamo zbrane in tako urejene podatke, lahko začnemo z ocenjevanjem prihodnjih škod. Sprejmemo predpostavko, da se vzorec opazovanih škod in njihovo odplačevanje nadaljuje enako tudi v prihodnosti. Metoda, ki jo bomo uporabili, temelji na tej predpostavki. Očitno je, da bodo ocene za prihodnje škode bolj natančne, če bomo v naših izračunih uporabili vse vrednosti, ki jih poznamo. Metoda veriženja deluje na takšen način. Temelji na uporabi kumulatinih vrednosti podatkov preko vseh obdobij izvora in ne samo za nekaj preteklih let. Osnovna zahteva je, da so pridobljeni podatki točni in brez napak.

Vzorec opazovanih vrednosti škod se lahko spremeni zaradi:

- spremembe v zasnovi izdelka in njegovih pogojih,
- spremembe v postopkih prijave, ocenjevanju in poravnavi škode,
- spremembe v zakonih,
- nenormalno velikih ali majhnih vrednosti škod.

Če ugotovimo, da pretekli podatki nasprotujejo naši predpostavki, potem moramo podatke ustrezno prilagoditi ali uporabiti drugačno metodo za nadaljno ocenjevanje.

Če pobližje pogledamo sliko 6.2, vidimo, da je vrednost plačil škode v prvem razvojnem obdobju od izvornega obdobja 2011 razmeroma veliko. Zato sprejmemo sklep, da bomo to vrednost reducirali iz vrednosti 4108 na 2108. Predvidevamo torej, da ta škoda še ni bila v celoti poravnana v letu 2012, ampak, da bo plačilo škode popolno šele v naslednjih letih.

Obdobje izvora	Razvojno obdobje							
	0	1	2	3	4	5	6	7
2005	1232	2178	2698	3420	3736	3901	3949	3963
2006	1469	2670	3378	4223	4684	4919	4975	
2007	1652	3068	4027	4981	5586	5873		
2008	1831	3465	4589	5676	6401			
2009	2074	3993	5323	6563				
2010	2434	4697	6358					
2011	2810	4918						
2012	3072							
Faktor		1,8508	1,314	1,2422	1,1151	1,0491	1,0118	1,0035

3736+4684+5586+6401=20407

3420+4223+4981+5676=18300

20407 / 18300 = 1.1151

Slika 6.4: Izračun verižnih faktorjev.

Sprejmemo osnovno predpostavko, da je stopnja inflacije za določeno razvojno obdobje enaka za vsa obdobja izvora.

Najprej moramo izračunati verižne faktorje. Ocena teh faktorjev po metodi veriženja temelji na kumulativnih vrednostih čim večih podatkov za vsa obdobja izvora. Izračun verižnega faktorja za četrto razvojno obdobje je prikazan na sliki 6.4. Na tej sliki je prikazana tudi prilagoditev vrednosti pri letu 2011 in prvem razvojnem obdobju.

Obdobje izvora	Razvojno obdobje							
	0	1	2	3	4	5	6	7
2005	1232	2178	2698	3420	3736	3901	3949	3963
2006	1469	2670	3378	4223	4684	4919	4975	4993
2007	1652	3068	4027	4981	5586	5873	5942	5963
2008	1831	3465	4589	5676	6401	6401 · 1,0491 = 6715	6715 · 1,0118 = 6794	6794 · 1,0035 = 6818
2009	2074	3993	5323	6563	7319	7678	7768	7796
2010	2434	4697	6358	7898	8807	9239	9348	9381
2011	2810	4918	6462	8027	8952	9391	9502	9535
2012	3072	5686	7472	9281	10350	10858	10986	11025
Faktor		1,8508	1,314	1,2422	1,1151	1,0491	1,0118	1,0035

Slika 6.5: Izračun ocen prihodnjih kumulativnih vrednosti škod.

Verižni faktorji nam bodo pomagali pri izračunih ocen za prihodnje škode. Za vsako obdobje izvora uporabimo zadnji podani podatek in ga pomnožimo z oceno ustreznega faktorja. Tako dobimo oceno za kumulatino vrednost škode za naslednje razvojno obdobje. To je za škode, ki so nastale leta 2008, prikazano na sliki 6.5.

Obdobje izvora	Razvojno obdobje							
	0	1	2	3	4	5	6	7
2005	1232	946	520	722	316	165	48	14
2006	1469	1201	708	845	461	235	56	18
2007	1652	1416	959	954	605	287	69	21
2008	1831	1634	1124	1087	725	6715 - 6401 = 314	6794 - 6715 = 79	6818 - 6794 = 24
2009	2074	1919	1330	1240	756	359	91	28
2010	2434	2263	1661	1540	909	432	109	33
2011	2810	2108	1544	1565	924	439	111	34
2012	3072	2614	1785	1810	1069	508	128	39

Slika 6.6: Izračun vrednosti škod iz kumulativnih vrednosti škod.

V rdečih celicah so vpisane vrednosti, ki predstavljajo oceno kumulativnih vrednosti škod v prihodnjih letih. Te ocene vedno temeljijo na zadnje dostopnih kumulatvnih podatkih za trenutno obdobje izvora. Torej, ocena prihodnje kumulativne vrednosti temelji na vrednostih, ki so zapisane na zadnji zeleni diagonli v tabeli.

Sedaj lahko izračunamo še dejanske vrednosti škode za vsako celico. To je razlika med dvema zaporednima okencema v tabeli s kumulativnimi vrednostmi. Te vrednosti nato zapišemo v prvotno tabelo. Izračun za leto 2008 je prikazan na sliki 6.6.

Zadnji korak metode je grupiranje ocenjenih delnih vrednosti škod. Seštejemo vrednosti, ki bodo poravnane v istem koledarskem letu. Slika 6.7 prikazuje seštevanje vrednosti po posamezni diagonali in dopolnitev tabele, ki vsebuje ocene vrednosti škod za prihodnja leta.

Obdobje izvora	Razvojno obdobje							
	0	1	2	3	4	5	6	7
2005								
2006								18
2007							69	21
2008						314	79	24
2009					756	359	91	28
2010				1540	909	432	109	33
2011			1544	1565	924	439	111	34
2012		2614	1785	1810	1069	508	128	39

Obdobje izvora	Vrednost škode
2013	2614+...+18=6855
2014	1785+...+21=4718
2015	1810+...+24=3281
2016	1069+...+28=1645
2017	508+111+33=652
2018	128+34=162
2019	39

Slika 6.7: Ocene vrednosti škod v posameznem koledarskem letu.

Literatura

[1] T. Mack, *A Simple Parametric Model for Rating Automobile Insurance or Estimating IBNR Claims Reserves*, Astin Bull. 21 (1991) 93–109.

[2] A. Olivieri, E. Pitacco, *Introduction to Insurance Mathematics: Technical and Financial Features of Risk Transfers*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.

[3] G. Taylor, *Loss Reserving: An Actuarial Perspective*, Springer Science + Business Media New York, 2010.

[4] Arico idr., *Bornhuetter-Ferguson Initial Expected Loss Ratio.* (citirano 20. 8. 2019). Dostopno na naslovu:
`https://www.casact.org/pubs/forum/16fforum/01B-Initial-Expected-Loss-Ratio-Working-Party-Paper.pdf`

[5] T. Mack, *Measuring the Variability of Chain Ladder Reserve Estimates.* (citirano 24. 1. 2020). Dostopno na naslovu:
`https://www.casact.org/pubs/forum/94spforum/94spf101.pdf`

[6] Investopedia. (citirano 24.1.2020). Dostopno na naslovu:
`https://www.investopedia.com/`.

[7] *A practical guide to the use of the chain-ladder method for determing technical provisions for outstanding reported claims in non-life insurance.* (citirano 29. 8. 2019). Dostopno na naslovu:
`https://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/STK4540/h18/course-material/chainladder.pdf`

[8] *Verjetnostne porazdelitve.* (citirano 24. 1. 2020). Dostopno na naslovu:
`http://km.fgg.uni-lj.si/PREDMETI/sei/Verjetnostne%20porazdelitve.PDF`

[9] *Slučajne spremenljivke.* (citirano 24. 1. 2020). Dostopno na naslovu:
`http://km.fgg.uni-lj.si/PREDMETI/sei/Slucajne%20spremenljivke.PDF`