UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Oddelek za matematiko in računalništvo

MAGISTRSKO DELO

Nina Gracej

Maribor, 2020

UNIVERZA V MARIBORU
FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO
Oddelek za matematiko in računalništvo

Magistrsko delo

VERJETNOST V OSNOVNI IN SREDNJI ŠOLI

na študijskem programu 2. stopnje Izobraževalna matematika

Mentor:
dr. Dominik Benkovič

Kandidatka:
Nina Gracej

Somentor:
dr. Samo Repolusk

Maribor, 2020

ZAHVALA

Vse naše sanje se lahko uresničijo – Če le imamo pogum, da gremo z njimi.
∼ W.Disney ∼

Iskreno se zahvaljujem vsem, ki so me podpirali in mi stali od strani ves čas mojega študija in pisanja magistrskega dela.

Posebno rada bi se zahvalila mentorju, prof. dr. Dominiku Benkoviču, ki mi je bil ves čas pisanja v izjemno oporo. S svojimi nasveti, hitrim odzivanjem in pozitivnim odnosom me je vodil do konca. Zahvalila bi se tudi somentorju, prof. dr. Samu Repolusku za svetovanje ob zaključku magistrskega dela.

Na koncu gre največja zahvala moji družini. Brez vas in vaše podpore mi ne bi uspelo.

Vsem iskreno hvala.

Verjetnost v osnovni in srednji šoli

Program magistrskega dela:

Tema magistrskega dela je verjetnost v osnovni in srednji šoli. Uvodoma naj bodo predstavljeni temeljni pojmi teorije verjetnosti. Sledi naj pregled vsebine iz verjetnosti, ki jo pokrivajo učni načrti za matematiko v programu osnovne šole in v vseh srednješolskih programih. Osrednji del dela naj vsebuje kritičen pregled vsebine, ki jo obravnavajo slovenski učbeniki za matematiko v omenjenih programih. Posebej nas zanima: kako so pojmi definirani, ali obstajajo različni pristopi, pojavljanje morebitnih napak in nejasnosti. Diskusija naj bo podkrepljena s konkretnimi zgledi in naj vsebuje tudi predlog izboljšav.

Osnovni viri:

- Tiskani in elektronski učbeniki za matematiko v programu osnovne šole.
- Tiskani in elektronski učbeniki za matematiko v srednješolskih programih.
- D. Felda: Neverjetna verjetnost, Obzornik mat. fiz. 60 (2013).
- R. Jamnik: Verjetnostni račun in statistika, DMFA, 1986.
- M. Hladnik: Verjetnost in statistika, FRI, 2002.
- S. Ross: A first course in probability, Prentice Hall, 1997.
- A. Žakelj in drugi, Program osnovna šola – matematika – učni načrt, Ministrstvo za šolstvo in šport: Zavod RS za šolstvo, Ljubljana, 2011.
- Učni načrti za matematiko v programih srednješolskega izobraževanja.

mentor: dr. Dominik Benkovič

somentor: dr. Samo Repolusk

GRACEJ, N.: Verjetnost v osnovni in srednji šoli.
Magistrsko delo, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Oddelek za matematiko in računalništvo, 2020.

IZVLEČEK

V magistrskem delu je predstavljena obravnava verjetnosti v osnovnih, srednje poklicnih in strokovnih šolah ter gimnazijah. Magistrsko delo je razdeljeno na tri dele.

V prvem delu so predstavljeni osnovni pojmi in definicije, ki se obravnavajo v osnovnih, srednje poklicnih in strokovnih šolah ter gimnazijah.
V drugem delu so predstavljene vsebine, ki zajemajo področja verjetnosti in so zapisana v učnem načrtu za osnovne, srednje poklicne in strokovne šole ter gimnazije.
V tretjem delu magistrskega dela smo pregledali večino osnovnošolskih, srednješolskih in gimnazijskih učbenikov in opisali, katere vsebine iz področja verjetnosti obravnavajo. Prikazali smo tudi morebitne nejasnosti in napake, ki se pojavijo v pregledanih učbenikih.

Ob koncu smo spoznali, da so v učbenikih uporabljeni različni pristopi pri definiranju pojmov. Opazili smo, da se največja razlika pojavi med osnovnošolskimi in gimnazijskimi učbeniki.

Ključne besede: verjetnost, osnovna šola, srednja šola, gimnazija,
učni načrt, učbeniki, napake, nejasnosti

Math. Subj. Class. (2010): 97K50, 97D70.
UDK: 519.2:37.091.214(043.2)

GRACEJ, N.: Probability in elementary and secondary school.
Master Thesis, University of Maribor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Department of Mathematics and Computer Science, 2020.

ABSTRACT

The following master's thesis presents the treatment of probability in primary schools, secondary technical and vocational schools, and grammar schools. The master's thesis is divided into three parts. The first part introduces the basic concepts and definitions covered in primary schools, secondary technical and vocational and grammar schools. The second part presents the content dealing with areas of probability, which is determined by the syllabus for primary schools, secondary technical and vocational schools, and grammar schools. The third part of the master's thesis deals with an examination of most primary, secondary and grammar school textbooks, describing what content from the area of probability they are likely to address. We have also pointed to possible ambiguities and errors occurring in the reviewed textbooks. To conclude, we found that different approaches were used in the textbooks to define the terms and that the biggest difference appears between primary and secondary school textbooks.

Keywords: probability, primary school, secondary technical and vocational school, ğrammar school, syllabus, textbooks, mistakes, ambiguities

Math. Subj. Class. (2010): 97K50, 97D70.
UDK: 519.2:37.091.214(043.2)

Kazalo

Uvod

Tema magistrskega dela je pojem, s katerim se srečujemo v vsakdanjem življenju, kadar se pojavijo vprašanja, na katera ne moremo točno odgovoriti in naš odgovor nanj zajema zgolj domnevo, ki sloni na naših izkušnjah in domnevah.
Glavna tema magistrske naloge je verjetnost v osnovnih, srednjih poklicnih in strokovnih šolah ter gimnazijah. Delo je organizirano v tri dele. V prvem delu oziroma poglavju predstavimo osnovne verjetnosti, ki se obravnavajo v osnovnih, srednjih in strokovnih šolah ter gimnazijah. Najprej predstavimo osnovne pojme, kot so poskus, dogodek in verjetnost dogodka. Opišemo zveze med dogodki in vpeljemo vsoto in produkt dogodkov. Sledi vpeljava pojma verjetnosti, kjer se srečamo z relativno frekvenco dogodka in verjetnostnim zakonom. V nadaljevanju obravnavamo še lastnosti verjetnosti, kjer si natančneje ogledamo lastnosti relativne frekvence. Sledi podpoglavje o pogojni verjetnosti, kateri sledi podpoglavje o relejnih poskusih, kjer spoznamo, da lahko poskusi potekajo v več stopnjah. V zadnjem podpoglavju se srečamo z zaporedjem neodvisnih poskusov in Bernoullijevo formulo.

V drugem poglavju smo opisali vsebine iz verjetnosti, ki se pojavijo v učnem načrtu za osnovne, srednje poklicne in strokovne šole ter gimnazije. Navedli smo cilje, ki jih po učnem načrtu morajo v času šolanja osvojiti učenci oziroma dijaki.

V zadnjem poglavju magistrskega dela smo pregledali večino veljavnih osnovnošolskih, srednješolskih in gimnazijskih učbenikov za matematiko. Za vsak učbenik smo navedli in opisali vsebino, ki je obravnavana s področja verjetnosti. Nazadnje smo preverili, ali se v pregledanih učbenikih pojavijo morebitne napake in nejasnosti.

Poglavje 1

Osnove verjetnosti

V tem poglavju bomo predstavili matematično verjetnost, ki jo obravnavamo v osnovni, srednji poklicni in strokovni šoli ter na gimnaziji. Neformalno je verjetnost v SSKJ definirana kot vrednost, ki izraža število ponovitev slučajnega dogodka pri sorazmerno velikem številu istovrstnih poskusov. Po Bernoulliju je to vrednost, izražena z razmerjem med vsemi ponovitvami poskusa in ponovitvami, pri katerih določeni dogodek nastopi. Beseda verjetnost izhaja iz latinske besede *probabilitas*[8]. Teorijo, zajeto v tem poglavju, smo večinoma povzeli po viru [9].

1.1 Osnovni pojmi

Osnovni objekti verjetnostnega računa so poskusi, dogodki in verjetnosti dogodkov. Z besedo *poskus* označujemo neko natanko določeno dogajanje, bodisi je sproženo namerno ali samo opazujemo. Za poskus je značilna neka množica pojavov, ki zmeraj nastopajo skupaj. To množico imenujemo *kompleks pogojev* in jo označimo s κ. Rečemo lahko, da je poskus realizacija nekega kompleksa pogojev.

Zgled. Naj bo poskus streljanje v tarčo. Kompleks pogojev sestavljajo nabijanje orožja, merjenje, pritisk na sprožilec, eksplozija in let izstrelka.

Poskuse označujemo z velikimi tiskanimi črkami X,Y,Z... ali z X_1,X_2,X_3... Naj bo dan poskus X, se pravi nek kompleks κ. Vsak pojav, ki se v posameznem poskusu zgodi ali pa tudi ne, imenujemo *dogodek* v poskusu X.

Zgled. Pri streljanju v tarčo so dogodki, da je zadeta sredina tarče, da tarča ni zadeta in podobno.

Dogodke označujemo z velikimi tiskanimi črkami A, B, C ... ali z A_1, A_2, A_3 ... Naj bo A dogodek v poskusu X. Pri ponavljanju poskusa X se lahko zgodi troje:

1. Dogodek A se zgodi v vsaki ponovitvi poskusa X. Če je teh ponovitev veliko, lahko sklepamo, da se bo A zgodil tudi v vseh prihodnjih ponovitvah. Zato pravimo, da je dogodek A v poskusu X *gotov dogodek* in ga označimo z G.
2. Dogodek A se ne zgodi v nobeni ponovitvi poskusa X. Če je teh ponovitev veliko, lahko sklepamo, da se tudi v prihodnje dogodek A ne bo zgodil. Takšnemu dogodku A v poskusu X pravimo *nemogoč dogodek* in ga označimo z N.
3. Dogodek A se v nekaterih ponovitvah poskusa X zgodi, v nekaterih pa ne. Tedaj pred ponovitvijo poskusa X ni mogoče zanesljivo napovedati, ali se bo dogodek A zgodil ali ne. Takšen dogodek imenujemo *slučajen dogodek*.

Zgled. Če ohladimo vodo pri normalnem tlaku pod $0°C$, se zdi gotovo, da bo zamrznila, saj se je to zmeraj zgodilo. Nemogoče se zdi, da bi človek lahko s prostim očesom videl skozi 5 cm debelo desko, saj se to še ni zgodilo. Da zademo tarčo v sredino, pa je slučajen dogodek, ker se sicer lahko zgodi, vendar pa ni nujno, da bi se zgodil zmeraj.

Za verjetnostni račun so zanimivi predvsem slučajni dogodki, za katere pred ponovitvijo poskusa X ni mogoče zanesljivo napovedati, ali se bo zgodil ali se ne bo, saj si ponovitve, v katerih se dogodek A zgodi ali ne zgodi, sledijo povsem neurejeno. Vendar pa tudi za slučajne dogodke veljajo neki zakoni. Te zakone imenujemo *verjetnostni zakoni*. O verjetnostnih zakonih lahko govorimo, kadar imamo veliko število ponovitev poskusa X.

1.2 Dogodki

V tem razdelku bomo definirali zveze med dogodki, vpeljali bomo vsoto in produkt dogodkov.
Naj bosta A in B taka dogodka, da se zmeraj z dogodkom A zgodi tudi dogodek B. Tedaj pravimo, da je dogodek A *način* dogodka B. To zapišemo kot $A \subseteq B$ ali $B \supseteq A$.

Zgled. Naj bo A dogodek, da vržemo z igralno kocko 3 pike, B pa dogodek, da vržemo liho število pik. Ker je 3 liho število, je $A \subseteq B$.

Če je $A \subseteq B$ in $B \subseteq A$, se dogodka A in B zmeraj zgodita hkrati. Takšna dogodka sta med seboj *enaka*. To zapišemo kot $A = B$. Vsi gotovi dogodki so med seboj enaki, saj se vsi zgodijo v vseh ponovitvah poskusa. Prav tako so vsi nemogoči dogodki enaki, saj se tudi zgodijo hrati, namreč nikoli.

Zgled. V posodi so črne železne krogle in bele lesene krogle. Na slepo izberemo kroglo. Dogodek A naj bo, da izvlečemo leseno kroglo in dogodek B, da izvlečemo kroglo bele barve. Očitno je $A = B$.

Dogodek, da se od dogodkov A in B zgodi vsaj eden, imenujemo *vsota dogodkov* A in B. To zapišemo kot $A \cup B$. Seštejemo pa lahko tudi več dogodkov. Tako je

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

dogodek, kjer se zgodi vsaj eden od dogodkov $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Med členi vsote in vsoto velja relacija $A_k \subset A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n$.

Zgled. Naj bo A dogodek, da vržemo s kocko sodo število pik in B dogodek kjer vržemo število, ki je deljivo s 3. Potem je $A \cup B$ dogodek, da vržemo katero koli od števil 2, 3, 4 ali 6.

Dogodek, da se zgodita oba dogodka A in B hkrati, imenujemo *produkt dogodkov* A in B. To zapišemo kot AB ali $A \cap B$. Med seboj pa lahko zmnožimo tudi več dogodkov. Tako je

$$A_1 A_2 \ldots A_n = \prod_{k=1}^{n} A_k$$

dogodek, kjer se zgodijo vsi dogodki $A_1, A_2, \ldots, A_n$ v isti ponovitvi poskusa. Tudi med produktom dogodkov in njegovimi faktorji velja relacija $A_1 A_2 \ldots A_n \subseteq A_k$.

Zgled. Naj bo A dogodek, kjer iz kupa kart potegnemo asa in B dogodek, kjer izberemo karto srčne barve. Potem je AB dogodek, da izberemo srčnega asa.

Za seštevanje in množenje dogodkov veljajo isti računski zakoni kot za računanje z množicami za operaciji unija in presek. Torej za poljubne dogodke A, B in C je:
1. $A \cup B = B \cup A$ in $AB = BA$,
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ in $(AB)C = A(BC)$,
3. $(A \cup B)C = AC \cup BC$.

Za vsak dogodek A velja tudi $A \cup A = A$ in $AA = A$. Če je $A \subset B$ sledi, da je $A \cup B = B$ in $AB = A$. Če sta dogodka A in B taka, da se ne moreta zgoditi oba v isti ponovitvi poskusa. Taka dogodka imenujemo *nezdružljiva dogodka.* Produkt nezdružljivih dogodkov je nemogoč dogodek, $AB = N$. V primeru nezdružljivih dogodkov A in B njuno vsoto označimo z $A + B$. Če se od dogodkov A_1, A_2, $\ldots$, A_n ne moreta zgoditi niti dva dogodka v isti ponovitvi poskusa, so ti dogodki *paroma nezdružljivi*, torej $A_i A_j = N$ za $i \neq j$.

Zgled. Naj bo dogodek A tak, da iz kupa kart izberemo pikov as in dogodek B tak, da je izbrana karta rdeče barve. Ker je nemogoče, da bi se ta dva dogodka zgodila hkrati, sta dogodka A in B nezdružljiva.

Dogodka A in B sta med seboj *nasprotna*, če se v vsaki ponovitvi zgodi natanko eden izmed njiju. Za nasprotna dogodka A in B velja:

$$AB = N \qquad \text{in} \qquad A + B = G.$$

Če sta dogodka A in B med seboj nasprotna, potem je dogodek B *negacija* dogodka A in prav tako dogodek A *negacija* dogodka B. Negacijo dogodka A označimo z $\overline{A}$.

Zgled. Naj bo dogodek A, da na kocki vržemo 6 pik. Negacija dogodka A je dogodek $\overline{A}$, da na kocki vržemo manj kot 6 pik.

Množico dogodkov $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ imenujemo *popoln sistem dogodkov*, če se v vsaki ponovitvi poskusa zgodi natanko eden izmed dogodkov množice S. Dogodki iz popolnega sistema dogodkov so paroma nezdružljivi

$$A_i A_j = N \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n; j \neq i)$$

in zanje velja

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = G.$$

Najmanjši popoln sistem dogodkov pa sestavljata nasprotna dogodka $\{A, \overline{A}\}$.

Zgled. Pri kockanju naj bo dogodek E_i, da pade i pik ($i = 1, 2, \ldots, 6$). Vsi dogodki E_i sestavljajo popoln sistem dogodkov.

Če je dogodek A tak, da ga lahko izrazimo kot vsoto vsaj dveh mogočih nezdružljivih dogodkov, potem je dogodek A *sestavljen* iz teh dogodkov. Ti dogodki so *načini* dogodka A. Če pa dogodka A ne moremo zapisati kot vsoto nezdružljivih načinov, potem je dogodek A *elementaren*. Elementarnemu dogodku rečemo tudi *izid*.

Zgled. Pri igri s kocko so dogodki E_i, da vržemo i pik, izidi oziroma elementarni dogodki. Dogodek A, da pade sodo število pik, pa je sestavljen iz izidov (elementarnih dogodkov) E_2, E_4 in E_6.

Naj bo množica ϑ množica dogodkov z lastnostjo:

1. če je v ϑ dogodek A, je v ϑ tudi dogodek $\overline{A}$;
2. če sta v ϑ dogodka A in B, je v ϑ tudi njun produkt.

Tako množico ϑ imenujemo *algebra dogodkov*.
V algebri sta zmeraj nemogoč in gotov dogodek in da je z dogodkoma A in B v algebri tudi njuna vsota. Kadar je vsak števen produkt dogodkov iz ϑ tudi v ϑ, potem algebro imenujemo *sigma algebra dogodkov*.

Zgled. Popolnemu sistemu $S = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ dodajmo nemogoč dogodek in vse vsote dogodkov iz S. Množica dogodkov, ki jo dobimo, je algebra dogodkov, ki je tudi sigma algebra dogodkov.

1.3 Pojem verjetnosti

Naj bo n število ponovitev poskusa X, pri čemer se je dogodek A zgodil k-krat. Ponovitve poskusa X, v katerih se dogodek A zgodi, imenujemo *ugodne* za A, število k imenujemo *frekvenca* dogodka A v opravljenih ponovitvah poskusa X, število

$$f(A) = \frac{k}{n}$$

pa se imenuje *relativna frekvenca* dogodka A v opravljenih n ponovitvah poskusa X. Za relativno frekvenco slučajnega dogodka velja verjetnostni zakon:
Če poskus X dolgo ponavljamo, se relativna frekvenca slučajnega dogodka po navadi pri določeni vrednosti stabilizira, in sicer skoraj zmeraj tem bolj, čim večje je število ponovitev poskusa X.

Zgled. Pri metanju kovanca se relativna frekvenca grba stabilizira pri vrednosti 0.5.

Serijsko izdelavo v tovarni lahko imamo za ponavljanje nekega poskusa. Pri tem je dogodek A, da izdelek ne ustreza predpisanim zahtevam. Če je serija velika, je relativna frekvenca dogodka A precej stabilna.

Vrednost relativne frekvence slučajnega dogodka pri velikem številu ponovitev nam pove, če se je zgodil dogodek A doslej skoraj vedno, torej je relativna frekvenca $f(A)$ blizu 1, se bo zelo verjetno zgodil dogodek A tudi pri tej ponovitvi poskusa. Malo verjetno se zdi, da bi se zgodil dogodek, katerega relativna frekvenca je majhna, pri velikem številu ponovitev. Torej je dogodek z večjo relativno frekvenco bolj verjeten kot dogodek z manjšo relativno frekvenco. Kadar imata dogodka enako relativno frekvenco, pa sta dogodka enako verjetna. Opazimo lahko, da je verjetnost količina, ki jo je mogoče meriti. Ker je dogodek tem bolj verjeten, čim večja je njegova relativna frekvenca v velikem številu ponovitev poskusa, in ker se relativna frekvenca skoraj zmeraj stabilizira pri natanko določenem številu, vzamemo za mero verjetnosti prav to število. Imenujemo ga *verjetnost dogodka* in označimo s $P(A)$.

Definicija 1.1 *Verjetnost $P(A)$ dogodka A v danem poskusu je število, pri katerem se navadno stabilizira relativna frekvenca dogodka A v velikem številu ponovitev tega poskusa.*

Ker se ta definicija nanaša na pojem relativne frekvence, ki jo ugotovimo statistično, se pravi z zbiranjem podatkov, imenujemo to definicijo *statistična definicija verjetnosti.* Verjetnost dogodka se zmeraj nanaša na določen poskus oziroma na dan kompleks pogojev. Če se ta spremeni, lahko postane tudi verjetnost dogodka drugačna. Verjetnost dogodka je objektivno dana količina, odvisna samo od kompleksa pogojev.

1.4 Lastnosti verjetnosti

V tem poglavju bomo spoznali lastnosti verjetnosti. Natančneje si bomo ogledali lastnosti relativne frekvence.

1. Za relativno frekvenco $f(A)$ dogodka A velja, da je $0 \leq f(A) \leq 1$, saj je $f(A) = \frac{k}{n}$ in $0 \leq k \leq n$. Ker je verjetnost število, pri katerem se navadno relativna frekvenca stabilizira v velikem številu ponovitev poskusa, velja tudi:

$$0 \leq P(A) \leq 1. \tag{1.1}$$

2. Gotov dogodek ima relativno frekvenco 1, nemogoč dogodek pa relativno frekvenco 0. Zato je

$$P(G) = 1 \qquad \text{in} \qquad P(N) = 0. \tag{1.2}$$

3. Če je $A \subseteq B$, se B ne more zgoditi manjkrat kot A. Zato je v poljubnem številu ponovitev poskusa $f(A) \leq f(B)$. Torej

$$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B). \tag{1.3}$$

4. Dogodka A in B naj bosta v poskusu X nezdružljiva in poskus X smo ponovili n-krat. Pri tem je bila relativna frekvenca dogodka A enaka $\frac{k_a}{n}$, relativna frekvanca dogodka

B pa $\frac{k_b}{n}$. Tedaj je

$$f(A+B) = \frac{k_a + k_b}{n} = \frac{k_a}{n} + \frac{k_b}{n} = f(A) + f(B).$$

Ker velja to za vsako število ponovitev poskusa X, mora biti

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \tag{1.4}$$

To formulo pa lahko razširimo na vsoto poljubnega končnega števila nezdružljivih dogodkov, in sicer

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \tag{1.5}$$

Ta formula velja za poljubno naravno število n. V prihodnje pa bomo vzeli, da velja še več, če so dogodki A_1, A_2, ... paroma nezdružljivi, potem je

$$P\Big(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

To lastnost verjetnosti imenujemo *števna aditivnost za nezdružljive dogodke.*

5. Za nasprotna dogodka A in $\overline{A}$ je $A + \overline{A} = G$ in zaradi (1.2) je $P(A + \overline{A}) = 1$. Ker sta nasprotna dogodka nezdružljiva iz (1.4) sledi, da je $P(A) + P(\overline{A}) = 1$. Tako je

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{1.6}$$

Naslednja lastnost sledi iz formule (1.5), in sicer naj pri poskusu X obstaja popoln sistem dogodkov S z enako verjetnimi izidi $E_1, E_2, \ldots, E_s$. Ker vemo, da je $E_1 + E_2 + \ldots + E_s = G$ in so dogodki v popolnem sistemu med seboj paroma nezružljivi, velja $P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_s) = P(G) = 1$. Od tod pa sledi:

$$P(E_i) = \tfrac{1}{s} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s). \tag{1.7}$$

Vsak dogodek A je ali v sistemu S ali pa je vsota nekaterih dogodkov iz S. Dogodek A naj bo vsota r izidov iz S. Brez izgube za splošnost lahko rečemo, da je to kar prvih r izidov iz S. Torej je $A = E_1 + E_2 + \ldots + E_r$. Z uporoba formule (1.5) dobimo, da je $P(A) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_r)$ Od tod in iz formule (1.7) sledi:

$$P(A) = \tfrac{r}{s}. \tag{1.8}$$

Izrek 1.2 *Če je dogodek A vsota r dogodkov iz popolnega sistema, v katerem je s dogodkov, in so ti med seboj enako verjetni, je verjetnost dogodka A enaka* $\frac{r}{s}$.

Izide, ki so načini dogodka A, imenujemo *ugodne* za dogodek A. Zato lahko izrek 1.2 zapišemo kot:

Izrek 1.3 *Če je od s mogočih in enako verjetnih izidov za dogodek A ugodnih r izidov, je* $P(A) = \frac{r}{s}$

Če vemo, da so izidi v popolnem sistemu S med seboj enako verjetni, lahko izračunamo verjetnost dogodka, ki je sestavljen iz teh izidov, po formuli (1.8). Kadar so pogoji poskusa enaki za vse izide, so dogodki v popolnem sistemu enako verjetni med seboj. V nekaterih primerih se da to ugotoviti, ne da bi poskus dolgo ponavljali in v takem primeru je mogoče določiti verjetnost vsakega dogodka, ki se zgodi v poskusu, po formuli (1.8) že vnaprej. Takšen način določanja verjetnosti imenujemo *klasičen način.*
Klasičen način je ugodnejši od statističnega, vendar pa je uporaben samo takrat, ko je izidov poskusa končno mnogo in vemo, da so izidi med seboj enako verjetni. Ker pri vsakem poskusu ne obstaja popoln sistem enako verjetnih izidov, je uporaba izreka 1.2 omejena.

Zgled. Kolikšna je verjetnost, da bo pri metu simetrične in homogene igralne kocke padlo sodo število pik?
Ker je igralna kocka poštena, so izidi med seboj enako verjetni. Od izidov so za dogodek A, da bo padlo sodo število pik, ugodni trije. Torej je po formuli (1.8)

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Zgled. Iz kupa, v katerem je 32 kart, na slepo izberemo dve izmed njih. Kolikšna je verjetnost dogodka A, da bosta obe izbrani karti asa?
Ker karte izbiramo na slepo, ima vsaka od njih enako možnost, da bo izbrana. Zaradi tega so vsi mogoči izidi poskusa med seboj enako verjetni. Mogoči izidi so vse kombinacije po dve karti izmed dvaintridesetih, ugodni dogodki za A pa vse kombinacije po dva asa izmed štirih. Torej je

$$s = \binom{32}{2} = 496 \qquad \text{in} \qquad r = \binom{4}{2} = 6.$$

Po izreku 1.2 je

$$P(A) = \frac{3}{248}.$$

Doslej smo obravnavali vsote paroma nezdružljivih dogodkov, sedaj pa si poglejmo še vsote dveh združljivih dogodkov. Če imamo dogodka A in B, dogodek $A \cup B$ lahko izrazimo v obliki $A + B = A + \overline{A}B$. Ker sta člena na desni strani nezdružljiva, velja

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A}B). \tag{1.9}$$

Dogodek B lahko izrazimo kot $B = GB = (A + \overline{A})B = AB + \overline{A}B$. Člena na desni strani sta ponovno nezdružljiva in zato je $P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B)$. Če od tod in formule (1.9) odpravimo $P(\overline{A}B)$, dobimo

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{1.10}$$

To je formula za verjetnost dveh dogodkov in jo lahko posplošimo.

Izrek 1.4 *Naj bo n poljubno naravno število in $A_1, A_2, \ldots, A_n$ poljubni dogodki. Tedaj je*

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k^{(n)}. \tag{1.11}$$

Pri tem je

$$S_k^{(n)} = \sum P(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}). \tag{1.12}$$

$(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ v vsoti na desni strani (1.12) je poljubna kombinacija reda k med števili $1, 2, \ldots, n$, seštevati pa je treba po vseh takih kombinacijah.

Da dobimo verjetnost dogodka $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, moramo najprej sešteti verjetnosti vseh njegovih členov in od tega odšteti vsoto verjetnosti vseh produktov po dva člena. Temu nato prištejemo vsoto verjetnosti vseh produktov po tri člene, in tako naprej. Postopek nadaljujemo dokler ne pridemo do verjetnosti produkta vseh n členov. Ta produkt prištejemo, če je n liho število, in odštejemo, če je sodo.

Dokaz. Izrek 1.4 dokažemo z matematično indukcijo. Vzemimo, da je za naravno število $n-1$ izrek že dokazan. Tedaj velja:

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} S_k^{(n-1)}. \tag{1.13}$$

Po formuli (1.10) je

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) &= P((A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cup A_n) \\ &= P(A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) + P(A_n) - P(A_1A_n \cup \ldots \cup A_{n-1}A_n). \end{aligned}$$

Pri prvem členu na desni strani uporabimo formulo (1.13) in dobimo

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} S_k^{(n-1)} + P(A_n) - P\Big(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k A_n\Big). \tag{1.14}$$

Zadnji člen na desni strani enačbe (1.14) je verjetnost vsote $n-1$ členov. Zaradi tega lahko pri njem uporabimo formulo (1.13). Vsoto verjetnosti vseh mogočih produktov po k členov vsote $A_1A_n \cup \ldots \cup A_{n-1}A_n$ označimo s S_k^{*n-1}.
Torej je

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k A_n\Big) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} S_k^{*(n-1)}.$$

in iz formule (1.14) sledi

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} S_k^{(n-1)} + P(A_n) - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} S_k^{*(n-1)}. \tag{1.15}$$

Ker je

$$\begin{aligned} S_1^{(n-1)} + P(A_n) &= S_1^{(n)} \\ -(-1)^{n-2} {S_{n-1}^*}^{(n-1)} &= (-1)^{n-1} S_n^{(n)} \end{aligned}$$

in za vsak k $(1 < k < n)$

$$(-1)^{k-1} S_k^{(n-1)} - (-1)^{k-2} {S_{k-1}^*}^{(n-1)} = (-1)^{k-1} S_k^{(n)},$$

je relacija (1.15) identična relaciji (1.11). Torej če izrek velja za naravno število $n-1$, velja tudi za n. Za $n = 2$ je (1.11) ravno formula (1.10). □

Zgled. Med stotimi listi, oštevilčenimi od 1 do 100, bomo na slepo izbrali enega. Kolikšna je verjetnost, da bo na njem število, ki je deljivo z vsaj enim od števil 2, 3 in 5?
Dogodek A naj bo dogodek, da je izbrano število deljivo z 2, B naj bo dogodek, da je izbrano število deljivo s 3 in C naj bo dogodek, da je izbrano število deljivo s 5.
Iščemo verjetnost $P(A \cup B \cup C)$. Po formuli 1.11 je

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

Ker izbiramo na slepo, so vsi mogoči izidi poskusa med seboj enako verjetni. Med njimi je 50 ugodnih za dogodek A, za dogodek B je ugodnih 33 izidov in za dogodek C je ugodnih 20 izidov. Dogodek AB je dogodek, kjer je število deljivo z 2 in 3 hkrati, torej je deljivo s

6. Takšnih ugodnih izidov je 16. Za dogodek AC je ugodnih 10 izidov in za dogodek BC je ugodnih 6 izidov. Za dogodek ABC, kjer je število deljivo z vsemi tremi hkrati, so ugodni izidi trije. Torej je verjetnost

$$P(A \cup B \cup C) = 0.50 + 0.33 + 0.20 - 0.16 - 0.10 - 0.06 + 0.03 = 0.74.$$

1.5 Pogojna verjetnost

Naj bo X realizacija nekega kompleksa pogojev κ in naj bosta A in B dogodka v poskusu X. Verjetnost dogodka A naj bo $P(A)$. Naj bo dogodek B tak, da bo poskus hkratna realizacija kompleksa κ in dogodka B. S tem dobimo nov kompleks dogodkov κ' in njegova realizacija naj bo poskus X'. V tem novem poskusu naj bo verjetnost dogodka A enaka $P'(A)$. Verjetnosti $P(A)$ in $P'(A)$ sta lahko enaki ali pa različni.
Poskusa X in X' se razlikujeta v tem, da je pri poskusu X' v kompleksu tudi dogodek B, pri poskusu X pa ga ni. Zaradi tega imenujemo verjetnost $P'(A)$ *pogojna verjetnost dogodka A glede na dogodek B (v poskusu X)* in namesto $P'(A)$ zaznamujemo pogojno verjetnost z

$$P(A|B) \qquad \text{ali} \qquad P_B(A).$$

Definicija 1.5 *Pogojna verjetnost $P(A|B)$ v poskusu X je verjetnost dogodka A v poskusu X z dodatnim pogojem B.*

V poskusu X imamo za dogodek A dve verjetnosti, pogojno verjetnost $P(A|B)$ in že znano verjetnost $P(A)$, ki jo imenujemo *brezpogojna verjetnost*. Dogodek B naj ima v poskusu X pozitivno verjetnost. V tem primeru lahko pogojno verjetnost $P(A|B)$ izrazimo z brezpogojnima verjetnostma $P(AB)$ in $P(B)$.
Recimo, da smo poskus X ponovili n-krat in da je bilo pri tem k_b ugodnih izidov za dogodek B in k_{ab} ugodnih izidov za dogodek AB. Kar pomeni, da smo v n ponovitvah poskusa X napravili k_b-krat poskus X'. Relativna frekvenca dogodka A v poskusu X' je

$$f'(A) = \frac{k_{ab}}{k_b} = \frac{\frac{k_{ab}}{n}}{\frac{k_b}{n}}.$$

In ker je

$$\frac{k_{ab}}{n} = f(AB) \qquad in \qquad \frac{k_b}{n} = f(B)$$

sledi, da je pri vsakem številu ponovitev poskusa X

$$f'(A) = \frac{f(AB)}{f(B)}.$$

Ker je $P(B) > 0$, je pri velikem n tudi k_b veliko število in se $f'(A)$ stabilizira pri $P(A|B)$, $f(AB)$ pri $P(AB)$ in $f(B)$ pri $P(B)$. Torej je

$$P(A|B) = \tfrac{P(AB)}{P(A)}. \tag{1.16}$$

Ta relacija je definicija pogojne verjetnosti zapisana na drugačen način, kadar je $P(B) > 0$. Definiramo pa lahko tudi pogojno verjetnost $P(B|A)$. Pogojna verjetnost $P(B|A)$ je verjetnost dogodka B v poskusu X z dodatnim pogojem A. Če je $P(A) > 0$, potem dobimo relacijo

$$P(B|A) = \tfrac{P(AB)}{P(A)}. \tag{1.17}$$

Ko odpravimo ulomek v relacijah (1.16) in (1.17), dobimo

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B). \tag{1.18}$$

Po tej formuli dobimo verjetnost produkta iz verjetnosti njegovih faktorjev. Relacijo (1.18) lahko posplošimo na produkt več faktorjev in dobimo

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1}). \tag{1.19}$$

To lahko naredimo, kadar je verjetnost $P(A_1 A_2 \ldots A_{n-1})$ pozitivna.

Zgled. Izdelki v neki tovarni se izdelujejo serijsko. Izdelovanje izdelka naj bo poskus X, dogodek A naj bo, da je izdelek prvorazreden, dogodek B, da je izdelek drugorazreden, dogodek C, da je izdelek tretjerazreden in dogodek $\overline{D}$, da izdelek ni uporaben. Verjetnosti teh dogodkov naj bodo

$$P(A) = 0.1, \quad P(B) = 0.2, \quad P(C) = 0.6, \quad P(\overline{D}) = 0.1.$$

Kolikšna je verjetnost, da je izdelek, ki ga na slepo izberemo med uporabnimi izdelki prvorazreden?
Torej iščemo pogojno verjetnost $P(A|D)$. Ker je $D = A + B + C$, je $AD = A$ in po formuli (1.16) je

$$P(A|D) = \frac{P(AD)}{P(D)} = \frac{P(A)}{P(D)} = \frac{0.1}{0.9} = \frac{1}{9}.$$

V tem primeru je pogojna verjetnost $P(A|D)$ različna od brezpogojne verjetnosti $P(A)$.

Zgled. Mečemo belo in črno kocko. Kolikšna je verjetnost, da bomo s črno kocko vrgli šestico pri pogoju, da bo tudi na beli kocki padla šestica?
Dogodek, kjer na črni kocki pade šestica, označimo kot dogodek A, in dogodek, da na beli kocki pade šestica, označimo z dogodkom B. Pri metanju dveh kock imamo 36 enako verjetnih izidov, saj je toliko število dvojic (i, j), da pade s črno kocko i pik, z belo pa j pik. Za dogodek B je ugodnih 6 izidov, to so dvojice $(i, 6)$. Torej je

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Tudi za dogodek A je ugodnih 6 izidov, to so dvojice $(6, j)$. Torej je

$$P(A) = \frac{1}{6}.$$

Dogodek AB, da vržemo z obema kockama 6, se pravi izid $(6, 6)$, je en sam. Zato je

$$P(AB) = \frac{1}{36}.$$

Po formuli (1.16) sledi, da je pogojna verjetnost

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{6}$$

in v tem primeru je

$$P(AB) = P(A).$$

Iz navedenih zgledov lahko vidimo, da je včasih pogojna verjetnost enaka brezpogojni, včasih pa je od nje različna. Predpostavimo, da imata dogodka A in B vedno pozitivno verjetnost.

Definicija 1.6 *Naj bo $P(A) \neq 0$. Če je $P(A|B) = P(A)$ pravimo, da je dogodek A neodvisen od dogodka B, če pa je $P(A|B) \neq P(A)$ rečemo, da je A odvisen od B.*

Velja tudi: *Če je $P(B) \neq 0$ potem je dogodek B neodvisen od dogodka A, če je $P(B|A) = P(B)$, in od njega odvisen, če je $P(B|A) \neq P(B)$.*

Izrek 1.7 *Če je dogodek A, $P(A) \neq 0$, neodvisen od dogodka B, je tudi dogodek B neodvisen od dogodka A.*

Dokaz. Če upoštevamo definicijo 1.6 in (1.18), dobimo

$$P(A)P(B|A) = P(A)P(B)$$

od tod sledi, da je $P(B|A) = P(B)$. $\square$

Zaradi izreka 1.7 ni potrebno navajati smeri neodvisnosti med dogodkoma. Rečemo lahko, da sta dogodka A in B neodvisna.

Izrek 1.8 *Dogodka A in B, $P(A) \neq 0$ in $P(B) \neq 0$, sta med seboj neodvisna natanko takrat, kadar je*

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{1.20}$$

Dokaz. Iz relacije $P(A|B) = P(A)$ ali relacije $P(B|A) = P(B)$ sledi, da je $P(AB) = P(A)P(B)$. To pa velja tudi obratno: Če velja relacija $P(AB) = P(A)P(B)$ in to relacijo delimo na obeh straneh s $P(B)$, dobimo relacijo $P(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A|B)$. To pa je ravno relacija $P(A|B) = P(A)$. $\square$

Izrek 1.9 *Če sta dogodka A in B neodvisna, sta neodvisna tudi dogodka A in $\overline{B}$.*

Dokaz. Najprej dokažimo, da iz neodvisnosti A in B sledi, da sta A in $\overline{B}$ neodvisna. Poglejmo relacijo

$$A = AG = A(B + \overline{B}) = AB + A\overline{B}.$$

Na desni strani relacije sta člena nezdružljiva in zato je $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$. Če upoštevamo neodvisnost med A in B, dobimo:

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B}).$$

Dogodka A in B sta med seboj neodvisna. Neodvisnost se ohrani, če en dogodek negiramo. Iz neodvisnosti dogodkov A in $\overline{B}$ sledi tudi neodvisnost med $\overline{A}$ in $\overline{B}$, od tod pa še neodvisnost med $\overline{A}$ in B. $\square$

Neodvisnost pa je mogoče uvesti tudi v množici z več kot dvema dogodkoma. Za dogodke $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pravimo, da so v *celoti naodvisni*, če je vsak od njih neodvisen od vsakega drugega dogodka in od vsakega produkta drugih dogodkov v tej množici.
Za neodvisnost v celoti ni dovolj, da so dogodki paroma neodvisni oziroma, da je za poljubna med seboj različna i in j od 1 do n

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j).$$

Zgled. Pravilen tetraeder ima tri stranske ploskve pobarvane rdeče, zeleno in belo. Zadnjo četrto ploskev pa z vsemi tremi barvami. Pri metu tetraedra naj bo dogodek A, da bo tetraeder padel na ploskev z rdečo barvo, dogodek B, da bo padel na ploskev z belo barvo, in dogodek C, da bo padel na ploskev z zeleno barvo. Ker je enako verjeto, da pade tetraeder na katerokoli stransko ploskev, je

$$P(A) = P(B) = P(C) = P(A|B) = P(A|C) = P(B|C) = 0.5.$$

To pomeni, da so dogodki A, B in C paroma neodvisni. Ker pa je $P(A|BC) = 1 \neq P(A)$, ti dogodki v celoti niso neodvisni.

Kadar so dogodki $A_1, A_2, \ldots, A_n$ v celoti neodvisni, je

$$\begin{aligned} P(A_2|A_1) &= P(A_2), \\ P(A_3|A_1A_2) &= P(A_3), \\ &\vdots \\ P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1}) &= P(A_n) \end{aligned}$$

in formula (1.19) ima obliko

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n). \tag{1.21}$$

Zgled. Iz posode s štirimi rdečimi in tremi zelenimi kroglami na slepo izberemo eno kroglo. Kolikšna je verjetnost, da bomo prvič izbrali rdečo kroglo (dogodek A), drugič zeleno kroglo (dogodek B) in tretjič prav tako zeleno kroglo (dogodek C), če krogel ne vračamo v posodo oziroma izbrano kroglo vrnemo v posodo?
Če krogel ne vračamo v posodo, moramo izračunati verjetnost dogodka ABC. Dogodki A, B in C so med seboj odvisni, saj krogel v tem primeru ne vračamo nazaj v posodo. Po formuli (1.19) je

$$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB).$$

Najprej izračunajmo verjetnosti na desni strani. Verjetnost $P(A) = \frac{4}{7}$, saj imamo 7 krogel med katerimi izbiramo, ugodni izidi za dogodek A pa so štirje. Verjetnost $P(B|A) = \frac{1}{2}$, saj so med preostalimi 6 kroglami (prvič smo izvlekli rdečo) v posodi 3 zelene. Ker sta se zgodila dogodka A in B, je v posodi še 5 krogel in od teh sta 2 zeleni. Zato je $P(C|AB) = \frac{2}{5}$.
Iz teh podatkov sledi

$$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{35}.$$

V primeru, ko krogle vračamo v posodo so dogodki A, B in C med seboj neodvisni. Zato je $P(A) = \frac{4}{7}$ in $P(B) = P(C) = \frac{3}{7}$. Po formuli (1.21) sledi

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{36}{343}.$$

Zgled. Prvi strelec zadeva cilj z verjetnostjo 0.8 in drugi strelec z verjetnostjo 0.4. Vsak strelec ustreli enkrat. Dogodek A naj bo, da prvi strelec zadane, dogodek B, da zadane drugi strelec, in dogodek C, da bo cilj zadet natanko enkrat. Kolikšna je verjetnost dogodka C?
Med dogodki A, B in C velja zveza $C = A\overline{B} + \overline{A}B$, saj noben strelec ne more z istim strelom zadeti in zgrešiti. Zato je $P(C) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B)$. Ker verjetnost, da drugi strelec zadane, ni odvisna od tega kaj doseže prvi strelec, sta faktorja v produktih $A\overline{B}$ in $\overline{A}B$ neodvisna. Zaradi tega lahko uporabimo formulo (1.20) in je $P(C) = P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B)$. Po formuli (1.6) dobimo, da je $P(\overline{A}) = 0.2$ in $P(\overline{B}) = 0.6$. Torej je $P(C) = 0.8 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.4 = 0.56$.

1.6 Relejni poskusi

Do sedaj smo obravnavali poskuse, ki se končajo takoj, ko se v njih zgodi kak dogodek, torej ima poskus eno samo stopnjo. Poskusi pa lahko potekajo tudi v več stopnjah, kjer izidi na prejšnji stopnji določijo, kako bo potekal poskus v naslednji stopnji. Takšne poskuse imenujemo *relejni poskusi* in v tem razdelku se bomo posvetili poskusom, ki potekajo v dveh fazah.
Naj bodo v relejnem poskusu z dvema fazama na prvi stopnji mogoči izidi H_1, H_2, $\ldots H_n$ in na drugi stopnji naj bo A eden izmed mogočih dogodkov. Denimo, da poznamo verjetnosti

$$P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$$

in pogojne verjetnosti

$$P(A|H_1), P(A|H_2), \ldots, P(A|H_n).$$

Iz teh podatkov želimo izračunati verjetnost dogodka A pred začetkom poskusa. Ker izidi H_1, H_2, $\ldots H_n$ sestavljajo popoln sistem dogodkov, je $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = G$. Od tod in iz relacije $AG = A$ sledi, da je

$$A = A(H_1 + H_2 + \ldots + H_n) = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n.$$

Zato je

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \ldots + P(AH_n).$$

Pri vsakem členu uporabimo še formulo za verjetnost produkta in dobimo

$$P(A) = P(H_1)P(AH_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n)$$

oziroma

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i). \tag{1.22}$$

Relacija (1.22) se imenuje *formula za popolno verjetnost* dogodka A.

Zgled. V prvi posodi sta 2 beli in 4 črne kroglice, v drugi posodi so 4 bele in 4 črne kroglice in v tretji je 1 bela in 3 črne kroglice. Najprej vržemo kocko in če bodo padle na kocki 1, 2 ali 3 pike (dogodek H_1), bomo izbrali prvo posodo. Če bo padlo na kocki 4 ali 5 pik, bomo izbrali drugo posodo. Če pa bo na kocki padlo 6 pik, bomo izbrali tretjo posodo. Iz izbrane posode izvlečemo eno kroglico. Naj bo dogodek A, da smo izvlekli črno kroglico. Kolikšna je verjetnost, da izvlečemo črno kroglico?
Vidimo lahko, da je

$$\begin{array}{ll} P(H_1) = \frac{1}{2}, & P(A|H_1) = \frac{2}{3}, \\ P(H_2) = \frac{1}{3}, & P(A|H_2) = \frac{1}{2}, \\ P(H_3) = \frac{1}{6}, & P(A|H_3) = \frac{3}{4}. \end{array}$$

Od tod sledi po formuli (1.22), da je

$$P(A) = \frac{5}{8}.$$

Poskus je lahko tudi tak, da se more zgoditi dogodek A samo hkrati s kakšnim dogodkom iz popolnega sistema. To pomeni, da včasih v relejnem poskusu potekata obe stopnji hkrati. V tem primeru lahko prav tako uporabimo formulo za popolno verjetnost.

Zgled. Prva tovarna izdeluje neko blago serijsko, in med njenimi izdelki je 10 % prvovrstnih. Druga tovarna prav tako izdeluje blago serijsko in v tej tovarni je 15 % izdelkov prvovrstnih. V neki trgovini imajo v zalogi 20 izdelkov iz prve in 10 izdelkov iz druge tovarne. Kupec na slepo izbere enega izmed njih. Kolikšna je verjetnost, da bo dobil prvovrsten izdelek?
Označimo s H_1 dogodek, da je izdelek iz prve tovarne, s H_2 dogodek, da je izdelek iz druge

tovarne in A naj bo dogodek, da dobi kupec prvovrsten izdelek. Vidimo lahko, da je

$$\begin{aligned} P(H_1) &= \tfrac{2}{3}, \quad P(A|H_1) = 0.10, \\ P(H_2) &= \tfrac{1}{3}, \quad P(A|H_2) = 0.15. \end{aligned}$$

Po formuli za popolno verjetnost je $P(A) = \frac{7}{60}$.

Pri relejnem poskusu so v prvi fazi poskusa mogoči izidi H_1, H_2, ..., H_n z znanimi verjetnostmi $P(H_1)$, $P(H_2)$, ..., $P(H_n)$. V drugi fazi poskusa se lahko zgodi dogodek A, katerega pogojne vrednosti $P(A|H_1)$, $P(A|H_2)$, ..., $P(A|H_n)$ prav tako poznamo. Kolikšne so tedaj pogojne verjetnosti

$$P(H_1|A), P(H_2|A), \ldots, P(H_n|A)?$$

Zanima nas, kakšne so verjetnosti izidov H_1, H_2, ..., H_n iz prve faze poskusa po poskusu, če se v njegovi drugi fazi zgodi dogodek A.
Če v poskusu potekata obe fazi hkrati, moramo zastaviti vprašanje takole: Dogodek A se more zgoditi v različnih okoliščinah, o njihovi naravi pa obstajajo hipoteze H_1, H_2, ..., H_n, ki se med seboj izključujejo in od katerih se ena zmeraj uresniči. Pred poskusom so verjetnosti teh hipotez znane. Prav tako so znane tudi verjetnosti pogojne verjetnosti dogodka A glede na hipoteze. Zanima nas, kakšne so pogojne verjetnosti po poskusu, glede na dogodek A.
Po formuli za verjetnost produkta je za vsak k $(1 \leq k \leq n)$

$$P(AH_k) = P(A)P(H_k|A) = P(H_k)P(A|H_k).$$

Iz tega sledi, da je

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(A)}.$$

Verjetnost $P(A)$ dobimo po formuli (1.22). Torej je za vsak k $(1 \leq k \leq n)$

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)}. \tag{1.23}$$

To formulo imenujemo *Bayesova formula* in zaradi druge formulacije zastavljene naloge ji pravimo tudi *izrek o verjetnosti hipotez.*

Zgled. Podatki so enaki kot v prejšnjem zgledu, le da je kupec na slepo v trgovini izbral prvovrsten izdelek. Zanima nas, kolikšna je verjetnost, da je izdelek iz druge tovarne (dogodek A)?

Glede na podatke je

$$P(H_2)P(A|H_2) = \frac{1}{20}.$$

Iz prejšnjega zgleda vemo, da je $P(A) = \frac{7}{60}$. Torej je po Bayesovem obrazcu

$$P(H_1|A) = \frac{3}{7}.$$

Izračunana verjetnost je večja od $P(H_2)$, saj je med izdelki druge tovarne delež prvovrstnih izdelkov večji kot v prvi tovarni.

1.7 Zaporedje neodvisnih poskusov

Pri definiciji pogojne verjetnosti smo zahtevali, da sta dogodka A in B iz istega poskusa. V tem razdelku bomo definirali pogojno verjetnost, pri čemer sta dogodka A in B iz različnih poskusov.

Dva poskusa sta med seboj *neodvisna*, če je vsak dogodek iz enega poskusa neodvisen od katerega koli dogodka v drugem poskusu. V primeru, da imamo več poskusov X_1, X_2, $\ldots$, X_n, imenujemo te med seboj neodvisne, kadar kakor koli izberemo iz vsakega poskusa po en dogodek, so ti dogodki med seboj neodvisni. Neodvisnost poskusov pa je mogoče definirati tudi v neskončni množici. In v tem razdelku nas bo zanimala situacija, ko poskusi sestavljajo neskončno zaporedje

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots \tag{1.24}$$

Ti poskusi v zaporedju so med seboj neodvisni in temu zaporedju pravimo *zaporedje neodvisnih poskusov.* V tem zaporedju ni treba, da bi bili poskusi med seboj enaki, je pa preprosteje, če so. Zaporedje enakih neodvisnih poskusov imamo lahko za ponavaljanje istega poskusa, na primer metanje kocke. Med takšnimi zaporedji so najpreprostejša tista, v katerih se lahko zgodita v vsakem poskusu le dva dogodka, torej dogodek A z verjetnostjo p $(0 < p < 1)$ ali njegova negacija $\overline{A}$ z verjetnostjo $q = 1 - p$. Takšno zaporedje imenujemo *Bernoullijevo zaporedje.*

Zgled. Metanje kovanca je Bernoullijevo zaporedje.

Vsako zaporedje neodvisnih poskusov lahko obravnavamo kot Bernoullijevo zaporedje, če ga primerno reduciramo.

Zgled. Kockanje ni Bernoullijevo zaporedje. Če nas zanima le, ali bomo vrgli 6 pik ali ne, postane kockanje ponavljanje poskusa z dvema izidoma, in to je Bernpoullijevo zaporedje.

Poglejmo si Bernoullijevo zaporedje in ugotovimo, kolikšna je verjetnost, da se bo zgodil dogodek A. Dogodek A ima v poskusu verjetnost p v n zaporednih ponovitvah tega poskusa natanko k-krat. Pri tem je $k = 0, 1, \ldots, n$.
Naj bo $B_n(k)$ dogodek, da se zgodi dogodek A v n ponovitvah poskusa natanko k-krat in naj bo $P_n(k)$ njegova verjetnost. Dogodek $B_n(k)$ se zgodi natanko tedaj, ko se v n zaporednih ponovitvah poskusa zgodi dogodek A k-krat in njegova negacija $\overline{A}$ $(n-k)$-krat. Torej je vsak način dogodka $B_n(k)$ produkt n dogodkov, v katerem je k faktorjev dogodka A in $(n-k)$ faktorjev dogodka $\overline{A}$. Ti faktorji so med seboj neodvisni in zato je verjetnost načina dogodka $B_n(k)$ enaka $p^k q^{n-k}$. K temu dodamo še število načinov dogodka $B_n(k)$. Da dobimo tak način, moramo določiti k ponovitev, v katerih se zgodi dogodek A. To je mogoče narediti na $\binom{n}{k}$ različnih načinov. Torej je $B_n(k)$ vsota $\binom{n}{k}$ paroma nezdružljivih dogodkov z verjetnostjo $p^k q^{n-k}$. Zato je

$$P_n(k) = \tbinom{n}{k} p^k q^{n-k}. \tag{1.25}$$

To formulo imenujemo *Bernoullijeva formula* in je uporabna le takrat, kadar je število poskusov majhno. Pri velikih n bi bilo računanje binomskih koeficientov zamudno.
Ker dogodki $B_n(0), B_n(1), \ldots, B_n(n)$ sestavljajo popoln sistem, je

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1$$

in o tem se lahko prepričamo neposredno po Newtonovi binomski formuli. In sicer

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1.$$

Zgled. Najprej si poglejmo, kolikšna je verjetnost, da bomo s kocko v petih metih enkrat dobili šestico.
Označimo z $n = 5$, $k = 1$, $p = \frac{1}{6}$ in $q = \frac{5}{6}$. Po formuli (1.25) je verjetnost enaka $P_5(1) = \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{3125}{7776} \doteq 0.40$.
Poglejmo še, kolikšna je verjetnost, da bo med 1000 zaporednimi izdelki 50 neuporabnih, če je pri serijskem izdelovanju izdelka verjetnost, da bo izdelek neuporaben 0.05.
Naj bo $n = 1000$, $k = 50$, $p = 0.05$, in $q = 0.95$. Po formuli (1.25) sledi

$$P_1000(50) = \binom{1000}{50} \cdot 0.05^{50} \cdot 0.95^{950} \doteq 0.058.$$

1.8 Slučajne spremenljivke

Kadar imamo pri poskusih vse izide označene s števili, na take poskuse gledamo, kot da imajo prirejeno neko količino, ki lahko ima različne vrednosti. Ker je odvisno od slučaja, katero od mogočih vrednosti ima v dani ponovitvi poskusa, to količino imenujemo *slučajna spremenljivka*. Slučajna spremenljivka je določena z *zalogo vrednosti* in *porazdelitvenim zakonom*. Zalogo vrednosti sestavljajo vse vrednosti, ki jih slučajna spremenljivka lahko zavzame. Porazdelitveni zakon je predpis, ki določa verjetnost, ki jo lahko priredimo vsaki vrednosti slučajne spremenljivke, da bo slučajna spremenljivka imela to vrednost. Slučajne spremenljivke označujemo z velikimi tiskanimi črkami X, Y, Z ali X_1, X_2, X_3, njihove vrednosti pa z ustrezno malo črko.

Zgled. Naj bo število pik, ki jih lahko vržemo s pošteno igralno kocko, slučajna spremenljivka X. Slučajna spremenljivka lahko ima vrednosti $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Pojav, da ima slučajna spremenljivka X vrednost x je dogodek, ki ga zapišemo kot

$$(X = x). \tag{1.26}$$

Ker so vsi mogoči dogodki (1.26) paroma nezdružljivi, saj slučajna spremenljivka ne more imeti dve različni vrednosti v isti ponovitvi poskusa, in je njihova vsota gotov dogodek, ti dogodki sestavljajo popolni sistem. Drugi dogodki, ki jih lahko prav tako opišemo s slučajno spremenljivko X so $(X < x)$, kar pomeni, da je vrednost slučajne spremenljivke X manjša od danega realnega števila x, $(X \geq x)$, $(x_1 < X < x_2)$ ali $(X \in S)$, kjer je S poljubna odprta ali zaprta množica na realni osi.
Glede na zalogo vrednosti slučajne spremenljivke ločimo dva tipa slučajnih spremenljivk. In sicer *diskretne slučajne spremenljivke* in *nediskretne slučajne spremenljivke*. Pri diskretnih slučajnih spremenljivkah je zaloga vrednosti števna množica, pri nediskretnih slučajnih spremenljivkah je zaloga vrednosti tako bogata, da njenih elementov ni mogoče prešteti, torej je neštevna množica.

Zgled. Pri kockanju je število pik diskretna slučajna spremenljivka, saj je njena zaloga vrednosti $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Razdalja med zadetkom in sredino tarče pri streljanju na tarčo je slučajna spremenljivka. Njena zaloga vrednosti je množica vseh nenegativnih ne prevelikih realnih števil, ki pa ni števna množica, zato razdalja med zadetkom in sredino tarče ni diskretna slučajna spremenljivka.

Splošna oblika porazdelitvenega zakona, ki jo je mogoče uporabiti pri vsaki slučajni spremenljivki, je *porazdelitvena funkcija*.

Definicija 1.10 *Porazdelitvena funkcija $F(x)$ slučajne spremenljivke X je funkcija, ki ima pri vsakem realnem x vrednost enako verjetnosti $(X < x)$:*

$$F(x) = P(X < x), \qquad \text{kjer je} \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1.27}$$

Lastnosti porazdelitvene funkcije so:

1. Vsaka porazdelitvena funkcija $F(x)$ je naraščajoča in zanjo velja:

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \text{in} \qquad F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1. \tag{1.28}$$

2. Za poljubni realni števili x_1 in x_2 $(x_1 < x_2)$ velja:

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \tag{1.29}$$

3. Vsaka porazdelitvena funkcija je z leve zvezna, torej pri vsakem realnem x je:

$$F(x - 0) = \lim_{u \to x-0} F(u) = F(x). \tag{1.30}$$

4. Če je $F(x)$ porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X, za vsak realen x velja:

$$F(x + 0) - F(x) = P(X = x). \tag{1.31}$$

Za diskretne slučajne spremenljivke je primernejša oblika, v primerjavi s splošno obliko, porazdelitvenega zakona, tako imenovana *verjetnostna funkcija*.

Definicija 1.11 *Verjetnostna funkcija p_k diskretne slučajne spremenljivke X ima pri vsakem mogočem x_k vrednost enako verjetnosti dogodka $(X = x_k)$:*

$$p_k = P(X = x_k). \tag{1.32}$$

Pri tem preteče k vse tiste cele vrednosti, za katere spada x_k v zalogo vrednosti slučajne spremenljivke.

Kadar opišemo porazdelitveni zakon diskretne slučajne spremenljivke z verjetnostno funkcijo, za vsako mogočo vrednost teh spremenljivk povemo, kolikšna je njena verjetnost.
Zveza med verjetnostno in porazdelitveno funkcijo diskretne slučajne spremenljivke je preprosta, saj je po četrti lastnosti porazdelitvene funkcije za vsak mogoč x_k

$$p_k = F(x_k + 0) - F(x_k) \tag{1.33}$$

in po drugi strani za vsak realen x velja:

$$F(x) = \sum_{x_k < x} p_k, \tag{1.34}$$

kjer zapis $x_k < x$ pomeni, da je potrebno sešteti vse tiste p_k, za katere je $x_k < x$.
Iz (1.33) in (1.34) vidimo, da porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke narašča v skokih, torej v točki x_k, ki spada v zalogo vrednosti, naredi funkcija skok p_k, med dvema sosednjima točkama nezveznosti pa je konstantna. Vsota vseh skokov je enaka

$$\sum_k p_k = 1,$$

saj dogodki $(X = x_k)$ sestavljajo popoln sistem.
Vse podatke o diskretni slučajni spremenljivki X lahko zapišemo v *verjetnostno shemo*, kjer sta zapisani zaloga vrednost in verjetnostna funkcija skupaj:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots \end{pmatrix}.$$

1.9 Porazdelitve

V tem poglavju si bomo ogledali nekaj porazdelitev, ki jih obravnavajo v gimnazijah. Začeli bomo z diskretnimi porazdelitvami (enakomerna diskretna porazdelitev in binomska porazdelitev) in nadaljevali z zveznimi porazdelitvami (normalna ali Gaussova porazdelitev).

Enakomerna diskretna porazdelitev
Diskretna slučajna spremenljivka X je porazdeljena enakomerno, če njeno zalogo vrednosti sestavljajo poljubna realna števila $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in je za vsak k od 1 do n

$$P(X = x_k) = \frac{1}{n}.$$

Zgled. Število pik X pri metu homogene in simetrične igralne kocke je porazdeljeno enakomerno na množici $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Binomska porazdelitev
Slučajna spremenljivka X je porazdeljena po binomskem zakonu, kadar je njena zaloga vrednosti $\{0, 1, \ldots, n\}$ in verjetnostna funkcija

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Pri tem je n poljubno naravno število in $0 < p < 1$. Binomsko porazdelitev označujemo z $b(n, p)$.

Zgled. Po tem zakonu je porazdeljena frekvenaca dogodka A, katerega verjetnost je v poskusu X enaka p. V n neodvisnih ponovitvah danega poskusa se torej frekvenca porazdeli po binomskem zakonu b(n,p).

Kadar se porazdelitvena funkcija $F(x)$ slučajne spremenljivke X izraža v obliki

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt,$$

pravimo, da je spremenljivka X zvezno porazdeljena. Funkcijo $p(t)$, v zgornjem integralu, imenujemo *gostota verjetnosti*, ki jo dobimo z odvajanjem porazdelitvene funkcije, $p(x) = F'(x)$, kjer je $p(x)$ zvezna. Ker iz $F(x)$ lahko dobimo $p(x)$, je gostota verjetnosti oblika porazdelitvenega zakona slučajne spremenljivke, ki pa pri diskretnih spremenljivkah ne obstaja, saj je pri njej odvod porazdelitvene funkcije enak 0, kjer obstaja.
Ker je $p(x)$ odvod naraščajoce funcije, je $p(x) \geq 0$ povsod. Iz $F(\infty) = 1$ sledi

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$$

in iz relacije (1.29) dobimo lastnost

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx.$$

To velja za poljubna $(x_1 < x_2)$. Nadalje iz (1.31) dobimo:

$$P(X = x) = \int_{x}^{x} p(t)dt = 0.$$

Čeprav dogodek $(X = x)$ morda ni nemogoč, je verjetnost, da ima zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka X vrednost x, zmeraj 0.

Normalna ali Gaussova porazdelitev
Normalna ali Gaussova porazdelitev je definirana z gostoto verjetnosti

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma})^2}. \tag{1.35}$$

Porazdelitev je odvisna od parametrov a in σ, kjer je lahko a poljubno realno število, σ pa poljubno pozitivno število. Normalno porazdelitev označimo z $N(a, \sigma)$.
Krivuljo, $y = p(x)$, ki prikazuje normalno porazdelitev, imenujemo *normalna* ali *Gaussova krivulja*, pri kateri parameter a določa lego krivulje, od parametra σ pa je odvisna oblika

krivulje. Krivulja ima teme v točki $x = a$ in prevoja v $x = a - \sigma$ in $x = a + \sigma$.
Najpreprostejša normalna porazdelitev je $N(0,1)$, njena gostota je $p(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$, in jo imenujemo *standardizirana normalna porazdelitev.*
Naj bo slučajna spremenljivka X porazdeljana po zakonu $N(a,\sigma)$. Tedaj je slučajna spremenljivka

$$Z = \frac{X - a}{\sigma}$$

porazdeljena standardizirano normalno, saj ̌je pri vsakem realnem z

$$P(Z < z) = P\left(\frac{X-a}{\sigma} < z\right) = P(X < a + \sigma z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a+\sigma z} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma})^2} dx.$$

Če vstavimo v integral $x = a + \sigma t$, dobimo

$$P(Z < z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Za standardizirano normalno porazdeljeno slučajno spremenljivko Z je

$$F(z) = P(Z < z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{z} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{1}{2} + \phi(z).$$

Sledi, da je za vsak z_1 in z_2:

$$P(z_1 < Z < z_2) = F(z_2) - F(z_1) = \phi(z_2) - \phi(z_1).$$

Za spremenljivko X, porazdeljeno po zakonu $N(a,\sigma)$, je:

$$P(x_1 < X < x_2) = P\left(\frac{x_1 - a}{\sigma} < Z < \frac{x_2 - a}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)$$

za vse x_1 in x_2. Torej, če je slučajna spremenljivka X porazdeljena po poljubne normalnem zakonu $N(a,\sigma)$, je mogoče izračunati verjetnost po zgornji formuli z uporabo tabele za funkcijo $\phi(x)$.

Zgled. Kolikšen delež odraslih je višjih od 180 cm, če je višina X na populaciji porazdeljena $X\ N(172,6)$?
$P(180 \leq x) = \phi(\infty) - \phi(\frac{180-172}{6}) = \phi(\infty) - \phi(\frac{4}{3}) = 0.5 - 0.4082 = 0.0918.$
Vidimo, da je delež odraslih, ki so večji od 180 cm, enak 9.18 %.

Poglavje 2

Verjetnost v učnem načrtu za osnovne in srednje šole

V tem poglavju bo predstavljena obravnava verjetnosti v osnovnih, srednjih poklicnih in strokovnih šolah ter v gimnaziji. Opisane bodo vsebine učnega načrta, navedeni operativni cilji in vsebine.

2.1 Osnovna šola

Pregledali smo učni načrt za osnovne šole. V osnovni šoli je matematika obvezni predmet in v devetletnem šolanju obsega 1318 ur.
V tem poglavju bo predstavljena verjetnost v učnem načrtu za osnovne šole. Glede na učni načrt za matematiko v osnovni šoli [21] se učenci z verjetnostjo srečajo v tretjem vzgojno izobraževalnem obdobju, in sicer v devetem razredu. Felda v svojem članku [5] pa meni, da bi lahko verjetnost, vsaj delno, bila obravnavana že v nižjih razredih, saj bi s tem lahko učenci stopili v zaključni razred s predhodnimi konkretnimi izkušnjami s slučajnimi dogodki. V osnovni šoli se obravnavana učna tema imenuje obdelava podatkov, zapisana pod temo druge vsebine. Našteti operativni cilji in vsebine v učnem načrtu pa so obvezni. Operativni cilji in vsebine so podani v sklopu Izkušnje s slučajnimi dogodki. Pod vsebine učnega načrta so podani:

- pojmi: poskus, dogodek, izid,
- dogodek: nemogoč, gotov, slučajen,
- verjetnost dogodka (statistična verjetnost).

V operativnih ciljih pa je zapisano, da učenci:

- pridobijo izkušnje o številsko izraženi verjetnosti,
- ocenijo verjetnost s sklepanjem in utemeljevanjem (življenjske situacije),
- izvajajo poskuse (met kocke, met žebljičkov, met kovanca, met valja idr.), opazujejo izbrane dogodke, zapišejo izide in napovedujejo verjetnost dogodka,
- izvajajo poskuse in na podlagi analize s kombinatoričnim drevesom napovedujejo izide (npr. met kovanca),
- zberejo, uredijo, analizirajo rezultate poskusa in ob konkretnih primerih (poskusih) spoznajo statistično verjetnost dogodkov,
- povežejo pojma statistična in matematična verjetnost[21].

V učnem načrtu so navedena tudi didaktična priporočila [21]. V njih je zapisano, da naj učenci prve izkušnje s pojmi poskus, dogodek, izid in verjetnost dogodka pridobivajo skozi izvajanje poskusov, kot so met kovanca, met kocke, vrtenje kazalca na vrtavki idr. V poskusu naj učenci najprej izberejo dogodek in opazujejo (štejejo) ugodne izide za izbrani dogodek. Kot primer je v priporočilih podan poskus meta kocke, pri čemer je lahko izbran dogodek: "pade pet pik". Za začetne dejavnosti naj bi učitelji za učence pripravili preproste situacije. Kot npr. če je vrtavka rdeča, je dogodek, da se bo kazalec ustavil na rdeči barvi gotov dogodek, dogodek, da se ustavi kazalec na beli barvi, pa nemogoč dogodek. Torej je verjetnost prvega dogodka ena, drugega pa nič. Če je vrtavka dvobarvna (pol/pol), je verjetnost dogodka, da se ustavi na eni izmed barv, enaka $\frac{1}{2}$. Prav tako je podan primer, da je pri metu kovanca verjetnost dogodka, da "pade cifra", enaka $\frac{1}{2}$. In verjetnost dogodka, da pri metu kocke "padejo tri pike", je $\frac{1}{6}$. Z izvajanjem poskusov si učenci pridobivajo izkušnje z napovedovanjem dogodkov (nemogoč, gotov, slučajni dogodek ...) in njihovih verjetnosti (verjetnost gotovega dogodka je ena, verjetnost nemogočega dogodka je nič, verjetnost slučajnega dogodka pa med nič in ena), pri čemer se zavedajo pomena števila ponovitev poskusa. Osnove napovedovanja dogodkov se lahko vpeljejo oziroma povežejo s poznavanjem delov celote (npr. ciljanje v tarčo), pri čemer učenci zapišejo verjetnost dogodka s številom [21].
Med standardi znanja v učnem načrtu ni omenjen noben standard, ki bi se navezoval na verjetnost, prav tako ni med minimalnimi standardi nobenega iz tega področja.

2.2 Gimnazija

Pregledali smo učni načrt za splošne, klasične in strokovne gimnazije. Na gimnaziji je matematika obvezni predmet in v štiriletnem šolanju obsega 560 ur. Prav tako je matematika obvezni predmet na maturi.
V tem poglavju bo predstavljena verjetnost v učnem načrtu za splošne, klasične in strokovne gimnazije, saj za njih velja enak učni načrt. Glede na učni načrt [1] se priporoča obravnava učne vsebine verjetnost v četrtem letniku gimnazijskega izobraževanja. Za obravnavo te snovi je v učnem načrtu predvidevano 12 šolskih ur. Vsebine, ki jih dijaki spoznajo, so:

- osnovni pojmi verjetnostnega računa (poskus, dogodke, vzorčni prostor),
- računanje z dogodki,
- subjektivna verjetnost, empirična verjetnost, matematična verjetnost, verjetnost dogodka,
- računanje verjetnosti nasprotnih dogodkov, vsote dogodkov,
- pogojna verjetnost,
- verjetnost produkta, neodvisna dogodka,
- zaporedje neodvisnih poskusov,
- popolna verjetnost,
- dvofazni poskusi,
- normalna porazdelitev [1].

V učnem načrtu je pod ustreznimi operativnimi cilji zapisano, da dijaki

- zapišejo dogodke in računajo z njimi,
- poiščejo vse dogodke nekega poskusa,
- razlikujejo med subjektivno, empirično in matematično verjetnostjo,
- razumejo in povežejo empirično in matematično verjetnost,
- poznajo in uporabljajo definicijo matematične verjetnosti,
- iz danih verjetnosti posameznih dogodkov računajo verjetnosti drugih dogodkov,
- ločijo med pojmoma nezdružljiva in neodvisna dogodka,

- uporabljajo vzorčni prostor,
- rešujejo naloge s pomočjo formule [1].

Cilji in vsebine se delijo na splošna in posebna znanja. Med posebna znanja spada reševanje nalog s pomočjo formule, ki je zapisano med cilji. Vsebine, ki spadajo med posebna znanja, so pogojna verjetnost, verjetnost produkta, neodvisna dogodka, zaporedje neodvisnih dogodkov, popolna verjetnost in dvofazni poskusi. Popolna verjetnost in dvofazni poskusi sta tudi vsebini, ki sta v učnem načrtu navedeni kot izbirni vsebini. Izbirne vsebine so vsebine, ki presegajo splošni nivo gimnazijskega matematičnega znanja. Te vsebine razvijamo le pri posameznikih in razredih, ki kažejo poseben interes, kadar nam realizacija učnega načrta to dopušča in naj ne bo le informativne narave. Izvajajo se lahko v okviru rednega pouka, krožkov ali projektnih tednov.
V učnem načrtu so zapisana tudi didaktična priporočila. V njih je zapisano, da uvod v verjetnostni račun začnemo z analizo verjetnosti dogodkov iz vsakdanjega življenja na intuativni ravni. Dogodke in operacije z njimi povežemo z množicami. Dijaki in dijakinje na konkretnih primerih spoznajo empirično verjetnost. Za primer vzamemo met kovanca, met kocke. Opazujejo gibanje in stabiliziranje relativne frekvence (statistična ali empirična verjetnost) ter primerjajo z matematično verjetnostjo. Pri poučevanju izbiramo primerne dejavnosti in problemske naloge, pri katerih dijaki razvijajo zmožnosti interpretiranja in kritičnega vrednotenja rezultatov. Pri pogojni verjetnosti si razmišljanje olajšamo z vzorčnim prostorom. Pozorni smo na nezdružljiva in neodvisna dogodka. Pri zaporedju neodvisnih poskusov se osredotočimo na Bernoullijevo zaporedje. Graf normalne porazdelitve spoznamo in interpretiramo na primerih. Priporočena je medpredmetna povezava z biologijo, kjer se osredotočimo na gene in dedovanje [1].
Pod vsebinska znanja je v učnem načrtu navedeno, da dijak pozna klasično definicijo verjetnosti in zna izračunati verjetnost sestavljenih dogodkov v enostavnih primerih.

2.3 Srednje poklicne in strokovne šole

Pregledali smo učne načrte oziroma kataloge znanja vseh poklicnih in strokovnih izobraževalnih programov ter tehniških izobraževalnih programov. Nižje poklicno izobraževanje traja dve leti in zajema 157 ur matematike. Srednje poklicno izobraževanje traja tri leta in zajema 213 ur matematike. Po srednjem poklicnem izobraževanju je mogoče opraviti še srednje-tehniško izobraževanje. To traja še dve dodatni leti in zajema od 206 do 242 ur matematike. Po petih letih se šolanje konča s poklicno maturo. Nazadnje smo pregledali še predmetnik srednjega strokovnega izobraževanja, ki traja štiri leta in zajema od 383 ur ali 408 ur matematike. Prav tako kot kombinacija srednjega poklicnega in srednje-tehniškega izobraževanja se srednje strokovno izobraževanje konča s poklicno maturo, kjer pa je matematika izbirni predmet. V nadaljevanju si bomo podrobneje ogledali obravnavo verjetnosti v vseh poklicnih srednješolskih programih.

V nižjem poklicnem izobraževanju verjetnost spada pod temo Delo s podatki in osnove verjetnostnega računa. Sklop v predmetniku pa se imenuje osnovni pojmi verjetnostnega računa. Operativni cilj, ki je zapisani v predmetniku je, da dijaki pridobijo izkušnje s slučajnimi dogodki. Pri tem dijak razlikuje in razume pojem gotovega, slučajnega in nemogočega dogodka. Med didaktičnimi priporočili je zapisano, da naj profesorji v sodelovanju z drugimi profesorji strokovno teoretičnih predmetov in praktičnega pouka pripravijo primere, ki izhajajo iz poklicnih in življenskih situacij [14].

V srednjem poklicnem izobraževanju se v predmetniku verjetnost ne pojavi, torej se je v samem izobraževanju ne obravnava. V kolikor pa se dijaki po triletnem izobraževanju odločijo za dvoletno nadaljevanje šolanja, torej poklicno-tehniško izobraževanje, se z verjetnostjo srečajo pri temi Osnove logike, obdelava podatkov in osnove verjetnostnega računa. Cilji osnov verjetnostnega računa se povezujejo s cilji iz srednje poklicnega izobraževanja, kjer dijaki spoznajo osnove dela s podatki. Pod operativnimi cilji je zapisano, da dijaki uporabljajo osnovne prijeme kombinatorike in določajo verjetnosti slučajnih dogodkov. V opisu ciljev je zapisano, da dijaki znajo predstaviti različne vrste izborov iz dane množice objektov, pri tem pa si pomagajo s tabelami in drevesnim diagramom. Z drevesnim diagramom in drugačnimi diagrami si pomagajo pri poznavanju in uporabi osnovnega zakona kombinatorike. Dijaki morajo prepoznati permutacije in kombinacije ter število kombinacij oziroma permutacij izračunajo z obrazcem. Dijaki morajo poznati pojem poskusa. Razumejo pojem empirične verjetnosti in jo znajo izračunati. Prav tako razumejo pojem matematične verjetnosti in jo znajo na preprostih primerih neposredno izračunati in rezultat pravilno interpretirati. S pomočjo znanja iz kombinatorike si pomagajo pri računanju matematične verjetnosti. Sistem elementarnih dogodkov predstavljajo z diagramom, s katerim si pomagajo tudi pri računanju verjetnosti sestavljenih dogodkov. Dijaki morajo razumeti pojem nezdružljivosti in neodvisnosti dogodkov ter znati izračunati verjetnost vsote nezdružljivih dogodkov in produkt neodvisnih dogodkov. Didaktičnih priporočil za ta obravnavani sklop v predmetniku ni [15].

V srednjem strokovnem izobraževanju velja enak predmetnik kot v srednjem poklicnem izobraževanju in poklicno-tehniškem izobraževanju.

Poglavje 3

Pregled učbenikov osnovne in srednjih šol

V nadaljevanju tega poglavja bodo predstavljeni veljavni osnovnošolski in srednješolski učbeniki za matematiko. Pregled učbenikov je napravljen po letniku izobraževanja. Torej bomo pričeli s pregledom učbenikov za 9. razred in končali s pregledom za 4. letnik. Za vsak učbenik je najprej opisana vsebina, ki jo obravnava s področja verjetnosti ter kako je verjetnost v danem učbeniku definirana. Po pregledu vseh učbenikov smo raziskali ali obstajajo v njih različni pristopi k definiciji pojmov ter ali obstajajo morebitne nejasnosti in napake.

3.1 Učbeniki za 9. razred osnovne šole

Pregledli smo naslednje učbenike: Skrivnosti števil in oblik 9 (2015) [1], Stičišče 9 (2015) [13] in e-učbenik Matematika 9 [6]. Naredili smo tudi zgodovinski pregled napak v učbenikih Matematika 9 (2005)[7] in Kocka 9 (2005) [4], ki več nista, od spremembe učnega načrta leta 2008, veljavna.

3.1.1 Skrivnosti števil in oblik

V učbeniku Skrivnosti števil in oblik 9 [1] je verjetnost umeščena pod poglavje Obdelava podatkov. Na začetku poglavja je strip, ki s svojo vsebino nakaže obravnavano učno snov. Pred začetkom obravnave snovi je kratek pogled v zgodovino in navedba podpoglavij. Ob koncu vsakega poglavja so zbrane naloge iz vseh podpoglavij, ki se imenuje Špela se preizkusi, kjer lahko učenci preverijo svoje znanje. Učenci v tem učbeniku izvedo, kaj je poskus

in kaj dogodek ter kateri dogodek je slučajen in kateri nemogoč. Prav tako izvedo, kako se določi frekvenca dogodka, relativna frekvenca in verjetnost dogodka. Učenci se spoznajo z matematično in empirično verjetnostjo.Vpeljava verjetnosti se prične z zgledom igre Človek ne jezi se, kjer učenci razmišljajo, ali lahko pri metu kocke že takoj pade 6 pik. Na tem zgledu učenci spoznajo kaj je poskus in kaj dogodek. Poskus je definiran kot dejanje, opravljeno po natanko določenih navodilih, ki se izvaja pod enakimi in natančno določenimi pogoji. Dogodek pa je definiran kot pojav, ki se pri izvajanju poskusa lahko zgodi ali pa tudi ne. Nesestavljen dogodek je definiran kot elementarni dogodek ali izid. Prav tako na zgledu spoznajo vrste dogodkov. Za gotov dogodek je zapisano, da je to dogodek, ki se zgodi ob vsaki ponovitvi poskusa in je njegova verjetnost enaka 1. Za nemogoč dogodek velja, da je to dogodek, ki se ne zgodi ob nobeni ponovitvi poskusa in je njegova verjetnost enaka 0. Slučajen dogodek je definiran kot dogodek, ki se pri nekaterih ponovitvah zgodi pri nekaterih pa ne. Primeri gotovega, nemogočega in slučajnega dogodka so podkrepljeni s fotografijami. Nato v učbeniku sledi definicija frekvence dogodka in relativne frekvence. Frekvenca dogodka A je definirana kot število dogodkov A pri vseh ponovitvah poskusa in relativna frekvenca je definirana kot število, ki izraža delež dogodkov A v vseh ponovitvah poskusa. Zapisano je tudi, da lahko relativno frekvenco dogodka A določamo le pri enakovrednih elementarnih dogodkih. Obe definiciji učenci spoznajo na zgledu. V sami definiciji pa je zapisano tudi, da relativna frekvenca določa teoretično verjetnost. Potem sledi določanje verjetnosti slučajnega dogodka. Verjetnost slučajnega dogodka je najprej ocenjena z besedami verjetno, zelo verjetno in malo verjetno. Nato pa sledi izražanje verjetnosti s številom, ki je natančnejše kot z besedo. Predstavljeno je empirično določanje verjetnosti s poskušanjem in teoretično določanje verjetnosti. Sledi zapis definicije verjetnosti slučajnega dogodka, ki pravi, da kadar so posamezni izidi enakovredni glede možnosti, da se zgodijo, je verjetnost slučajnega dogodka količnik med številom ugodnih izidov in številom vseh možnih elementarnih dogodkov v nekem poskusu. Zapisano je, da je verjetnost slučajnega dogodka število, večje od 0 in manjše od 1. Sledita rešena primera iz verjetnosti, kjer učenci spoznajo kombinatorično drevo. Temu pa sledijo naloge za vajo.
Že v napovedi tega učbenika na strani 213, kjer je zapisano, kaj se bo v tem poglavju spoznalo, se srečamo z napako. Zapisano je namreč, da bodo učenci izvedeli, kdaj je dogodek slučajen, kdaj gotov in kdaj nemogoč. Pravilen zapis bi bil, da bodo učenci izvedeli, kateri dogodek je slučajen, kateri gotov in kateri nemogoč. V nadaljevanju se ob naštevanju dogodkov v poskusu meta poštene igralne kocke, pojavi neobičajna slika mreže kocke, ki naj bi ločevala pošteno kocko od nepoštene. Običajna igralna kocka ima na nasproti ležečih ploskvah seštevek pik enak 7, to pa na mreži poštene kocke, narisane v učbeniku, ne drži. V primeru, kateri dogodek je gotov dogodek, se srečamo z vprašljivim izrazoslovjem. V učbeniku na strani 214 je zapisano: *Če bi imeli v skledi same rumene kroglice, bi bila na slepo izvlečena kroglica vedno rumene barve. Takšen dogodek imenujemo gotov dogodek in*

ga označimo s črko G. Bolje bi bilo zapisati, da bi bila izvlečena kroglica zagotovo rumene barve, saj predpostavljamo, da so v skledi same rumene kroglice. Prav tako je izrazoslovje vprašljivo tudi v povedi, prav tako na strani 214, kjer je opisan slučajen dogodek. Poved pravi: *Ker so v skledi* 4 *rumene in* 4 *bele kroglice, je naključno izvlečena kroglica ali rumene ali pa bele barve. Izbor barve bi bil naključen-slučajen, zato rečemo, da je takšen dogodek slučajen dogodek.* Ker s takšnim zapisom ni jasno, kaj slučajen dogodek sploh je, bi bilo bolje zapisati, da ker so v skledi 4 rumene in 4 bele kroglice, je naključno izvlečena kroglica ali rumene ali bele barve. Od tu pa sledi, da se dogodek *izvlečena kroglica je rumene barve* zgodi, če naključno izvlečemo kroglico rumene barve, sicer pa ne in zato je to slučajen dogodek. Podobno bi zapisali za dogodek *izvlečena kroglica je bele barve.* Kasneje pri rešenih primerih in nalogah za vajo pa se srečamo z nejasnostjo besedila. Prvi rešen primer, ki ga najdemo na strani 217 pravi: *Mečemo dve igralni kocki. Kolikšna je verjetnost, da je vsota pik na obeh kockah* 5*?*

a) Opravi 100 *poskusov in ugotovi, kolikokrat je ugoden izid?*

b) Nariši kombinatorično drevo za vse možne izide pri enem metu dveh kock.

c) Določi verjetnost dogodka na osnovi poskusov.

č) Določi relativno frekvenco in napovej teoretično (matematično) verjetnost.

d) Primerjaj, ali si se pri izvajanju poskusa približal teoretični (matematični) verjetnosti.

Del naloge želi, da se določi verjetnost dogodka na osnovi meritev, ni pa zapisano, katerih meritev in kaj naj merimo. V rešitvah istega primera se pri točki a) srečamo s preglednico, v kateri so zapisani vsi izidi pri poskusu meta dveh kock, ki ga ponovimo 100 krat, omenjeni dogodek (vsota pik na obeh kockah je 5) pa je pobarvan. Ob preglednici pa ni pojasnila, ali je treba prešteti pobarvane stolpce, prav tako je napaka v barvanju stolpcev, saj eden izmed stolpcev ni pobarvan, pa bi moral biti. Naslednji rešen primer na strani 219 pravi: *Rok je v zrak hkrati metal dva kovanca za* 50 *centov, Špela pa je v tabelo zapisovala dogodke, ki so se pri tem zgodili.*

a) dogodek A: na obeh kovancih pade Triglav

b) dogodek B: na obeh kovancih pade številka

c) dogodek C: na enem od kovancev pade Triglav, na drugem pa številka.

Poskus sta ponovila 100*-krat.*

Najprej se lahko vprašamo, kako je Špela vedela, na katerem kovancu je padla številka oziroma Triglav, če nista na obeh padli številki oziroma Triglav, saj ni nikjer zapisano, da bi kovanca bila označena. V članku Neverjetna verjetnost [4] je Felda pri tem primeru opozoril, da je namesto besede številka v rešitvah uporabljena števka, kar pa je v učbeniku, ki smo ga pregledali, že popravljeno. Prav tako je Felda v svojem članku opozoril, da je na preglednico zapisano, *Vse možne rešitve so* 4, kjer se pojavi vprašanje o katerih rešitvah je govora. V učbeniku, ki smo ga pregledali, je napaka odpravljena in piše: *Vse možne rešitve pri enem metu obeh kovancev so* 4. Med nalogami za vajo na stani 220 bomo izpostavili nekaj nalog. Prva naloga, ki bi jo izpostavili, pravi: *Kakšne vrste je opisan dogodek?*

a) Pri metu igralne kocke pade 8 *pik.*

b) Izbrana oseba v 9.*a razredu je deklica.*

c) V vrečki so same bele kroglice. Izvlečemo belo kroglico.

č) Iz vrečke, v kateri je 6 *rdečih in* 5 *belik kroglic, izvlečemo rdečo.*

Iz rešitev lahko preberemo, da je odgovor na točko *b*) slučajen dogodek. Pojavi se lahko vprašanje, kako vemo, da so v razredu deklice in dečki, saj to ni nikjer zapisano. Če so v razredu same deklice, je to lahko gotov dogodek, če pa so v omenjenem razredu sami dečki, potem je to nemogoč dogodek. Naslednja naloga pravi: *Zapiši vse možne dogodke za vsak poskus.*

a) Rok obiskuje pouk.

b) Učiteljica pisno ocenjuje.

c) Špela naključno izbere osebo iz njene nivojske skupine.

Neda, da pogledamo v rešitve, bi težko uganili, kateri so vsi možni dogodki. V rešitvah vidimo, da je rešitev preprosta. Za poskus *Rok obiskuje pouk* sta možna dogodka, zapisana v rešitvah učbenika *Rok je pri pouku* in *Roka ni pri pouku.* Tako bi lahko bila dogodka za poskus *učiteljica sprašuje*, v tem stilu *učenec je vprašan* in *učenec ni vprašan.* Naloga, ki učenca postavi v dilemo, pravi: *Iz kupa* 32 *igralnih kart (komplet vsebuje* 4*-krat: kralj, dama, fant, as,* 10*,* 9*,* 8*,* 7*)* 100*-krat na slepo izvleci eno karto, jo poglej, zapiši, katera je, in karto vrni.*

a) V preglednico zapisuj vse dogodke.

b) Izračunaj verjetnost za dogodek A: izvlečena karta je kralj.

c) Na osnovi podatkov v preglednici izračunaj, kolikokrat se je zgodil dogodek A.

č) Za koliko se razlikujeta rezultata pri b in c?

Dilema se pojavi, saj reševalec ne ve, ali naj po vrsti zapisuje vse dogodke, ki se lahko zgodijo, če izvlečemo karto iz kupa 32 kart, ali sproti zapisuje, kateri dogodek se je dejansko zgodil pri posamezni ponovitvi poskusa. Pod točko b je najverjetneje mišljena ena izvedba poskusa. Zakaj je potrebno primerjati točki b in c ter kaj nam to pove, pa ni jasno.

3.1.2 Stičišče 9

V učbeniku Stičišče 9 [13] se verjetnost obravnava v poglavju Uvod v verjetnost. Obravnavana snov je razdeljena na podpoglavja, ta pa na razdelke (ponavljamo, spoznavamo, utrjujemo in preverjamo). Poglavje se prične z uvodno stranjo, ki nakaže vsebino in kratek zgodovinski pregled. Nadaljuje se z razdelkom Ponavljamo, ki omogoči osvežitev pojmov in pravil. Tukaj učenci ponovijo kombinatorično štetje in kombinatorično drevo, spomnijo se poliedrskih teles in poliedrske igralne kocke ter ponovijo operacije in relacije med množicami. Ta razdelek v reševanje ponudi tudi nekaj nalog. Nato sledi razdelek Spoznavamo, kjer se učenci seznanijo z novo snovjo. Snov je vpeljana s prikazom ilustracije, sledita razlaga z izpisanimi trditvami na barvni podlagi s preprostimi rešenimi zgledi in po zahtevnosti razporejene naloge. Najprej učenci spoznajo pojma poskus in dogodek. Kaj ta dva pojma označujeta, spoznajo na zgledu meta poštene kocke. Poskus je definiran kot hoteno dejanje, opravljeno pod natančno določenimi pogoji po navodilih, ki ostajajo pri vseh ponovitvah poskusa enaka. Zapisano je, da vsaka sprememba navodil ali pogojev pomeni drug poskus in da vsak poskus ponuja različno število možnih izidov. Dogodek je definiran kot pojav, ki se pri posameznem poskusu zgodi ali se ne zgodi in ne sodi v pogoje poskusa. Zapisano je tudi, kako dogodke označujemo. V naslednjih zgledih učenci zvedo, da sta dogodka A in B v danem poskusu združljiva, če lahko nastopita skupaj, sicer sta nezdružljiva in da je določanje števila vseh mogočih nezdružljivih dogodkov enako iskanju vseh možnih izidov pri poskusu. Le te pa določimo s kombinatoričnim drevesom. Učenci izvedo, da dogodek, ki ni sestavljen imenujemo izid in da je sestavljen dogodek, dogodek sestavljen iz vsaj dveh možnih izidov. V naslednjem zgledu, kjer so v treh posodah kroglice in izvlečemo eno, učenci spoznajo vrste dogodkov. Zapisano je, da se gotov dogodek zgodi pri vsaki ponovitvi poskusa, da se nemogoč dogodek ne zgodi pri nobeni ponovitvi poskusa in da se slučajen (naključen) dogodek pri poskusu lahko zgodi, lahko pa se tudi ne zgodi in ga ne moremo vnaprej napovedati. Sledijo naloge za reševanje. V nadaljevanju učbenika učenci spoznajo verjetnost dogodka, za katero je zapisano, da je odvisna od tega, kako pogosto bi se opazovani dogodek zgodil pri velikem številu ponovitev istega poskusa. Izvejo, da se z ugotavljenjem verjetnosti dogodka ukvarja verjetnostni račun. Tukaj najdemo naloge, kjer učenci z besedo (verjetno, zelo verjetno, malo verjetno) izražajo verjetnost opisanih dogodkov. Po besednem izražanju verjetnosti sledi računsko izražanje verjetnosti. Učenci najprej spoznajo frekvenco dogodka in relativno frekvenco, sledi statistična ali eksperimentalna verjetnost in nazadnje matematična ali klasična verjetnost. Frekvenca dogodka in relativna frekvenca sta vpeljani s pomočjo zgleda. Ob zgledu učenci raziščejo, kako lahko izrazimo pogostost dogodka. Ob koncu zgleda je zapisano, da število dogodkov A pri vseh ponovitvah poskusa imenujemo absolutna frekvenca dogodka ali krajše frekvenca dogodka. Število, ki izraža delež dogodkov A v skupnem številu vseh ponovitev poskusa, imenujemo relativna frekvenca, ki jo dobimo tako, da frekvenco dogodka delimo s številom vseh ponovitev poskusa. V nadaljevanju sledi primerjanje verjetnosti dogodkov. Zapisano je, da pri absolutni primerjavi primerjamo absolutne frekvence. Takšna primerjava je smiselna le, če primerjamo absolutne frekvence, ki smo jih dobili pri enakem številu poskusov. Pri relativni primerjavi primerjamo relativne frekvence, zato ni pomembno, ali smo posamezne frekvence dobili pri različnem številu ponovitev poskusa. Sledijo naloge, nato pa podpoglavje o statistični verjetnosti. Zapisano je, da je statistična verjetnost dogodka A v opisanem poskusu število $P(A)$. Pri neodvisnih poskusih in dovolj velikem številu ponovitev poskusa se pri številu $P(A)$ relativna frekvenca dogodka A vedno ustali. Pri manj številih ponovitvah istega poskusa se statistične verjetnosti istega dogodka med seboj lahko precej razlikujejo. V nadaljevanju učenci izvedo, da je verjetnost gotovega dogodka enaka 1, verjetnost nemogočega dogodka enaka 0 in da verjetnost slučajnega dogodka zavzame vrednosti od 0 do 1. Preden so zapisane naloge za reševanje, je zapisan stavek, da statistično ali eksperimentalno verjetnost izračunamo na podlagi narejenih poskusov. Da se lahko verjetnost slučajnega dogodka izračuna le s sklepanjem, brez izvedbe poskusa in računanja statistične verjetnosti, učenci spoznajo v podpoglavju o računanju matematične ali klasične verjetnosti. Učenci spoznajo, da je za izračun matematične verjetnosti dovolj, da poznajo fizične lastnosti igrala, s katerim bi izvajali poskus, in da so vsi mogoči izidi poskusa enakovredni. Na zgledu met kovanca je v učbeniku razložen postopek računanja. Ob koncu zgleda je zapisano, da matematična ali klasična verjetnost približno napove to, kar naj bi se zgodilo za izbran dogodek A pri dovolj velikem številu ponovitev poskusa, v katerem so izidi vseh dogodkov enakovredni. Matematična ali klasična verjetnost dogodka je enaka količniku med številom izidov, ugodnih za dogodek A, in številom vseh v poskusu mogočih enakovrednih dogodkov. Sledi še nekaj zgledov, nato pa je zapisano, če vzamemo poskus, v katerem lahko nastopi n enakovrednih izidov, dogodek A pa naj sestoji iz katerega koli od m za ta poskus ugodnih izidov. Potem verjetnost dogodka A izračunamo z obrazcem $P(A) = \frac{m}{n}$. Temu sledijo naloge. Nazadnje sledita razdelka preverjamo in utrjujemo. V razdelku preverjemo so zbrani in zapisani vsi novi pojmi in pomembne definicije. V razdelku utrjujemo pa so zbrane naloge s področja verjetnosti, s katerimi učenci utrdijo svoje znanje. V tem učbeniku lahko opazimo pomanjkljivost pri definiciji izida na strani 294. Definicija pravi tako: *Izid imenujemo dogodek, ki ni sestavljen.* Definicija ni napačna, le dodano bi lahko bilo, da je izid elementaren dogodek. Ta primanjkljaj v zapisu lahko opazimo kasneje na strani 296, kjer pravi naloga: *Mečemo pošteno kocko ikozaedrske oblike. Opiši, kaj je poskus, in opredeli možne izide. Ali gre za elementarne ali sestavljene dogodke?*

a) Padlo je liho število, manjše od 17.

b) Padlo je število, manjše od 21.

c) Padlo je število 20.

č) Padlo je število 22.

Iz vprašanja, ali gre za elementarne ali sestavljene dogodke, sicer lahko sklepamo, da so elementarni dogodki tisti dogodki, ki niso sestavljeni, ne moremo pa vedeti, ali bodo na ta način razmilšljali tudi učenci. Ker nikjer predhodno ni zapisano, kateri dogodki so elementarni, bi lahko imeli težave pri reševanju naloge.
Naslednja naloga, kjer lahko učenci najdejo različne rešitve, pravi: *Ugotovi, katere trditve so nepravilne in jih popravi:*

a) Pri metu kovanca pade vedno števka.

b) Oktaedrsko kocko trikrat vržemo po mizi in seštejemo dobljena števila. Po treh ponovitvah poskusa je padla vsota metov 25.

c) Iz običajnega igralnega kompleta 32 *kart potegnemo tarok.*

Za prvo trditev lahko rečemo, da je nepravilna, v kolikor mečemo pošten kovanec. Lahko pa rečemo tudi, da je trditev pravilna, saj nikjer ni zapisano, kakšen kovanec mečemo. Tako da lahko sklepamo tudi, da je nepošten ali obtežen tako, da vedno pade števka. Isto sklepanje se lahko pojavi tudi pri drugi trditvi, saj ni zapisano, ali je oktaedrska kocka poštena ali ne. V primerjavi z ostalimi učbeniki ima ta v razdelku ponavljamo, ponovitev kombinatoričnega štetja ter operacije in relacije med množicami. Zasledili pa smo tudi zapis, da vsaka sprememba navodil ali pogojev pomeni drug poskus.

3.1.3 Matematika za radovedneže 9

V učbeniku Matematika za radovedneže 9 [12] se verjetnost obravnava v poglavju Obdelava podatkov. Razlaga učne snovi in naloge za utrjevanje so razčlenjene in razdeljene v tri skupine glede na zahtevnostno stopnjo. V prvi skupini je učna snov razložena na minimalnem in temeljnem nivoju, razlagi so dodani zgledi reševanja nalog in naloge za vajo. V drugi

skupini se z zastavljenimi nalogami razširijo temeljni učni cilji in učenci utrdijo učno snov. V tretji skupini pa učenci svoje znanje poglobijo in razširijo. Delo po pozameznih skupinah je v učbeniku označeno z različnimi barvami.
Obravnava snovi se začne z zapisom, kjer se učenci srečajo z besedami mogoče, zagotovo, skoraj gotovo in malo verjetno. Iz tega zapisa učenci spoznajo, da takšno oceno verjetnosti označujemo kot subjektivno verjetnost. Zapisano je, da je za subjektivno verjetnost značilno, da izraža zgolj psihološko doživljanje možnosti, da se bo nek dogodek zgodil. Nato se obravnava snovi nadaljuje s poskusom meta kocke, kjer sta definirana poskus in dogodek. Poskus je definiran kot hoteno dejanje, ki ga opravimo v natančno določenih pogojih. Dogodek je definiran kot pojav, ki se pri določenem poskusu lahko zgodi ali pa tudi ne. Zapisano je, da ločimo gotove, nemogoče in slučajne dogodke. Gotov, nemogoč in slučajen dogodek so definirani zgolj na primeru. V nadaljevanju je definirana relativna frekvenca danega dogodka, kot količnik $\frac{m}{n}$ med številom poskusov, v katerih se je zgodil dan dogodek (m), in med številom vseh poskusov (n). Sledi zgled, ki učence z računanjem relativnih frekvenc pripelje do empirične (statistične) verjetnosti. Ob koncu zgleda je zapisano, da vrednosti, h kateri težijo relativne frekvence nekega dogodka pri zelo velikem številu, pravimo empirična (statistična) verjetnost tega dogodka. Nato sledijo naloge za vajo.
V tem učbeniku je verjetnost, v primerjavi z ostalimi, obravnavana najmanj obsežno. Glede na učni načrt v tem učbeniku manjka definicija izida, matematična verjetnost in napovedovanje izidov na podlagi analize s kombinatoričnim drevesom. Prav tako bi lahko bile zapisane definicije gotovega, nemogočega in slučajnega dogodka. Ti so prikazani le na primerih. Nikjer nismo zasledili oznak za gotov, nemogoč, slučajen dogodek in verjetnost dogodka. Zapisano ni, da je verjetnost gotovega dogodka enaka 1, verjetnost nemogočega dogodka enaka 0 in verjetnost slučajnega dogodka med 0 in 1. Definicija: *Vrednosti, h kateri težijo relativne frekvence nekega dogodka pri zelo velikem številu, pravimo empirična (statistična) verjetnost tega dogodka*, bi lahko bila zapisana tako: *Vrednost, h kateri težijo relativne frekvence nekega dogodka pri zelo velikem številu ponovitev danega poskusa, pravimo empirična (statistična) verjetnost tega dogodka.* Saj se po nekem času relativna frekvanca stabilizira pri neki vrednosti.

3.1.4 Matematika 9 (e-učbenik)

Pregledali smo ťudi e-učbenik Matematika 9 [6], kjer verjetnost najdemo v poglavju Verjetnost in kombinatorika. To poglavje je razdeljeno na dve podpoglavji in sicer na Poskus, dogodek, izid in na Računanje verjetnosti. Prvo podpoglavje se začne z interaktivno igro Kolo sreče. Pri tej igri učenci razmišljajo, kakšne so njihove možnosti za osvojitev nagrade na kolesu sreče. Tej uvodni motivaciji sledi ponovitev snovi, kjer ponovijo ponazarjanje ulomkov z deli kroga in razporejanje kroglic v kombinatorično drevo. V tem učbeniku je s pomočjo risanke razloženo, kaj so poskus, dogodek in izid. Pri predvajanju te risanke se od učencev pričakuje, da so pozorni na besede dogodek, poskus in izid. Risanki sledijo definicije teh treh pojmov. Poskus je definiran kot načrtna aktivnost, ki jo izvajamo po v naprej določenih pravilih in pod enakimi pogoji. Dogodek je definiran kot pojav, ki se pri poskusu lahko zgodi ali pa ne. In izid je vsak dogodek, ki se lahko zgodi v danem poskusu. Zapisano je, da so ugodni izidi tisti, ki se zgodijo v korist opazovanega dogodka in neugodni tisti, pri katerih se opazovani dogodek ne spremeni. Za lažje razumevanje poskusa, dogodka in izida sta v nadaljevanju zapisana dva zgleda. S pomočjo interaktivne igre je razloženo, kateri dogodek je gotov, nemogoč in slučajen. Zapisana je tudi definicija, ki pravi, da je gotov dogodek tisti, ki se zgodi pri vsaki ponovitvi poskusa, nemogoč dogodek je tisti, ki se ne more zgoditi pri nobeni ponovitvi poskusa in slučajni dogodek je tisti, ki se pri nekaterih ponovitvah poskusa zgodi, pri drugih pa ne. Sledita dva zgleda na temo gotovih, nemogočih in slučajnih dogodkov. Ob koncu prvega podpoglavja je zapisan povzetek, kjer so še enkrat zapisane pomembne definicije. Podpoglavje se zaključi z nalogami za utrditev snovi. Prav tako kot prvo podpoglavje se tudi drugo začne z interaktivnim zgledom in ponovitvijo že znane snovi. Pri zgledu učenci spoznajo uporabo besede verjetno v vsakdanjem življenju in kje se z verjetnostjo lahko srečamo. S ponovitvijo že znane snovi pa učenci ponovijo kaj je izid in kateri so gotovi, nemogoči in slučajni dogodki. V tem učeniku je empirična verjetnost poimenovana statistična verjetnost. Razlaga temelji na primeru, kjer je med ugotovitvami zapisano, da je količnik med številom poskusov, v katerih se dogodek zgodi, in številom vseh poskusov, relativna frekvenca. Temu motivacijskemu zgledu sledi definicija statistične oziroma empirične verjetnosti. Definicija pravi, da je statistična verjetnost število, h kateremu težijo relativne frekvence nekega dogodka, pri velikem številu ponovitev poskusa. Definiciji sledita dva zgleda, kjer učenci izračunajo relativno frekvenco dogodka. Statistični definicije verjetnosti sledi matematična verjetnost. Matematična verjetnost je definirana kot količnik med številom ugodnih izidov nekega dogodka in številom vseh izidov tega dogodka. V nadaljevanju je zapisano, da je matematična verjetnost enaka statistični verjetnosti in, da se zaradi tega uporablja kar izraz verjetnost. Sledi pet zgledov na temo računanje verjetnosti. V nadaljevanju učenci spoznajo verjetnost gotovega, nemogočega in slučajnega dogodka. Definicija pravi, da je verjetnost gotovega dogodka enaka 1, verjetnost nemogočega dogodka je enaka 0 in verjetnost slučajnega dogodka je med 0 in 1. Kot pri prvem podpoglavju je tudi v drugem ob koncu zapisan povzetek s pomembnimi definicijami in se zaključi z nalogami za utrjevanje snovi.

Posebnih napak in nejasnosti v tem učbeniku nismo opazili. Nerodno zapisan je le stavek na strani 505, ki bi lahko povzročal nejasnosti, glasi se: *Statistična verjetnost je enaka matematični verjetnosti. Zato bomo uporabljali samo pojem verjetnost.* Učenec bi lahko postavil vprašanje, zakaj se v učbeniku obravnava statistično verjetnost in matematično verjetnost posebej, če sta enaki. Morda bi bilo bolje ta stavek izpustiti ali ga formulirati drugače, na primer: *Ker sta pojma statistična in matematična verjetnost med seboj povezana, bomo v nadaljevanju uporabljali pojem verjetnost.*

3.1.5 Matematika 9

V učbeniku Matematika 9 [7], ki po spremembi učnega načrta leta 2008 ni več veljaven, je verjetnost umeščena pod poglavje Uvod v verjetnost. Na začetku poglavja so za vsako posamezno zahtevnostno raven zapisani učni cilji. Ta učbenik vsebuje naloge na vseh treh zahtevnostnih ravneh, ki so označene s tremi barvami in pripadajočimi kockami. Razlaga snovi je zasnovana tako, da so najprej zastavljeni problemi, ki jim sledijo ugotovitve. Snov je predstavljena tudi z zgledi. V prvem podpoglavju je obravnavano, kaj je poskus, dogodek, izid in verjetnost. V uvodu je verjetnost predstavljena v vsakdanjem življenju z izrazi, s katerimi jo izražamo, npr. mogoče, nemogoče ... V prvem problemu sta definirana poskus in dogodek. Poskus je definiran kot vsako hoteno dejanje, ki ga pod točno določenimi navodili in v natančno določenih pogojih opravimo. Dogodek pa je definiran kot pojav, ki se zgodi ali pa se ne zgodi pri posameznem poskusu. Med ugotovitvami problema je zapisano in za tretjo zahtevnostno raven označeno, kdaj je dogodek sestavljen in kateri dogodki so elementarni. Uresničitev določenega dogodka pa je opredeljeno kot izid. V drugem problemu učenci spoznajo, kateri dogodek je gotov, nemogoč in slučajen. V ugotovitvah je gotov dogodek definiran kot dogodek, ki se zgodi v vsaki ponovitvi poskusa, nemogoč dogodek je definiran kot dogodek, ki se tudi pri velikem številu ponovitev ne more zgoditi in slučajni dogodek je definiran kot dogodek, ki se pri ponovitvah poskusa kdaj zgodi, kdaj pa ne. Pri samih definicijah je zapisano, kako matematično označimo gotov in nemogoč dogodek. V tretjem problemu je na primeru razloženo, kdaj so slučajni dogodki med seboj neodvisni oziroma odvisni in kdaj sta dva dogodka medsebojno izključujoča. Naslednje podpoglavje je namenjeno kombinatoričenmu drevesu. Na primeru se učenci naučijo konstruirati kombinatorično drevo. Snov se nato nadaljuje z empirično verjetnostjo. Učenci najprej, skozi problem 8, spoznajo absolutno in relativno primerjavo. Zapisano je, da kadar primerjamo uspešnost posameznikov pri nekem izvedenem poskusu na ta način, da primerjamo število ugodnih izidov nekega slučajnega dogodka pri istem številu ponovitev poskusa, imenujemo to primerjavo absolutna primerjava. Primerjavo, pri kateri primerjamo deleže ugodnih izidov nekega izbranega slučajnega dogodka, imenujemo relativna primerjava. Od tu sledi, da število ugodnih izidov izbranega slučajnega dogodka A, pri vseh ponovitvah nekega poskusa, imenujemo absolutna frekvenca dogodka A in da je relativna frekvenca dogodka A, količnik med številom ugodnih izidov dogodka A, torej med absolutno frekvenco dogodka A in med številom vseh ponovitev poskusa. Posebej je poudarjeno, da je absolutna primerjava smiselna le, če primerjamo absolutne frekvence izbranega slučajnega dogodka pri istem številu ponovitev, medtem ko je relativna primerjava relativnih frekvenc

izbranega slučajnega dogodka smiselna vedno, četudi smo le te dobili pri različnem številu ponovitev. Pred tem je zapisano, da je absolutna frekvenca dogodka število ugodnih izidov slučajnega dogodka pri vseh ponovitvah poskusa, relativna frekvenca dogodka pa je količnik med številom ugodnih izidov dogodka in med številom vseh ponovitev poskusa. Skozi naslednji problem učenci spoznajo, da verjetnost, ki jo izračunamo s pomočjo relativne frekvence, imenujemo empirična verjetnost, saj smo do številske vrednosti, pri kateri se relativna frekvenca stabilizira, prišli na empirični način. Razlagi empirične verjetnosti sledi matematična verjetnost. Tukaj učenci zvedo, da verjetnost, ki se izračuna kot količnik med številom ugodnih izidov dogodka in številom vseh možnih dogodkov, imenujemo matematična verjetnost. Pojasnjeno je tudi, kdaj sta dogodka enakovredna. Podpoglavju o matematični verjetnosti sledi utrjevanje znanja, kjer je en rešen primer in štirje primeri, ki od učencev zahtevajo samostojno delo.
V tem učbeniku bi nejasnosti lahko povzročala naloga na strani 177, ki je poimenovana kot Problem 3. Problem 3 se glasi: *Pri poskusu metanja kocke določimo: gotov dogodek, nemogoč dogodek in slučajni dogodek. Določimo gotov dogodek, nemogoč dogodek in slučajne dogodke za vsoto pik pri desetih metih pravilne kocke. Kako so slučajni dogodki povezani med seboj?* Najprej nas zmoti uporabljen izraz *pravilna kocka*, saj bi bil pravilnejši izraz *poštena kocka.* Prav tako v besedilu problema ni zapisano, kakšna naj bi bila, "pravilna" kocka, tako da bralev sklepa, v primeru, da ne prebere ugotovitev, da gre za običajno pošteno igralno kocko. Zastavljenemu problemu sledi ugotovitev: *Na kocki imamo šest ploskev. Na vsaki je različno število pik: od* 1 *do* 6. *Če opredelimo dogodek F za ta poskus tako:*
F= { Pri metu kocke pade 8 pik }, potem je dogodek F za ta poskus in njegove poljubne ponovitve nemogoč dogodek. V primeru meta kocke lahko izberemo nemogoč dogodek med nešteto možnostmi (9 pik, 10 pik ...). Na tem mestu bi lahko dodali še, da so to nemogoči dogodki zato, ker mečemo kocko, na kateri so števila od 1 do 6. Ugotovitev se nadaljuje: *Dogodki E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6 so vsi slučajni dogodki. V ponovitvah poskusov se kdaj zgodijo, kdaj pa ne.* Nepozoren bralec bi se lahko vprašal, kateri so dogodki E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6. Ti dogodki so omenjeni v ugotovitvah problema 1 na strani 275, v tem problemu pa niso zapisani, niti ni omenjeno, da se besedilo nanaša na enega izmed prejšnjih problemov. Za učence osnovne šole bi bilo primerno, da so še enkrat zapisani. V problemu 1 so zapisani dogodki kot E_1={Pade enica.}, E_2={Pade dvojka.}, E_3={Pade trojka.}, E_4={Pade štirica.}, E_5={Pade petica.}, E_6={Pade šestica.}. Čeprav bi morda bil boljši zapis E_1={Na kocki pade ena pika.}, E_2={Na kocki padeta dve piki.}, E_3={Na kocki padejo tri pike.}, E_4={Na kocki padejo štiri pike.}, E_5={Na kocki pade pet pik.}, E_6={Na kocki pade šest pik.}. Temu pa bi sledil zapis, da so ti dogodki slučajni. Ugotovitev se nadaljuje o neodvisnih in izključujočih dogodkih. In sicer pravi: *Če je v prvem metu padlo šest pik, v drugem pa štiri pike, to pomeni, da* 2. *izid ni odvisen od izida prvega meta. Prav tako, če padejo* 4 *pike, ne more hkrati pasti* 6 *pik in obratno.* V posebnem okvirčku je v nadalje-

vanju zapisano: *Dogodki E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6 so med seboj neodvisni slučajni dogodki. Dogodka E_4 in E_6 sta medsebojno izključujoča - ne moreta se zgoditi sočasno.* Nadaljevanje ugotovitve problema 3 se nadaljuje na strani 278, kjer je določen gotov in nemogoč dogodek za vsoto pik pri desetih metih kocke ter razlaga, kdaj sta slučajna dogodka odvisna. In sicer: *Dogodek B ={ V vsakem metu pade manj kot sedem pik.}je za poskus kotaljenja kocke gotov dogodek. Pri vsaki ponovitvi poskusa bo vedno padlo manj kot sedem pik, to je ena, dva, tri, štiri, pet ali šest pik. Nemogoč dogodek za vsoto pik pri desetih metih kocke je, da bo vsota pik manj kot* 10. *Gotov dogodek je, da bo vrednost vsote pik manj kot* 61 *in več kot* 9. *Vsi dogodki: S_1, ..., S_{60} so slučajni dogodki. S_1 je slučajni dogodek, ki je odvisen od dogodka E_1. Vsakokrat, ko se zgodi dogodek S_1, se mora desetkrat zaporedoma zgoditi tudi dogodek E_1. Slučajni dogodek S_1 je odvisni dogodek. Odvisen je od dogodka E_1.* Tukaj lahko opazimo nedoslednost piscev, na začetku problema je poskus opredeljen kot metanje kocke, potem pa uporabljen izraz kotaljenje kocke. Pri določanju gotovega, nemogočega in slučajnega dogodka za vsoto pik pri desetih metih poštene kocke se ugotovitev navezuje na ugotovitve problema 1 iz strani 276. Tam je zapisano in razloženo, zakaj je najmanjša možna vsota pri desetih metih kocke enaka 10 in največja možna vsota 60. Prav tako je zapisano, kaj so dogodki S_1, ..., S_{60}. Bralec oziroma učenec, ki ni pozoren, se lahko pri ugotovitvi problema 3 vpraša, zakaj je nemogoč dogodek, da je vsota pik, pri desetih metih kocke, manj kot 10 in zakaj je gotov dogodek vrednost vsote pik, pri desetih metih kocke, manj kot 61 in več kot 9. Prav tako bi ga lahko zmedle oznake za slučajne dogodke in bi se vprašal, kateri dogodki so dogodki S_1, ..., S_{60}. Morda bi bilo nesmiselno to še enkrat zapisati, lahko pa bi bilo omenjeno, da lahko razlago najdemo med ugotovitvemi problema 1 na strani 275.

3.1.6 Kocka 9

V učbeniku Kocka 9 [4], ki prav tako od spremembe učnega načrta leta 2008 ni več veljaven, najdemo verjetnost v poglavju Obdelava podatkov in verjetnost. V tem učbeniku se posamezno poglavje začne z uvodno nalogo, ki učencem predstavi obravnavo snovi na primeru iz vsakdanjega življenja. Skozi obravnavo snovi pa učence vodijo vprašanja, ki se porajajo ob uvodni nalogi. Na oranžnih podlagah pa je zapisan povzetek snovi. Obravnava verjetnosti se prične z uvodno nalogo iz vsakdanjega življenja in sicer predstavljena je igra človek ne jezi se. Nato pa so postavljena vprašanja, ki se nam lahko ob dani nalogi postavijo. Vprašanja so zastavljena tako, da skozi odgovore na ta vprašanja, ki so spodaj zapisani, učenci spoznajo, kaj je dogodek, kaj je mogoč dogodek, kdaj je izid ugoden, kaj je verjetnost. Ker je v uvodni nalogi podana igra človek ne jezi se, je v učbeniku zapisano, da met kocke poimenujemo dogodek, da so pri metu kocke mogoči dogodki, da na kocki pade 1, 2, 3, 4, 5 ali 6 pik. Zaradi zastavljenosti naloge, je v tem primeru ugoden izid, če pade

pri metu kocke 6 pik. Naloga je predstavljena tudi grafično, s tabelo, kjer so narisani vsi dogodki in ugoden izid, v nadaljevanju pa je predstavljeno tudi kombinatorično drevo. Sledi zapis, da je verjetnost količnik med številom ugodnih izidov in številom vseh dogodkov. V naslednji nalogi, met kovanca, učenci spoznajo gotov in nemogoč dogodek. Ker gre pri metu kovanca za desetiški ulomek, je zapisano, da v takšnih primerih lahko verjetnost zapisujemo tudi v odstotkih. Gotov dogodek je definiran kot dogodek, ki se zagotovo zgodi in verjetnost takšnega dogodka je 100 % in jo lahko zapišemo s številom 1. Povedano drugače, verjetnost gotovega dogodka je 1. Nemogoč dogodek je definiran kot dogodek, ki se ne more zgoditi. Nato sledi naloga, ki zahteva nekoliko poglobljeno znanje in je označena z barvo. Pri tej nalogi učenci spoznajo možnosti kombinacije, kadar mečemo dva kovanca hkrati. V nadaljevanju so zapisani še trije rešeni zgledi, katerim sledita dva izziva, za tiste učence, ki želijo v matematiki raziskovati. Izzivoma sledijo naloge za samostojno reševanje, kjer modro označena naloga pomeni višji nivo. Po predelani snovi poglavja lahko učenci svoje znanje preverijo v sklopu Preizkusi se, kjer lahko izbirajo naloge treh težavnostnih stopenj. Učbenik ima tudi priložene rešitve vseh nalog.
Kot že vemo, se poglavje iz verjetnosti v tem učbeniku začne z zgledom. Zgled najdemo v učbeniku na strani 162 in pravi: *Anja in Jurij sta igrala Človek ne jezi se. Anja je trdila, da bo zagotovo že v prvem metu vrgla* 6 *pik. Razmislimo:*

- *Kaj pomeni Anjina trditev?*
- *Kolikšna je verjetnost, da bo Anja v prvem poskusu res vrgla* 6 *pik?*
- *Kaj pa, če bi metala kovanec in želela, da pade podoba?*

Besedilu zgleda sledi pojasnitev, ki pravi: *Anjina trditev temelji na njeni želji, da bi zares že v prvem metu vrgla* 6 *pik. Met kocke poimenujemo dogodek. Mogoč dogodek pri metu kocke je padec* 1, 2, 3, 4, 5 *ali* 6 *pik. Če pa kocka pokaže* 6 *pik, kot si je želela Anja, je to ugoden izid. Pri Anjini trditvi gre za željo, ki temelji na osebnem doživljanju situacije. V vsakdanjem življenju za dogodek, ki ga ne moremo vnaprej napovedati, uporabljamo izraze: zelo verjetno, verjetno, mogoče, zagotovo, nemogoče . . .*
Pod pojasnitvijo je preglednica, kjer je grafično prikazan poskus Anje in Jurija. Pod preglednico pa je zapisano: *Vseh mogočih dogodkov je* 6, *le eden pa ima za Anjo tudi ugoden izid. Matematična verjetnost, da bo Anja že v prvem poskusu vrgla* 6 *pik, je torej* $1:6$ *ali* $\frac{1}{6}$. *Verjetost j količnik med številom ugodnih izidov in številom vseh dogodkov.*
Že ob vstopu v verjetnost se srečamo z napakami, saj so osnovni pojmi v prvem zgledu napačno vpeljani. Met kocke je opredeljen kot dogodek namesto poskus. Besedna zveza mogoč dogodek pa je uporabljena namesto besede izid. Tako imamo zapisano, da je pri dogodku (met kocke) mogoč dogodek padec 1, 2, 3, 4, 5 ali 6 pik in želeni mogoč dogodek (na kocki pade 6 pik) ugoden izid. Zapisano bi moralo biti, da je izid pri metu kocke, padec

1, 2, 3, 4, 5 ali 6 pik. Verjetnost je definirana kot količnik med številom ugodnih izidov in številom vseh dogodkov, medtem ko bi definicija verjetnosti morala biti zapisana kot količnik med številom ugodnih izidov in vseh izidov. Definicija same verjetnosti ni poudarjena kot bi morala biti, ampak se zlije z besedilom. Učenci, ki niso najbolj pozorni in ki površno berejo besedilo, jo lahko hitro spregledajo oziroma definiciji ne posvetijo dovolj pozornosti. Prav tako je omenjena matematična verjetnost, kar lahko zmede učenca. Lahko se mu poraja vprašanje, ali obstaja še kakšna druga vrsta verjetnosti in zakaj je to matematična verjetnost. Nikjer v nadaljevanju pa ni razlage, zato bi bilo bolje namesto matematična verjetnost uporabiti izraz verjetnost tako kot je v nadaljevanju učbenika. Učenca oziroma bralca lahko zmoti tudi stavek: *Če pa kocka pokaže* 6 *pik, ...*, saj nam kocka ne pokaže 6 pik, ampak na kocki lahko pade 6 pik. Tako bi bil primernejši zapis: *Če pa na kocki pade* 6 *pik, ...*.
Temu zgledu sledi resitev tretjega vprašanja iz prvega zgleda, ki ga najdemo na strani 163. Da se spomnimo, vprašanje pravi: *Kaj pa, če bi metala kovanec in želela, da pade podoba?* Že na začetku se pojavi napaka, saj v preglednici ni naveden pravi ugoden izid, namesto podobe je številka. Odgovor na vprašanje pravi: *Pri metu kovanca sta mogoča samo dva dogodka, ugoden pa je izid, ko kovanec kaže podobo. Od dveh izidov je za nas ugoden en sam, kar matematično zapišemo* $\frac{1}{2}$ *ali* $1:2$. *Pri desetiških ulomkih verjetnost lahko predstavljamo v odstotkih. Tako lahko rečemo: verjetnost, da bo kovanec pokazal podobo, je* 50 *%.*
Zapisano je, da je od dveh izidov za nas ugoden en sam, kar matematično zapišemo $\frac{1}{2}$ ali $1:2$. Pri uvajanju verjetnosti pa bi bilo bolje povedati, da je ugoden en izid izmed dveh, kar zapišemo v obliki $\frac{1}{2}$. V tem primeru in prav tako v prejšnjem lahko vidimo zapis verjetnosti kot razmerje, ker pa je verjetnost količnik, takšen zapis ni primeren. V prvem zgledu je zapisano: *Matematična verjetnost, da bo Anja že v prvem poskusu vrgla* 6 *pik, je* $1:6$ *ali* $\frac{1}{6}$. V drugem zgledu pa je zapisano: *Od dveh izidov je za nas ugoden en sam, kar matematično zapišemo* $\frac{1}{2}$ *ali* $1:2$. Bolje bi bilo, če bi bil zapis poenoten in bi se glasil *Verjetnost dogodka je* $\frac{1}{2}$ *oz.* $\frac{1}{6}$. Tako bi bilo lažje in razumljivejše za učence. Na napake naletimo tudi pri uvedbi gotovega in nemogočega dogodka. Razlaga v učbeniku pravi: *Kadarkoli vržemo kovanec, bo zagotovo padel na eno stran. Dogodek, ki se zagotovo zgodi, imenujemo gotovi dogodek. Verjetnost gotovega dogodka je* 100 *% in jo lahko zapišemo s številom* 1. *Pri metu kovanca je enaka verjetnost, da pade podoba, kot da pade številka. Ugodna izida sta enako verjetna. Pri metu kovanca ni možnosti, da bi kovanec ostal v zraku. Dogodek, ki se ne more zgoditi, imenujemo nemogoč dogodek.* Po tej razlagi je gotov dogodek, pri metu kovanca, da kovanec pade na eno stran in nemogoč, da kovanec ostane v zraku. Boljša razlaga bi bila, če bi gotov dogodek opisali, da na kovancu pade podoba ali številka, nemogoč dogodek pa, da ne pade ne podoba ne številka. K izračunu verjetnosti, da pade številka, je zapisano, da je 1 gotov dogodek, medtem ko bi moralo pisati, da je to verjetnost gotovega dogodka. Napake lahko zasledim tudi v zgledu, s katerim bi utrdili razumevanje osnovnih pojmov. Besedilo zgleda

pravi: *V vrečki je* 6 *belih in* 9 *črnih žetonov.*

a) Kolikšna je verjetnost, da na slepo iz vrečke potegnemo črne žetone?

b) Kolikšna je verjetnost, da potegnemo bel žeton?

Opazimo lahko, da prvo vprašanje ni jasno zapisano, saj ne vemo, ali potegnemo iz vrečke vse črne žetone. Postopek reševanja nam kasneje pokaže, da bi moralo pisati, kolikšna je verjetnost, da iz vrečke na slepo potegnemo črn žeton. Pri reševanju je zapisano, da je v vrečki 15 žetonov, torej je vseh dogodkov 15. Da je število dogodkov enako število žetonov v vrečki ne drži in s takim zapisom dobijo učenci zmotno prepričanje, da je to enako. Zapis, ki nas vodi do odgovora, pravi, da je za nas ugoden izid, če izvlečemo črn žeton, teh pa je 9. Torej je verjetnost, da potegnemo črn žeton $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ ali 60 %. Ta premislek je v skladu z zapisom formule, $verjetnost = \frac{ugodni\ izidi}{vsi\ dogodki}$ na robu strani učbenika, napačno povzete definicije, ki pravi, da število ugodnih izidov delimo s številom vseh mogočih dogodkov. Za učence bi bilo enostaneje, če bi bilo zapisano, ker je 9 izmed 15 žetonov črnih, je verjetnost, da na slepo izvlečemo črn žeton, enaka $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ ali 60 %. V tem zgledu lahko opazimo tudi nedoslednost, saj se namesto žetona v odgovoru na drugo vprašanje pojavi frnikula.

3.2 Učbeniki za sredje poklicne in strokovne šole ter gimnazije

Pregledali smo naslednje veljavne učbenike za srednje in strokovne šole ter gimnazije, ki obravnavajo verjetnost: Matematika za nižje poklicno izobraževanje (2009) [19], Matematika 4 za srednje strokovne šole (2018) [3], Tempus Novum (2016) [11] in Matematika 4 za gimnazije (2018) [2].
V učbenikih za srednje strokovne šole [3] in nižje poklicno izobraževanje [19] so osnovni pojmi tako kot v osnovni šoli vpeljani na primerih. Se pa pojavi bolj konkreten zapis definicij. Medtem ko so v učbenikih za gimnazije [2], [11] že bolj natančno matematično definirani, podani so tudi dokazi.

3.2.1 Matematika za nižje poklicno izobraževanje

Najprej smo pregledali učbenik Matematika za nižje poklicno izobraževanje [19], kjer je verjetnost obravnavana v poglavju Delo s podatki in osnove verjetnostnega računa. Podpoglavje Osnove verjetnostnega računa najprej uvede kratka razlaga temeljnih pojmov, kateri sledijo rešeni zgledi s pojasnili in nazadnje naloge za samostojno delo dijakov doma ali v

šoli. Naloge v tem učbeniku so dvostopenjsko diferencirane in ustrezno označene. Snov se začne z vpeljavo definicije poskusa. Poskus je definiran kot dejanje, ki ga napravimo pod določenimi pogoji. Definiciji sledijo primeri poskusa. Na podanih primerih so v nadaljevanju zapisani slučajni dogodki, ki se pri poskusu lahko zgodijo. Za tem je zapisano, kako dogodke označujemo, kdaj je dogodek gotov in kdaj slučajen. Gotov dogodek je definiran kot dogodek, ki se zgodi v vsaki ponovitvi poskusa, nemogoč dogodek je definiran kot nasprotje gotovemu dogodku, torej dogodek, ki se ne zgodi pri nobeni ponovitvi poskusa. Podana sta tudi primera gotovega in nemogočega dogodka. Za slučajni dogodek je zapisano, da se lahko zgodi ali pa ne. Ker se nekateri dogodki zgodijo v veliko ponovitvah poskusa, drugi pa v manj ponovitvah poskusa, so nekateri dogodki bolj verjetni, drugi pa manj. Iz tega sledi, da govorimo o verjetnosti slučajnega dogodka. Na tem mestu so navedeni primeri srečanja z verjetnostjo v vsakdanjem življenju. Primerom iz vsakdanjega življenja sledi obrazec za računanje verjetnosti, zapisana je verjetnost gotovega in nemogočega dogodka ter obrazec za izražanje verjetnosti v odstotkih. Kot že prej omenjeno po razlagi temeljnih pojmov sledijo trije rešeni zgledi in devet nalog za samostojno delo.
V tem učbeniku je verjetnost obravnavana minimalno, od dijakov se zahteva znanje na nižjem nivoju kot v osnovni šoli. Večjih napak v tem učbeniku ni, le zapisi nekaterih definicij bi lahko bili natančnejši. Tako so slučajni dogodki na strani 131 definirani samo s primeri, medtem ko bi lahko bilo zapisano, da so to dogodki, ki se v nekaterih ponovitvah poskusa zgodijo, v nekaterih pa ne. Kdaj je dogodek nemogoč in kdaj gotov se srečamo nekje na sredini obravnave snovi, prav tako na strani 131, medtem ko z njunima oznakama šele ob koncu obravnave. Za dijake bi bilo lažje in preglednejše, če bi ob samem definiranju bila zapisana tudi oznaka. Zgledi in naloge za reševanje so lažje kot v osnovni šoli.

3.2.2 Matematika 4, učbenik za srednje strokovne šole

V učeniku za srednje strokovne šole Matematika 4 [3] so novi pojmi in odnosi med njimi uvedeni s primeri iz vsakdanjega življenja. Za lažje razumevanje učne snovi je uporabljen strokovni jezik preprost in razumljiv, k boljšemu razumevanju pripomorejo tudi ilustracije, ki prispevajo tudi k temu, da je učbenik pregleden in primeren za samostojno delo dijakov. Najprej je kratka ponovitev znanja iz verjetnosti iz osnovne šole, ki nosi naslov Poskus in dogodek. Na primeru sta vpeljana poskus in dogodek. Sledijo definicije in zgledi gotovega, nemogočega in slučajnega dogodka. Gotov dogodek je definiran kot dogodek, ki se v določenem poskusu zgodi ob vsaki ponovitvi poskusa, nemogoč dogodek je definiran kot dogodek, ki se v določenem poskusu ne zgodi v nobeni ponovitvi poskusa in slučajen dogodek je definiran kot dogodek, ki se v določen poskusu v nekaterih ponovitvah zgodi, v nekaterih pa ne, in ne moremo z gotovostjo vedeti, ali se bo v določeni ponovitvi zgodil. Nato je opisano, kako označujemo dogodke. Snov se nadaljuje z nadgradnjo že osvojenega znanja.

Dijaki spoznajo odnose med dogodki in sicer način dogodka, zmnožek (presek) dogodkov, vsoto (unijo) dogodkov in negacijo dogodka. V učbeniku je zabisano, da je A način dogodka B: čim se zgodi dogodek A, se gotovo zgodi dogodek B in to označimo z $A \subset B$. Zapisano je tudi, da če je A način dogodka B in B način dogodka A, potem sta dogodka A in B enaka. Zmnožek oziroma presek dogodkov A in B je definiran kot dogodek, ki se zgodi v tisti ponovitvi poskusa, v kateri se zgodita dogodka A in B. Za zmnožek dogodkov je uporabljena oznaka $A \cap B$ ali AB. Vsota oziroma unija dogodkov A in B je definirana kot dogodek, ki se zgodi v tisti ponovitvi poskusa, v kateri se zgodi vsaj eden izmed dogodkov. Oznaka uporabljena v učbeniku je $A \cup B$. Nato sledi definicija negacije dogodka, ki pravi da, če se v neki ponovitvi poskusa ne zgodi dogodek A, se zgodi negacija dogodka A, ki jo označimo z $\overline{A}$ ali A'. Definicije načina dogodka, zmnožek dogodkov, vsota dogodkov in negacija dogodkov so grafično upodobljeni z Euler-Vennovimi prikazi in podkrepljeni z zgledi. Nato je razloženo, kdaj sta dogodka združljiva in kdaj nezdružljiva. Za nezdružljiva dogodka A in B je zapisano, da če velja $A \cap B = N$, se ne moreta zgoditi v isti ponovitvi poskusa. Če pa $A \cap B \neq N$ potem sta dogodka združljiva. Kratki razlagi sledi zgled. Od tod sledi razlaga sestavljenega dogodka, ki temelji na nezdružljivih dogodkih. Zapisano je, da dogodek, ki ga lahko izrazimo kot vsoto vsaj dveh nezdružljivih, a mogočih dogodkov, je sestavljen dogodek. Dogodek, ki ni sestavljen, je poimenovan elementaren dogodek ali izid. Na primeru je razloženo, da so izidi, iz katerih je dogodek sestavljen, ugodni za ta dogodek in da včasih tem izidom pravimo tudi načini, na katere se dogodek zgodi. Zapisano je tudi, kako označujemo elementarne dogodke. Ob koncu podpoglavja so ponovno zapisane pomembne definicije, katerim sledijo naloge za samostojno reševanje. Naslednje podpoglavje govori o verjetnosti dogodka. Ponovno je najprej zapisana snov, ki so jo dijaki spoznali že v osnovni šoli. Najprej je opisana frekvenca dogodka, kot število ponovitev poskusa, v katerih se je določen dogodek zgodil. Nato sledi relativna frekvenca, ki je opisana kot delež, ki nakazuje pogostost dogodka med vsemi ponovitvami poskusa, to je količnik med frekvenco dogodka in številom vseh ponovitev poskusa. Zapisano je tudi, da relativno frekvenco zapisujemo v obliki dogodka ali decimalnega števila, velikokrat pa jo izrazimo v odstotkih. Torej, če smo poskus ponovili n-krat in je frekvenca dogodka enaka $f(A)$, je relativna frekvenca dogodka A enaka:$f^\circ(A) = \frac{f(A)}{n}$. Temu sledi statistična definicija verjetnosti dogodka, ki pravi, da je verjetnost dogodka A enaka vrednosti $P(A)$, pri kateri se običajno ustali relativna frekvenca dogodka A, če je število ponovitev poskusa dovolj veliko. Statistični definiciji sledi klasična (matematična) definicija verjetnosti, ki pravi, da če je v nekem poskusu mogočih izidov n, ki so vsi enako verjetni, se v posamezni ponovitvi tega poskusa vsak izid zgodi z verjetnostjo $\frac{1}{n}$. Dogodek A, ki je sestavljen iz m izidov, se v posamezni ponovitvi tega poskusa zgodi z verjetnostjo $P(A) = \frac{m}{n}$. Verjetnost nemogočega dogodka ($P(A) = 0$) in verjetnost gotovega dogodka ($P(A) = 1$) sta predstavljena na zgledih. Temu sledi zapis, da verjetnost poljubnega dogodka A ne more biti manjša od verjetnosti nemogočega dogodka, pa tudi ne večja od verjetnosti gotovega dogodka, zato velja: $0 \leq P(A) \leq 1$. Ponovitvi znanja sledi nadgradnja osnovnošolskega znanja, ki predstavlja lastnosti verjetnosti. Zapisane so naslednje lastnosti, ki so upodobljene z Euler-Vennovimi prikazi in podkrepljene s primeri:

- Če je dogodek A način dogodka B, verjetnost dogodka A ne more biti večja od verjetnosti dogodka B: $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
- Če sta dogodka A in B nezdružljiva, je verjetnost njune vsote enaka vsoti njunih verjetnosti: $A \cap B = N \Rightarrow P(A+B) = P(A) + P(B)$.
- Zaradi $A \cap \overline{A} = N$ velja $P(A+\overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$. Ker pa je $A + \overline{A} = G$ in $P(G) = 1$ sledi: $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ in $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- Če dogodka A in B nista nezdružljiva, obstajajo izidi, ki so ugodni za oba dogodka, in jih v vsoto $P(A) + P(B)$ štejemo dvakrat. Ti izidi so ugodni za zmnožek dogodkov A in B. Zato je: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$[3].

Lastnostim verjetnosti sledijo rešeni zgledi in tem naloge za samostojno reševanje.
V tem učbeniku smo našli nekaj nedoslednosti pri definicijah in odstopanj z učnim načrtom. Prva taka definicija, na strani 25, pravi: *Če je A način dogodka B, B pa način dogodka A, sta dogodka A in B enaka.* Boljši zapis bi bil: *Če je A način dogodka B in B način dogodka A se dogodka A in B zmeraj zgodita hkrati. Takšna dogodka sta med seboj enaka in to zapišemo kot $A = B$.* Naslednja definicija, prav tako na strani 25, pravi: *Zmnožek (presek) dogodkov A in B je dogodek, ki se zgodi v isti ponovitvi poskusa, v kateri se zgodita dogodka A in B. Zmnožek dogodkov označimo $A \cap B$ ali AB.* Pri tej definiciji bi bilo dobro zapisati, da je to dogodek, kadar se zgodita dogodka A in B hkrati. Do razhajanj med učbenikom in učnim načrtom pride pri razumevanju pojma neodvisnosti dogodkov in računanje verjetnosti produkta neodvisnih dogodkov, saj tega v učbeniku ni.

3.2.3 Matematika 4, učbenik za gimnazije

Učbenik Matematika 4 za gimnazije [2] osmisli učenje in uporabo matematike z izbranimi primeri iz vsakdanjega življenja, namigi pa usmerjajo tudi v uporabo informacijsko-komunikacijske tehnologije. Rešeni primeri v učbeniku nakazujejo nekatere strategije in miselne postopke, ki so v pomoč pri samostojnem reševanju nalog ob koncu poglavja. Pri izpolnjevanju matematičnega znanja so dijakom v pomoč risbe, grafi in ilustracije. V tem učbeniku so splošna znanja tiskana na beli podlagi, posebna znanja pa na zeleni. Učbenik vsebuje tudi izbirne vsebine, ki so tiskane na vijolični podlagi. Poglavje, v učbeniku, ki obravnava verjetnost, se imenuje Verjetnostni račun in je razdeljeno na šest podpoglavij in sicer Poskus in dogodek, Verjetnost dogodka, Pogojna verjetnost, Zaporedje poskusov, Dvofazni poskusi in normalna porazdelitev. Prvi dve poglavji, Poskus in dogodek ter Verjetnost dogodka, sta v tem učbeniku predstavljeni enako kot v učbeniku za srednje strokovne šole Matematika 4 [18]. V prvem poglavju je dodano le, kateri dogodki sestavljajo množico, ki jo imenujemo algebra dogodkov in da ima algebra dogodkov pri poskusu z n elementarnimi dogodki, 2^n elementov. Naslednji dve podpoglavji, pogojna verjetnost in zaporedje poskusov, sta opredeljeni kot posebna znanja. Podpoglavje o pogojni verjetnosti se začne z zgledom, kjer na vzorčnem prostoru dijaki opazujejo dva dogodka. Iz vzorčnega prostora lahko razberejo, kdaj se zgodita oba dogodka hkrati. Temu zgledu sledi definicija, ki pravi, da kadar se sprašujemo po verjetnosti dogodka A pri pogoju, da se je zgodil neki drugi dogodek B, imamo opravka s pogojno verjetnostjo dogodka A glede na dogodek B. Pogojna verjetnost je označena s $P(A|B)$. V nadaljevanju je zapisano, da če sta dogodka A in B nezdružljiva, je pogojna verjetnost enaka 0, saj se dogodek A ne zgodi, če se zgodi dogodek B. Nato sledi izpeljava formule za verjetnost zmnožka dogodkov A in B, ki je enaka zmnožku verjetnosti enega izmed dogodkov in pogojne verjetnosti drugega dogodka glede na prvi dogodek. Omenjeno je tudi, da lahko izračunamo verjetnost zmnožka n dogodkov in zapisana je pripadajoča formula. V nadaljevanju je zapisano, da če običajna verjetnost $P(A)$, ki jo imenujemo tudi brezpogojna verjetnost, ni enaka pogojni verjetnosti $P(A|B)$, sta dogodka A in B odvisna oziroma je dogodek A odvisen od dogodka B. Če pa je $P(A) = P(A|B)$ oziroma $P(B) = P(B|A)$, sta dogodka A in B neodvisna. Zapisano je, da sta dogodka A in B neodvisna natanko tedaj, ko velja $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Na tem mestu je poudarjeno, da pojmov neodvisna dogodka in nezdružljiva dogodka med seboj ne smemo zamenjati. Sledi še nekaj zgledov, na kratko zapisan povzetek in naloge za samostojno reševanje. Podpoglavje o zaporedju poskusov se ponovno začne z zgledom, kjer je vsaka ponovitev poskusa neodvisna od prejšnje. Zaporedje neodvisnih poskusov je definirano kot zaporedje poskusov, če je vsaka ponovitev poskusa neodvisna od prejšnje ponovitve. Torej dogodek, ki se zgodi pri neki ponovitvi poskusa, ne vpliva na dogodek, ki se bo zgodil pri neki drugi ponovitvi. Kot primer takšnega zaporedja sta podana met igrlne kocke in met kovanca. Ta učbenik se v nadaljevanju omeji na Bernoullijevo zaporedje poskusov. Za Bernoullijevo zaporedje poskusov je zapisano, da to tako zaporedje neodvisnih poskusov, kjer se v vsakem poskusu zgodi dogodek A ali njemu nasprotni dogodek $\overline{A}$. Verjetnost dogodka A je enaka p in verjetnost dogodke $\overline{A}$ je enaka $1 - p$, kjer je $0 < p < 1$. Nato sledi izpeljava Bernoullijevega obrazca za verjetnost, kjer je frekvenca dogodka v n ponovitvah poskusa enaka k in $1 \leq k \leq n$. Sledijo rešeni zgledi in naloge za samostojno reševanje. Dvofazni poskusi so umeščeni pod izbirne vsebine. Obravnava se začne z zgledom, na katerem je razloženo, da ima opisani poskus dve fazi in druga faza je odvisna od tega, kateri dogodek se zgodi v prvi fazi. Pri tem verjetnost dogodka v drugi fazi imenujemo popolna verjetnost. Dogodke iz popolnega sistema dogodkov poskusa, izmed katerih se eden zgodi v prvi fazi in to fazo predstavlja, imenujemo hipoteze, saj vplivajo na pogoje za poskus, ki predstavlja drugo fazo. Za lažje razumevanje sta zapisani hipotezi iz zgornjega zgleda. Nato je zapisano, da hipotezi oblikujeta popoln sistem dogodkov, saj sta nezdružljivi, njuna vsota pa je gotov dogodek. Skozi zgornji primer je razloženo, kako izračunamo popolno verjetnost dogodka s pomočjo hipotez. Na koncu je zapisana še formula za popolno verjetnost dogodka:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n).$$

V nadaljevanju dijaki spoznajo Bayesovo formulo in njeno uporabo. Bayesova formula

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}$$

se uporabi za izračun verjetnosti, da se v prvi fazi zgodi hipoteza H_i, če se je v drugi fazi dogodek A dejansko zgodil. Sledijo rešeni zgledi in naloge za samostojno reševanje. Zadnje podpoglavje govori o normalni porazdelitvi. Normalno porazdelitev dijaki spoznajo z raziskovanjem na računalniku. Na primerih iz vsakdanjega življenja spoznajo normalno porazdelitev, ki jo imenujemo tudi Gaussova porazdelitev in da graf normalne porazdelitve imenujemo Gaussova krivulja. Na primeru spoznajo tudi standardizirano normalno porazdelitev, ki ima povprečno vrednost 0 in standardno deviacijo enako 1. Ob koncu sledijo še naloge za samostojno reševanje.
Ker sta v tem učbeniku prvi dve podpoglavji, poskus in dogodek, na stani 70 ter verjetnost dogodka, na strani 77, enaka kot v predhodnje pregledanem učbeniku, se v teh dveh podpoglavjih pojavijo enake nejasnosti. Nato pa se ta učbenik nadaljuje s podpoglavjem o pogojni verjetnosti, ki pokrije pojem neodvisnost dogodkov, ki v predhodno pregledanem učbeniku manjka. V tem podpoglavju, na strani 88, je med celotno razlago samoumevno, da so verjetnosti dogodkov večje od 0 oziroma pozitivne, nikjer pa ni to konkretno zapisano. Razlaga zaporedja neodvisnih poskusov, na strani 92, je v tem učbeniku boljša in za dijake razumljivejša kot v učbeniku Tempus Novum [11]. Drugih konkretnejših napak nismo zasledili.

3.2.4 Tempus Novum

Nazadnje smo pregledali učbenik za gimnazije Tempus Novum [11]. Tempus Novum sledi prenovljenemu učnemu načrtu in ima poudarek na povezavi matematike z vsakdanjim življenjem in uporabo informacijske tehnologije. Učbenik vsebuje zanimive zglede in naloge za utrjevanje znanja. Posebna in izbirna znanja ter težje naloge in zgledi so primerno označeni. Verjetnost je obravnavana v poglavju Verjetnostni račun in je razdeljeno na sedem podpoglavij. Začne se z osnovami verjetnostnega računa, sledi verjetnost dogodka in računanje verjetnosti ter verjetnost produkta dogodkov. Popolna verjetnost in zaporedje neodvisnih poskusov sta opredeljeni pod izbirne vsebine. Nazadnje sledi normalna porazdelitev. Na začetku poglavja so zapisana podpoglavja in kratek pregled zgodovine verjetnosti. Tukaj lahko dijaki spoznajo, kako se je verjetnost razvijala skozi čas in kateri so bili pomembni matematiki, ki so delovali na področju verjetnosti. Prvo podpoglavje, torej osnove verjetnostnega računa, se začne z opisom poskusa, slučajnega, gotovega in nemogočega dogodka. Definicija ni posebej zapisana, saj je to ponovitev znanja iz osnovne šole. Temu sledi kratek zgled, kjer se dijaki spomnijo elementarnih dogodkov in da lahko iz njih sestavljamo nove dogodke. V nadaljevanju pa dijaki spoznajo odnose med dogodki, da lahko z njimi računamo kot z množicami, upodobljeni pa so z Vennovimi diagrami. Kot prvo je predstavljena vsota dogodkov. Definirano je, da vsoto dogodkov A in B označimo z $A \cup B$ in ta dogodek se zgodi, če se zgodi vsaj eden od dogodkov A in B. Posebej v okvirčku je zapisano $A \cup B = B \cup A$, $A \cup A = A$, $A \cup G = G$ in $A \cup N = A$. Vsoti dogodkov sledi produkt dogodkov. Definicija pravi, da se produkt dogodkov $A \cap B$ zgodi, če se zgodita dogodka A in B hkrati. Če se ne moreta zgoditi hkrati, potem je njun produkt nemogoč dogodek in sta ta dogodka nezdružljiva. Če pa produkt dogodkov A in B ni nemogoč dogodek, potem sta A in B združljiva. V posebnem okvirčku je zapisano $A \cap B = B \cap A$, $A \cap A = A$, $A \cap G = A$ in $A \cap N = N$. Nato sledi definicija nasprotnega dogodka, ki pravi, da se nasprotni dogodek A' dogodka A zgodi, če se A ne zgodi. Tukaj veljata lastnosti $A \cup A' = G$ in $A \cap A' = N$. v posebne okvirčku je zapisano $(A')' = A$, $G' = N$ in $N' = G$. Nasprotnemu dogodku sledi razlika dogodkov. Definicija razlike dogodkov pravi, da se razlika dogodkov A in B (oznaka $A - B$) zgodi, če se zgodi dogodek A in se hkrati ne zgodi dogodek B. V posebnem okvirčku je zapisano $A - B \neq B - A$ in $A - B = A \cap B'$. Nazadje je zapisana še definicija načina dogodka, ki pravi, da je dogodek A način dogodka B (oznaka $A \subset B$), če se vsakokrat, kadar se zgodi A, zgodi tudi B. V posebnem okvirčku je zapisano $A = B$, če in samo če velja $A \subset B$ in hkrati B. Definiranim operacijam med dogodki sledijo zgledi, kjer je opisan poskus meta kocke. V nadaljevanju se dijaki spomnijo na elementarne dogodke in da lahko iz njih z operatorji tvorimo sestavljene dogodke. Dijaki spoznajo, da vsi elementarni dogodki nekega poskusa tvorijo množico, ki jo imenujemo vzorčni prostor. Ta je v tem učbeniku ponazorjen s pravokotnikom, elementarni dogodki pa s točkami v tem pravokotniku. S povezavo iz teorije množic je razloženo, kaj je popoln sistem dogodkov, kateri dogodki ga sestavljajo, torej dogodki, katerih vsota je gotov dogodek in so parome nezdružljivi. Sledi še nekaj zgledov, nato pa naloge za samostojno reševanje. V začetku naslednjega podpoglavja, ki govori o verjetnosti dogodka, je najprej zapisano, kako je verjetnost opisana v slovarju slovenskega knjižnega jezika, nato pa preide snov na matematično definicijo. Najprej je zapisano, kaj je relativna frekvenca dogodka A, $f_A = \frac{n_A}{n}$, in sicer je opisana kot realno število, ki ga priredimo dogodku A glede na število njegovih realizacij n_A v vseh ponovitvah poskusa n. Temu zapisu sledi, da kadar število ponovitev poskusa narašča preko vseh mej,

imenujemo relativno frekvenco dogodka A, empirična verjentost dogodka A. Sledi klasična definicija verjetnosti, ki pravi, če so vsi elementarni dogodki nekega poskusa enakovredni, dogodek A je iz vzorčnega prostora tega poskusa, je verjetnost dogodka A kvocient med številom m ugodnih elementarnih dogodkov za dogodek A in številom n vseh elementarnih dogodkov poskusa, torej je $P(A) = \frac{m}{n}$.
Zapisani so naslednji aksiomi verjetnosti:

1. $P(A) \geq 0$; verjetnost slučajnega dogodka je nenegativno število.
2. $P(G) = 1$; verjetnost gotovega dogodka je enaka 1.
3. Če sta dogodka A in B nezdružljiva: $A \cap B = N$, velja $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ oziroma verjetnost vsote nezdružljivih dogodkov je enaka vsoti verjetnosti posameznih dogodkov [11].

Učbenik opozori, da klasična definicija verjetnosti velja samo za dogodke, katerih vzorčni prostor je simetričen. Pojasnjeno je, da je vzorčni prostor simetričen, kadar so vsi elementarni dogodki poskusa enakovredni in enako verjetni. Za računanje verjetnosti dogodkov iz nesimetričnih vzorčnih prostorov je v učbeniku vpeljana aksiomatična definicija verjetnosti dogodka kot funkcija na vzorčnem prostoru, ki vsakemu elementarnemu dogodku priredi realno število in hkrati zadošča aksiomom, ki so zapisani pri klasični definiciji verjetnosti. Zapisano je, da za izračun verjetnosti moramo poznati posamezne verjetnosti $P(E_i) = p_i$ popolnega sistema elementarnih dogodkov, za katere mora veljati $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Ob koncu podpoglavja sledijo zgledi in naloge za samostojno reševanje. V nadaljevanju, podpoglavje Računanje verjetnosti, sledijo trditve in dokazi, ki so v pomoč pri računanju verjetnosti dogodka. Zapisane so naslednje trditve [11]:

1. $P(N) = 0$; verjetnost nemogočega dogodka je nič.
   Dokaz. $A \cup N = A$, A in N sta nezdružljiva, zato velja $P(A) = P(A \cup N) = P(A) + P(N)$, od koder že lahko preberemo $P(N) = 0$. □

2. $P(A') = 1 - P(A)$; verjentost nasprotnega dogodka dobimo tako, da od 1 odštejemo verjetnost prvotnega dogodka.
   Dokaz. Dogodka A in A' sta nezdružljiva: $A \cup A' = G$, $A \cap A' = N$, zato po aksiomih velja: $1 = P(G) = P(A \cup A') = P(A) + P(A')$. Iz prejšnje vrstice dobimo zgornjo trditev. □

3. Če je dogodek A način dogodka B; $A \subset B$,potem velja $P(A) \leq P(B)$.
   Dokaz. Če je $A \subset B$, potem dogodek B lahko zapišemo kot vsoto dveh nezdružljivih

dogodkov: $B = A \cup (B - A)$ in izračunamo njegovo verjetnost: $P(B) = P(A) + P(A - B)$. Verjetnost poljubnega dogodka je nenegativna: $P(B - A) \geq 0$, zato velja neenakost: $P(A) \leq P(B)$. □

4. Verjetnost razlike poljubnih dogodkov A in B: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.
   Dokaz. Dogodek A zapišemo kot vsoto dveh nezdružljivih dogodkov: $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ in uporabimo aksiom za računanje verjetnosti vsote nezdružljivih dogodkov: $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$. Iz te enakosti že sledi zgornja trditev. □

5. Verjetnost vsote poljubnih dogodkov A in B: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
   Dokaz. Pomagamo si z zgornjo trditvijo: $P(A \cup B) = P(A - B) + P(B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$, od koder sledi trditev, ki jo dokazujemo. □

Ponovno sledijo rešeni zgledi in naloge za samostojno reševanje. Računanju verjetnosti sledi verjetnost produkta dogodkov, ki se začne z zgledom. V učbeniku je opozorjeno, da verjetnosti produkta dogodkov ne moremo računati enako kot verjetnost vsote nezdružljivih dogodkov, saj bi s tem naredili grdo napako ($P(A_1) \cdot P(A_2) \neq P(A_1 \cap A_2)$), ampak moramo paziti, ali sta dogodka odvisna ali neodvisna. Zapisani sta definiciji za odvisnost oziroma neodvisnost dveh dogodkov. Definicija pravi, da sta dogodka A in B neodvisna, če in samo če je verjetnost produkta dogodkov enaka produktu verjetnosti posameznih dogodkov $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ in v tem primeru verjetnost enega dogodka ne vpliva na verjetnost drugega dogodka. Druga definicija pa pravi, da je dogodek B odvisen od dogodka A oziroma dogodka A in B sta odvisna, če je verjetnost dogodka B odvisna od tega, ali se dogodek A zgodi ali ne. Računanje verjetnosti produkta dogodkov, neodvisnost in odvisnost dogodkov je pokazana na zgledih. Po teh zgledih je pokazano, kako se računa pogojno verjetnost dogodka B, ki je odvisen od dogodka A. Pogojna verjetnost je v tem učbeniku označena z $P(B|A)$. Pogojna verjetnost je razložena s pomočjo Vennovega diagrama, v katerem sta narisana odvisna dogodka A in B. Razloženo je, da so ugodni elementarni dogodki dogodka $B|A$ enaki številu k ugodnih elementarnih dogodkov produkta A in B, število elementarnih dogodkov dogodka $B|A$ je število m ugodnih elementarnih dogodkov dogodka A glede na vse elementarne dogodke vzorčnega prostora. Iz tega sledi, da je verjetnost $P(B|A) = \frac{k}{m}$, če to formulo delimo z n, dobimo formulo za izračun pogojne verjetnosti, $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ in za izračun verjetnosti produkta odvisnih dogodkov $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Zapisano je, da o brezpogojni verjetnosti pa govorimo, kadar sta dogodka A in B neodvisna in je $P(B|A) = P(B)$. Sledijo rešeni zgledi in naloge za samostojno reševanje. Poglavja o Popolni verjetnosti in Zaporedju neodvisnih poskusov spadata pod izbirne vsebine. Popolna verjetnost je vpeljana z zgledi. Na zgledu dijaki spoznajo hipoteze in izračun verjetnosti.

Ob koncu zgleda je zapisana teorija, ki pravi, da lahko v prvi fazi predvidimo n dogodkov, od katerih se zgodi natanko eden in te dogodke imenujemo hipoteze, ki tvorijo popoln sistem dogodkov. Nadalje je zapisano, da od tega, katera hipoteza se je zgodila v prvi fazi, so odvisne verjetnosti v drugi fazi. Če poznamo verjetnosti hipotez in pogojne verjetnosti pri teh hipotezah, lahko izračunamo verjetnost danega dogodka po naslednji formuli

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n).$$

Na zgledu je tudi pokazana uporaba Bayesovega obrazca, ki je zapisan tudi v splošni obliki kot

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n)}.$$

Tako kot popolna verjetnost je tudi zapredje neodvisnih poskusov najprej razloženo na zgledih, nato pa je zapisana teorija. V teoriji je zapisano, da lahko iz zgledov vidimo, da gre za zaporedja neodvisnih poskusov, kateri popolni sistemi dogodkov so sestavljeni iz dogodka A in njegovega nasprotnega dogodka A'. Izračun verjetnosti, v takih primerih, je poimenovan binomska verjetnost, zaporedje poskusov z dvema možnima elementarnima dogodkoma pa Bernoullijevo zaporedje neodvisnih poskusov. Zapisano je, če je $P(A) = p$ in $P(A') = 1 - p$, potem je verjetnost, da se dogodek A v n ponovitvah poskusa zgodi natanko k-krat, enaka $P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$. V nadaljevanju sledi še nekaj rešenih zgledov in naloge za samostojno reševanje. V zadnjem podpoglavju dijaki spoznajo normalno porazdelitev. Na zgledu je razloženo, kaj pomeni, da so napake normalno porazdeljene, da ima graf, ki prikazuje vrednosti normalno porazdeljene količine, zvonasto obliko, da se imenuje normalna krivulja ali Gaussova krivulja. Po tem kratkem uvodu sledi razlaga slučajnih spremenljivk. Najprej so zapisane spremenljivke, ki so jih dijaki spoznali pri ukvarjanju z realnimi funkcijami (neodvisne in odvisne spremenljivke) ter med osnovnimi pojmi statistike v 1. letniku (statistična spremenljivka). Zapisano je, da ker vemo, katere vrednosti statistična spremenljivka lahko zavzame, katero pa bo zazvzela, pa je odvisno od slučaja te spremenljivke imenujemo slučajne spremenljivke. Slučajne spremenljivke v tem učbeniku označujejo velike tiskane črke X, Y, Z ... V nadaljevanju je zapisano, da kadar poznamo te vrednosti, lahko napišemo verjetnostno shemo oziroma porazdelitveni zakon slučajne spremenljivke. Na zgledu je prikazana enakomerna diskretna porazdelitev in binomska porazdelitev. Z uporabo tehnologije dijaki spoznajo Gaussovo krivuljo in lastnosti grafa te funkcije. Pri lastnostih fukncije je zapisano, da je definirana na celi realni osi in povsod pozitivna, asimptoto ima pri $y = 0$, simetrična glede na premico $x = a$, maksimalno vrednost $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ zavzame pri $x = a$, ploščina med grafom in abscisno osjo je enaka 1. Med lastnostmi je zapisano tudi, da ploščina pod krivuljo na intervalu $[a - \sigma, a + \sigma]$ predstavlja 68.2 % celotne ploščine, na intervalu $[a - 2\sigma, a + 2\sigma]$ 95.4% celotne ploščine in na intervalu $[a - 3\sigma, a + 3\sigma]$ 99.6 % celotne ploščine. Ob koncu je na zgledih razloženo, kako se računa verjetnost, kadar je slučajna spremenljivka porazdeljena normalno, nato pa sledijo naloge za samostojno reševanje. Čisto na koncu celotnega poglavja so zapisane pomembne definicije in formule, ki jih dijaki spoznajo v samem poglavju iz verjetnosti.

Učbenik Tempus Novum je najobsežnejsi izmed pregledanih učbenikov, prav tako ima podanih največ dokazov. Ta učbenik ima tudi edini obsežen pregled zgodovine razvoja verjetnosti. Tukaj se srečamo z drugačnimi oznakami kot v učbeniko Matematika 4 [2]. Tako je nasprotni dogodek označen z A', v učbeniku Matematika 4 [2] pa je sicer pri definiciji nasprotnega dogodka omenjena oznaka A', vendar pa se v nadaljevanju učbenika uporablja oznaka $\overline{A}$. Razlika v oznakah se pojavi tudi pri podpoglavju o verjetnosti dogodka. V učbeniku Tempus Novum imamo za frekvenco dogodka oznako n_A in za relativno frekvenco dogodka oznako f_A, medtem ko je v učbeniku Matematika 4 frekvenca dogodka označena z $f(A)$ in relativna frekvenca z $f^{\circ}(A)$. Glede na to, da sta oba učbenika za gimnazije, bi lahko bile oznake poenotene. Naslednja stvar, ki zmoti, je vpeljava statistične (empirične) definicije verjetnosti na strani 116. Definicija pravi: *Dogodku A glede na število njegovih realizacij n_A v vseh ponovitvah poskusa n priredimo realno število $f_A = \frac{n_A}{n}$, ki ga imenujemo relativna frekvenca dogodka A; če število ponovitev poskusa narašča prek vseh mej, jo imenujemo empirična verjetnost dogodka.* Kasneje, na strani 117, je zapisano še: *Empirična verjetnost je limita relativne frekvence dogodka, ko gre število ponovitev poskusa prek vseh mej.* $P(A) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n_A}{n}$. Lahko bi se uporabila za dijake lažja, razumljivejša razlaga statistične verjetnosti, prav tako pa verjetnosti ne moremo definirati kot limito. V nadaljevanju, na strani 118, se srečamo s trditvijo: *Klasična definicija verjetnosti velja samo za dogodke poskusov, katerih vzorčni prostor je simetričen. Kar pomeni, da so vsi elementarni dogodki enakovredni in s tem enako verjetni.* Na tem mestu bi moralo biti dodano, da je izidov poskusa končno mnogo. Prav tako kot v učbeniku Matematika 4 [2] je tudi v tem učbeniku, v podpoglavju verjetnost produkta dogodkov, na strani 136, samoumevno, da so verjetnosti pozitivne in različne od 0, nikjer pa ni to zapisano. Podpoglavji o popolni verjetnosti, na strani 147, in zaporedje neodvisnih poskusov, na strani 153, sta v tem učbeniku, prav tako kot v učnem načrtu, označeni kot izbirni vsebini. Podpoglavje o normalni porazdelitvi, na strani 157, je zapisano precej ohlapno, vendar pa je v učnem načrtu zapisano, da se graf normalne porazdelitve spozna in interpretira na primerih, kar pa v tem učbeniku je narejeno.

Poglavje 4

Zaključek

Osrednja tema magistrskega dela je verjetnost v osnovnih, srednjih poklicnih in strokovnih šolah ter gimnazijah. Osredotočili smo se na osnovne pojme in definicije, ki jih zajemajo vsebine s področja verjetnosti, obravnavane v osnovnih, srednjih poklicnih in strokovnih šolah ter gimnazijah. Opisali smo vsebine in cilje, ki se pojavijo v učnem načrtu za osnovne in srednje šole ter gimnazije. Nazadnje smo pregledalui večino veljavnih učbenikov za matematiko in za vsak učbenik opisali vsebino, ki jo obravnava iz področja verjetnosti. Preverili smo, ali se v njih pojavijo morebitne nejasnosti in napake.
Ugotovili smo, da so primeri, s katerimi učenci vstopijo v verjetnost, primerni za seznanitev z osnovnimi pojmi, vendar se pojmi v nekaterih primerih uvajajo nepravilno. S tem učenci usvojijo napačne pojme in definicije iz verjetnosti, kar se izkaže kot težava pri nadaljnjem šolanju v srednjih šolah, zlasti v gimnazijah. Zasledili smo tudi velike razlike v obravnavani snovi v osnovni in srednji šoli. V osnovni šoli so pojmi definirani na zgledih in primerih, medtem ko je v srednji šoli snov vpeljana preko definicij. Največja razlika se opazi med osnovno šolo in gimnazijo. Seveda pa je to smiselno, saj je obravnavana vsebina in nivo zahtevnosti prilagojena starostni stopnji učencev oziroma dijakov.
Opozorili bi tudi na to, da se pojavi vprašanje, ali učitelji in profesorji učence oziroma dijake opozorijo na napake v učbenikih in jih poučijo, kako je pravilno. O tem, ali učitelji in profesorji opozorijo na napake, nejasnosti in strokovne nepravilnosti in nekorektnosti, bi bila dobrodošla raziskava.
Prav tako bi predlagali, da se izda matematični terminološki leksikon, s katerim bi poenotili uporabljene matematične oznake, saj prihaja do razlik med osnovno šolo in srednjo šolo ter celo med učbeniki samimi.

Literatura

[1] J. Berk, J. Draksler, M. Robič, *Skrivnosti števil in oblik 9. Učbenik za matematiko v 9. razredu osnovne šole*, Založba Rokus Klett, d. o. o., Ljubljana, 2015.

[2] M. Bon Klanjšček, D. Felda, *Matematika 4. Učbenik za gimnazije*, DZS, Ljubljana, 2018.

[3] M. Bon Klanjšček, D. Felda, *Matematika 4. Učbenik za srednje strokovne šole*, DZS, Ljubljana, 2018.

[4] M. Dornik in drugi, *Kocka 9. Matematika za 9. razred osnovne šole*, Modrijan, Ljubljana, 2005.

[5] D. Felda, Neverjetna verjetnost, Obzornik za matematiko in fiziko (2013) str. 59-70.

[6] M. Gorše Pihler in drugi, Matematika 9: i-učbenik za matematiko v 9. razredu osnovne šole. Citirano 6. 6. 2019. Dostopno na naslovu:
`http://eucbeniki.sio.si/mat9/index.html`

[7] S. Hernja, L. Radosavljević, *Matematika 9. Učbenik za 9. razred devetletne osnovne šole*, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana, 2005.

[8] Inštitut za slovenski jezik Frana Ramovša ZRC SAZU - Portal BOS, Slovar slovenskega knjižnega jezika. citirano xx.xx.2019. Dostopno na naslovu:
`http://bos.zrc-sazu.si/sskj.html`

[9] R. Jamnik, *Verjetnostni račun in statistika*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1995.

[10] Ministrstvo za izobraževanje, znanost in šport, Srednješolski izobraževalni programi. Citirano 16. 5. 2019. Dostopno na naslovu:
`http://eportal.mss.edus.si/msswww/programi2019/programi/index.htm`

[11] G. Pavlič in drugi, *Tempus Novum. Matematika za gimnazije*, Modrijan, Ljubljana, 2016.

[12] J. Smogavec, C. Govejšek, *Matematika za radovedneže 9. Učbenik za pouk v 9. razredu devetletne osnovne šole*, ICO, d. o. o., Kamnik, 2011.

[13] M. Strnad, *Stičišče 9. Matematični učbenik za 9. razred osnovne šole*, Jutro, Ljubljana, 2015.

[14] Strokovni svet Republike Slovenije za splošno izobraževanje, Katalog znanja-Matematika-Nižje poklicno izobraževanje. Citirano 14.05.2019. Dostopno na naslovu: `http://eportal.mss.edus.si/msswww/programi2018/programi/NPI/KZ-IK/-NPI_KZ_MAT_157.pdf`.

[15] Strokovni svet Republike Slovenije za splošno izobraževanje, Katalog znanja-Matematika-Poklicno-tehniško izobraževanje. Citirano 14.05.2019. Dostopno na naslovu: `http://eportal.mss.edus.si/msswww/programi2012/programi/Ssi/KZ-IK/KZ_MA-T_PTI_206_242.pdf`

[16] Strokovni svet Republike Slovenije za splošno izobraževanje, Katalog znanja-Matematika-Srednje poklicno izobraževanje. Citirano 14.05.2019. Dostopno na naslovu: `http://eportal.mss.edus.si/msswww/programi2013/programi/SPI/KZ-IK/SPI_K-Z_MAT_213.pdf`

[17] Strokovni svet Republike Slovenije za splošno izobraževanje, Katalog znanja-Matematika-Srednje strokovno izobraževanje. Citirano 14.05.2019. Dostopno na naslovu: `http://eportal.mss.edus.si/msswww/programi2012/programi/Ssi/KZ-IK/KZ_MA-T_SSI_383_408.pdf`

[18] Trubar-učbeniški sklad, Ministrstvo za izobraževanje, znanost in šport. Citirano 17. 5. 2019. Dostopno na naslovu: `https://paka3.mss.edus.si/Trubar/Javno/Default.aspx`.

[19] T. Uran, A. Kuzman, *Matematika za ničzje poklicno izobraževanje*, DZS, Ljubljana, 2009.

[20] A. Žakelj in drugi, Program gimnazija-Matematika-Učni načrt. Citirano 14.05.2019. Dostopno na naslovu: `http://eportal.mss.edus.si/msswww/programi2010/programi/media/pdf/un_gimnazija/un_matematika_gimn.pdf`.

[21] A. Žakelj in drugi, Program osnovna šola-Matematika-Učni načrt. Citirano 16.04.2019. Dostopno na naslovu:

http://www.mizs.gov.si/fileadmin/mizs.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf.