UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Oddelek za matematiko in računalništvo

MAGISTRSKO DELO

Larisa Gostenčnik

Maribor, 2020

UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Oddelek za matematiko in računalništvo

Magistrsko delo

VPLIV RAZLIČNIH DEJAVNIKOV PRI DOLOČANJU PREMIJ ZA ŽIVLJENJSKA ZAVAROVANJA

na študijskem programu 2. stopnje Matematika

Mentor:
izr. prof. dr. Marko Jakovac

Kandidatka:
Larisa Gostenčnik

Maribor, 2020

ZAHVALA

Znanje je moč.
(latinski pregovor)

Zahvaljujem se mentorju izr. prof. dr. Marku Jakovcu za svetovanje, odzivnost in pomoč pri nastajanju magistrskega dela.

Posebej bi se rada zahvalila partnerju, otrokoma in staršem za potrpežljivost, podporo in spodbudo tekom celotnega študija.

Hvala, ker ste verjeli vame.

Vpliv različnih dejavnikov pri določanju premij za življenjska zavarovanja

program magistrskega dela

Osnovni modeli življenjskih zavarovanj praviloma upoštevajo le smrt oziroma doživetje osebe kot edini dejavnik za določanje zavarovalnih premij. Takšni modeli so skopi in v splošnem ne odražajo dejanskega stanja v realnem okolju. Smrt osebe namreč ni nujno edini dejavnik, zaradi katerega lahko pride do prekinitve zavarovalne pogodbe. Med dejavnike lahko štejemo tudi različne oblike smrti (naravna smrt, nesreča, bolezen), invalidnost, upokojitev, ipd. V magistrskem delu bo izbranih nekaj dejavnikov, na podlagi katerih bodo pripravljeni modeli za različne tipe življenjskih zavarovanj. Napravljena bo tudi simulacija na realnih podatkih izbrane zavarovalnice.

Osnovni viri:

1. N. L. Bowers, H. U. Gerber, J. C. Hickman, D.A. Jones, C. J. Nesbitt, *Actuarial Mathematics, 2. edition*, Society of Actuaries Schaumburg, Illinois, 1997.

2. S. R. Deshmukh, *Multiple Decrement Models in Insurance*, Springer, 2012.

3. S. D. Promislow, *Fundamentals of Actuarial Mathematics, 2. edition*, Wiley, 2011.

izr. prof. dr. Marko Jakovac

GOSTENČNIK, L.: Vpliv različnih dejavnikov pri določanju premij za življenjska zavarovanja.
Magistrsko delo, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Oddelek za matematiko in računalništvo, 2020.

IZVLEČEK

V magistrskem delu so obravnavane osnove življenjskih zavarovanj in različni dejavniki, ki vplivajo na izračun premije. Delo je razdeljeno na dva dela, na teoretični in praktični del.

V teoretičnem delu so najprej opisane osnovne definicije iz verjetnosti in statistike. Predstavljen je denarni tok in obresti ter aktuarska sedanja vrednost. Opisana je tudi matematična rezervacija in njen izračun, saj je pomemben del življenjskih zavarovanj. Predstavljene so osnovne definicije tablic smrtnosti in osnove življenjskih zavarovanj. Opisan je izračun neto in bruto premije za različna zavarovanja ter različni dejavniki, ki vplivajo na višino premije.

V praktičnem delu se ukvarjamo z izračunom premije. Le-ta je izračunana za različne vrste zavarovanj. Priložen je tudi program v Pythonu, ki izračuna neto premijo za poljubno število polic. S tem programom je izračunana tudi neto premija za 1000 zgeneriranih polic riziko življenjskega zavarovanja.

Ključne besede: življenjsko zavarovanje, obrestna mera, tablice smrtnosti, zavarovalna vsota, dejavniki, premija.

Math. Subj. Class. (2010): 62P05.

GOSTENČNIK, L.: Influence of different factors in determing premiums for life insurances.
Master Thesis, University of Maribor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Department of Mathematics and Computer Science, 2020.

ABSTRACT

The basics of life insurance and factors that have influence on the calculation of premium are discussed in the master thesis. It is divided into two parts, theoretical and practical.

The theoretical part presents basic definition of probability and statistics. Cashflows, interest rates and the actuarial present value are presented. Technical provision and it's calculation are also discussed, because they are a big part of life insurances. It also presents basic definitions of life tables and basics of life insurances. The calculation of net and gross premium for different types of life insurances and also multiple decrement models is described.

In practical part the calculation of premium is made. Premium is calculated for different types of life insurances. The program for calculating premium in Python is also included, which is used for calculating net premium for 1000 generated insurance policies of term life insurance.

Keywords: life insurance, interest rate, life tables, sum insured, decrements, premium.

Math. Subj. Class. (2010): 62P05.

Kazalo

Uvod

Zavarovalništvo je ena izmed pomembnejših gospodarskih panog, katere razvoj na slovenskem trgu [6] se je začel v drugi polovici 19. stoletja. V magistrskem delu so obravnavana življenjska zavarovanja, pri katerih je predmet zavarovanja človek. Z življenjskim zavarovanjem poskrbimo za svojo socialno varnost in finančno varnost svoje družine ali bližnjih [4]. Z vidika družbe z odgovornim pristopom do lastne varnosti prispevamo k skupnemu ekonomskemu interesu.

Osnovni funkciji življenjskega zavarovanja sta zavarovanje za primer smrti in varčevanje. Vsak človek enkrat umre, vendar se lahko to zgodi prehitro ali nepričakovano, pri čemer so posledice lahko zelo hude. Poleg bolečine in prizadetosti je smrt povezana tudi s stroški in finančnimi posledicami. V družini, kjer oba starša prinašata prihodek, ima smrt enega starša velike finančne posledice za celotno družino. Če pa je ta oseba imela sklenjeno življenjsko zavarovanje, pa zavarovalnica upravičencem izplača zavarovalno vsoto in omili finančne posledice smrti. V zameno za izplačilo pa se zavarovanec ob podpisu zavarovalne pogodbe zaveže, da bo plačeval premijo. Pomembna naloga zavarovalnice je, da izračuna pošteno premijo. Na izračun pa lahko vpliva več dejavnikov, kar je predstavljeno v magistrskem delu. V njem so predstavljena življenjska zavarovanja, izračun premije in dejavniki, ki vplivajo na izračun. Pomembni so tablice smrtnosti, obrestna mera in zavarovalna vsota. Na višino premije pa vplivajo tudi dejavniki, za katere se zavarujemo. Višina premije se razlikuje, če se zavarujemo le za smrt v primeru raka ali za smrt v primeru raka in kapi. Ti vzroki pa so lahko tudi združljivi ali ne. Tudi s to tematiko se srečamo v magistrskem delu. To je organizirano na teoretični in praktični del.

V prvem poglavju obravnavamo osnovne definicije iz verjetnosti in statistike, ki so pomembne za nadaljnje razumevanje magistrskega dela. Pomembne so lastnosti dogodkov, definicija slučajne spremenljivke, matematičnega upanja in opisi različnih porazdelitev.

V drugem poglavju predstavimo denarni tok, obresti, diskontiranje in aktuarsko sedanjo vrednost. Opišemo tudi rezervacije, izračun matematične rezervacije in LAT test.

V tretjem poglavju opišemo tablice smrtnosti, ki so osnova za izračun premije življenjskih zavarovanj. Opišemo komutacijska števila, pričakovan preostanek življenjske dobe in si grafično pogledamo primer tablic smrtnosti ter opišemo primerno izbiro le-teh.

V četrtem poglavju predstavimo različne tipe življenjskih zavarovanj in izračun premije za vsako izmed njih. Definiramo jakost smrtnosti in s pomočjo rent definiramo izračun letne neto premije. Opišemo tudi obračun stroškov in izračun stroškovne premije, pri kateri z vsoto neto premije dobimo bruto premijo, kar predstavlja ravno znesek, ki ga plača zavarovanec.

V petem poglavju predstavimo različne dejavnike, za katere se lahko zavarujemo. Izračunamo tablice smrtnosti za več dejavnikov in izračunamo premijo. Pogledamo si tudi povezavo z modelom z enim vzrokom.

V šestem, zadnjem poglavju, ki je praktični del magistrskega dela pa izračunamo premijo za različne tipe življenjskih zavarovanj. Najprej izračunamo premijo za riziko zavarovanje ter pogledamo kako starost, višina zavarovalne vsote in obresti vplivajo na izračun. Nato izračunamo premijo za smrt v primeru več dejavnikov: kap, rak in infarkt. Izračunamo premijo v primeru le enega, dveh in treh. Sledi izračun premije za doživetje in mešano zavarovanje. V zadnjem delu pa zgeneriramo 1000 zavarovalnih polic, za katere s programom v prilogi izračunamo neto premijo ter jo primerjamo s programskim orodjem za aktuarske izračune.

Poglavje 1

Osnovne definicije

V tem poglavju bomo obravnavali osnovne definicije in pojme iz verjetnosti in statistike, ki so pomembni v nadaljevanju magistrskega dela. Vsebina tega poglavja je povzeta po [5, 10, 11, 12, 13, 14].

Osnovni pojmi verjetnostnega računa so poskus, dogodek in verjetnost dogodka. Poskus je splet pojavov, ki jih sprožimo in opazujemo. Rezultat poskusa je dogodek. Ponovitve poskusa lahko privedejo do različnih dogodkov. Dogodek je gotov, če se zgodi ob vsaki ponovitvi poskusa; označimo ga z G. Dogodek, ki se ne zgodi nikoli, je nemogoč in ga označimo z $\emptyset$. Vsi ostali dogodki, ki se lahko zgodijo ali ne, so naključni oziroma slučajni.

Definicija 1.1 *Verjetnostna funkcija na danem prostoru dogodkov ω je predpis, ki vsakemu izidu $\omega \in \Omega$ priredi število iz intervala $[0, 1]$. Predpis označimo s $p(\omega)$ in ga imenujemo verjetnost dogodka. Vsota verjetnosti vseh možnih različnih dogodkov poskusa mora biti ena*

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1.$$

Verjetnostno funkcijo lahko zapišemo z verjetnostno shemo, ki je zapis oblike

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

kjer so $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ vsi možni izidi, torej $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$.

Diskretni verjetnostni prostor je množica izidov Ω skupaj z verjetnostno funkcijo.

Definicija 1.2 *Verjetnost dogodka A z verjetnostno funkcijo definiramo kot*

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega).$$

Poglejmo si operacije na dogodkih:

- Dogodek A je način dogodka B, če vsi izidi, ki so v dogodku A, pripadajo tudi dogodku B. Pišemo $A \subseteq B$.
- Unija dogodkov A in B je dogodek, ki ga sestavljajo tisti izidi, ki so v A ali v B, označimo jih z $A \cup B$.
- Produkt dogodkov A in B je dogodek, ki ga sestavljajo tisti izidi, ki so v A in v B, označimo jih z AB.
- Dogodka A in B sta nezdružljiva, če je $AB = \emptyset$.
- Dogodek, ki je nasproten danemu dogodku A, je en sam in mu pravimo komplement dogodka A, označimo ga z $\bar{A}$.

Verjetnost, definirana s pomočjo verjetnostne funkcije, ima naslednje lastnosti:

- Za vsak dogodek A je $0 \leq P(A) \leq 1$.
- $P(\emptyset) = 0$.
- $P(G) = 1$.
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- Če sta dogodka A in B nezdružljiva, velja $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Nasploh pa verjetnost unije ni vsota verjetnosti.

Elementarni dogodek E je dogodek, ki ga ne moremo zapisati kot vsoto dogodkov. Vsota vseh elementarnih dogodkov pa je gotov dogodek G.

Definicija 1.3 *Naj bo G prostor elementarnih dogodkov. Neprazna družina dogodkov A v G je σ-algebra, če velja:*

- *Če je $A \in \mathcal{A}$, potem je tudi $\bar{A} \in \mathcal{A}$.*

- *Za vsako družino dogodkov* $\{A_n | n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ *velja* $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Poglejmo si še aksiomatsko definicijo verjetnosti.

Definicija 1.4 *Verjetnost na σ-algebri F, ki jo sestavljajo določene podmnožice množice dogodkov Ω, je predpis, ki vsakemu dogodku A priredi število, ki ga označimo s P(A) in mu pravimo verjetnost dogodka A. Pri tem mora veljati:*

- $0 \leq P(A) \leq 1$ *za vsak dogodek A.*
- $P(\emptyset) = 0, P(G) = 1.$
- *Če sta dogodka A in B nezdružljiva, mora veljati* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- *Za poljubno zaporedje dogodkov* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ *mora veljati*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = \lim_{n \to \infty} P(A_n).$$

Množico dogodkov skupaj z verjetnostjo imenujemo verjetnostni prostor.

Definicija 1.5 *Naj bo Ω neprazna množica dogodkov, F σ-algebra podmnožic Ω in P verjetnost. Verjetnostni prostor definiramo kot* (Ω, F, P).

Opomba 1.6 *Za dogodka A in B velja enakost*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Pogojna verjetnost dogodka A glede na dogodek B, je verjetnost, da se zgodi dogodek A, pod pogojem, da se je zgodil tudi dogodek B.

Definicija 1.7 *Pogojna verjetnost dogodka A glede na B, za katerega velja* $P(B) \neq 0$, *je enaka*

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Definicija 1.8 *Dogodka A in B sta neodvisna, če velja* $P(AB) = P(A)P(B)$.

Pri neodvisnih dogodkih za pogojno verjetnost velja

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A).$$

Slučajna spremenljivka je količina, ki nastopi kot rezultat poskusa, kjer je možnih več izidov. Pri tem pa pojavitev katerekoli vrednosti iz danega območja predstavlja slučajno vrednost.

Definicija 1.9 *Naj bo (Ω, F, P) verjetnostni prostor. Slučajna spremenljivka na (Ω, F, P) je taka funkcija $X : \Omega \to R$, za katero velja $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in F$ za vse $x \in \mathbb{R}$.*

Porazdelitev slučajne spremenljivke pove, katere vrednosti zavzame s kolikšnimi verjetnostmi. Če je X definirana na diskretnem verjetnostnem prostoru, velja

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x).$$

Porazdelitev diskretne slučajne spremenljivke lahko opišemo s porazdelitveno shemo, ki odgovarja verjetnostni shemi. Če X lahko zavzame vrednosti $a_1, a_2, \ldots, a_k$, ki so vse različne, in če je $P(X = a_1) = p_1, P(X = a_2) = p_2, \ldots, P(X = a_k) = p_k$, pišemo

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_k \end{pmatrix},$$

kjer velja $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$, kjer $k \in \mathbb{N}$.

Diskretna porazdelitev je enakomerna na množici $\{a_1, a_2, \ldots a_k\}$, če so vse vrednosti $a_1, a_2, \ldots a_k$ enako verjetne, druge vrednosti pa niso zavzete.

Definicija 1.10 *Porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X je funkcija, $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ in je definirana s predpisom $F_X(x) = P(X \leq x)$.*

Porazdelitvena funkcija nam predstavlja verjetnost, da X zavzame največ vrednost x. Lastnostni porazdelitvene funkcije:

- F_x je naraščajoča funkcija,
- $\lim_{x \to \infty} F_x(x) = 1$,
- $\lim_{x \to -\infty} F_x(x) = 0$.

Poznamo dve pomembni vrsti slučajnih spremenljivk: diskretne, ki zavzamejo števno mnogo vrednosti, in zvezne. Poglejmo si najprej formalno definicijo diskretne slučajne spremenljivke.

Definicija 1.11 *Slučajna spremenljivka X je diskretna, če je njena zaloga vrednosti števna množica. Zalogo vrednosti slučajne spremenljivke označimo z $Z_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$.*

Definicija 1.12 *Porazdelitvena funkcija diskretne slučajne spremenljivke je določena s predpisom*

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i.$$

Definicija 1.13 *Slučajna spremenljivka X je zvezna, ima njena porazdelitvena funkcija obliko*

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(u)du,$$

kjer je $f_x \geq 0$ nenegativna funkcija. Taki funkciji f_x pravimo gostota slučajne spremenljivke X.

Definicija 1.14 *Naj bo X diskretna slučajna spremenljivka, ki ima zalogo vrednosti $Z_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ in $p_i = P(X = x_i)$ za vsak $i \in \{1, 2, \ldots\}$. Če obstaja $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i$, potem definiramo vrednost*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i), \text{ kjer je} \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

To vrednost imenujemo matematično upanje slučajne spremenljivke X.

Matematično upanje predstavlja pričakovano vrednost, ki jo bo zavzela slučajna spremenljivka X.

Definicija 1.15 *Matematično upanje zvezne slučajne spremenljivke je definirano s formulo $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$, kjer je $f(x)$ funkcija gostote verjetnosti.*

Definicija 1.16 *Naj bo X slučajna spremenljivka, za katero obstaja matematično upanje $E(X)$. Varianco te slučajne spremenljivke definiramo s predpisom*

$$\mathrm{Var}(X) = E((X - E(X))^2).$$

Z matematičnim upanjem oziroma pričakovano vrednostjo in disperzijo oziroma varianco je dana poglavitna informacija o porazdelitvi slučajne spremenljivke. Vrednost informacije bi torej ocenili tako, da bi navedli kako zelo je slučajna spremenljivka razpršena okrog matematičnega upanja. Količina, ki meri razpršenost slučajne spremenljivke okrog njene povprečne vrednosti se imenuje disperzija ali varianca. Koren iz variance pa imenujemo standardni odklon in ga označimo $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

V primeru diskretne slučajne spremenljivke X, njeno varianco izračunamo kot

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_n (x_n - E(X))^2 p_n.$$

V primeru zvezne slučajne spremenljivke X, njeno varianco izračunamo kot

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - E(X))^2 p(x) dx.$$

Uporabna formula za izračun variance je

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= E((x - E(X))^2) = E(x^2 - 2xE(X) + E^2(X)) \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E^2(X) = E(X^2) - E^2(X).\end{aligned}$$

Poglejmo si dve pomembni zvezni porazdelitvi:

- Enakomerna porazdelitev na intervalu $[a, b]$, ki jo označimo $E(a, b)$.
  Slučajna spremenljivka X je porazdeljena enakomerno na intervalu $[a, b]$, če ima njena gostota porazdelitve predpis

  $$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & ; a \leq x \leq b \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

  Sledi, da je njena porazdelitvena funkcija enaka

  $$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} p(t) dt = \begin{cases} 0 & ; x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & ; a \leq x \leq b \\ 1 & ; x > b. \end{cases}$$

- Normalna porazdelitev, ki jo označimo z $N(a, \sigma)$.
  Slučajna spremenljivka X je porazdeljena normalno, če ima njena gostota porazdelitve za vsak $x \in \mathbb{R}$ predpis

  $$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma})^2}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Normalna porazdelitev je tako določena s parametroma a in σ, ki predstavljata povprečno vrednost in standardni odklon.

Zelo pogosta je standardizirana normalna porazdelitev $N(0,1)$, kjer ima gostota porazdelitve predpis

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \; x \in \mathbb{R}.$$

Definicija 1.17 *Naj bo A poljuben dogodek in $P(A) = p$. Indikator dogodka A je diskretna slučajna spremenljivka I_A, ki je porazdeljena kot*

$$I_A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

Matematično upanje in varianca indikatorja I_A sta $E(I_A) = p$ in $\mathrm{Var}(I_A) = p(1-p)$.

Poglavje 2

Deterministični model

Deterministični model predpostavlja, da so zunanje omejitve in notranji odnosi (povezave) znani. To pomeni, da je izhodna vrednost pri enakih vhodnih podatkih vedno enaka. Slučajni vplivi so v tem modelu izločeni in gre za mehansko računanje po znanih formulah, ki nam dajo točno določene rezultate. Verjetnosti in pričakovane vrednosti izpeljemo s preprostimi razmerji in formulami. Vsebina poglavja je povzeta po [3, 7, 8].

2.1 Denarni tok

Osnovno delo aktuarjev je modeliranje oziroma napoved denarnega toka. To so ravno prihodki zmanjšani za odhodke. Med odhodke štejemo izplačane škode, stroške in provizije, med prihodke pa premije. Zavarovalnice vsak dan sprejemajo nakazila denarja in opravljajo izplačila, zato se njihov denarni tok spreminja dnevno.
Prvi korak v modelu je, da določimo časovno enoto. Predpostavimo, da se čas meri v letih. Sedanji čas predstavlja 0, k pa predstavlja časovno enoto v prihodnosti. Znesek denarja, ki je prejet ali izplačan ob času k bomo poimenovali neto denarni tok v času k in ga označili s c_k. Pozitivna vrednost c_k nam pove, da bomo ta znesek prejeli, in negativen, da ga bomo izplačali. Celotni denarni tok je tako prikazan kot vektor vseh prenosov:

$$c = (c_0, c_1, \ldots, c_n),$$

kjer je n zadnje leto, v katerem je še opravljen prenos. Poglejmo si primer prenosa denarja.

Zgled. Recimo, da oseba A posodi osebi B 10 enot denarja zdaj in 5 enot naslednje leto. Oseba B vrača osebi A denar tako, da vrača tri leta 7 enot, vračati pa začne čez tri leta.

Končni vektor denarnega toka za osebo A zgleda tako:

$$c = (-10, -5, 0, 7, 7, 7).$$

Vektor za osebo B pa je:

$$-c = (10, 5, 0, -7, -7, -7).$$

Naš cilj pa je zagotovitev metod s katerimi bi lahko analizirali denarni tok in izračunali prihodnje vektorje plačil. Če bi bila vsa plačila opravljena ob istem času, bi se problem zelo poenostavil, sešteti bi morali le vsa plačila. Toda to je preveč poenostavljen način razmišljanja, zato moramo upoštevali plačila v različnih časih. Ekonomsko stališče je, da raje trošimo v sedanjem času, kot v prihodnosti. To pomeni, da je denar, ki ga dobimo danes, več vreden, kot denar, ki ga dobimo v prihodnosti. Zato plačujemo v prihodnosti obresti na izposojen znesek.
Komplikacije se pojavijo, ko vektorji prenosa denarja oziroma plačil niso znani v naprej. S tem problemom se povečini ukvarjajo aktuarji in finančni matematiki. V našem delu pa se bomo ukvarjali le s poenostavljenim modelom, kjer je ves denarni tok znan v naprej.

2.2 Diskontna funkcija

Diskontne funkcije se uporabljajo v ekonomskih modelih za povezavo med različnimi časi. Želimo izračunati trenutno vrednost vseh plačil, ki so plačana ob različnih časih. Pri tem potrebujemo faktorje pretvorbe, da pretvorimo vrednost denarja plačanega v času t v vrednost denarja plačanega v času s. Poglejmo si podrobneje faktorje pretvorbe.

Naj $v(s,t)$ predstavlja vrednost denarja v času s, če v času t plačamo 1 enoto denarja. Pri tem ločimo dva primera:

1. $s < t$; $v(s,t)$ interpretiramo kot vrednost, ki jo moremo investirati v času s, da imamo v času t 1 enoto,
2. $s > t$; $v(s,t)$ interpretiramo kot vrednost, ki jo bomo imeli v času s, če v času t investiramo 1 enoto.

Razmerje, ki mu moramo zadostiti je, da za poljubne s, t, u velja enakost

$$v(s,u) = v(s,t)v(t,u) \tag{2.1}$$

Zgornja enačba pomeni, da če investiramo 1 enoto v času u, dobimo $v(t,u)$ v času t. In če investiramo $v(t,u)$ v času t dobimo $v(t,u)v(s,t)$ v času s. To je ekvivalentno temu, da v času u investiramo 1 enoto in dobimo v času s $v(s,u)$.

Poglejmo si še formalno definicijo diskontne funkcije v.

Definicija 2.1 *Diskontna funkcija je pozitivna funkcija dveh nenegativnih spremenljivk, ki za poljubne vrednosti s,t,u zadošča enačbi (2.1).*

Lastnosti diskontne funkcije:

1. Pri pogoju $s = t = u$, za vsak s velja

   $v(s,s)v(s,s) = v(s,s) \Rightarrow v(s,s) = 1.$

2. Za poljubna s in t velja
   $v(s,t)v(t,s) = v(s,s) = 1 \Rightarrow v(s,t) = v(t,s)^{-1}.$

2.2.1 Razlika med diskontno in akumulirano funkcijo

Poglejmo si podrobneje primer, kjer je $s < t$. V tem primeru, nam $v(s,t)$ predstavlja znesek, ki je manjši od 1, saj ga interpretiramo kot znesek, ki ga investiramo v času s, da v času t dobimo 1 enoto. Funkcija vrača diskontiran znesek, zato se imenuje diskontna funkcija. V primeru $s > t$ pa funkcija vrne akumuliran znesek od investirane 1 enote, kar bo več od 1 enote, zato jo imenujemo akumulirana funkcija.

Diskontne funkcije so osnova za nadaljnje preučevanje snovi, saj jih bomo uporabljali pri izračunu premije. Pomembno je tudi, kako izbrati pravilno diskontno funkcijo, ki je odvisna predvsem od pogojev trga, ki določa, koliko lahko pričakujemo od investiranega. V naših izračunih bomo uporabili konstantno diskontno funkcijo oziroma diskontni faktor.

2.3 Obresti

V tem poglavju bomo definirali obresti, ki so pomemben dejavnik pri izračunu premije. V našem primeru bomo uporabili diskontirane obresti. To so obresti, ki jih uporabimo takrat, ko želimo določiti trenutno vrednost prihodnjih plačil. Za boljše razumevanje si poglejmo enostaven primer.

Zgled. Podano imamo efektivno letno obrestno mero $i = 10\%$ in vemo, da bomo naslednje leto imeli 110 EUR. Zanima nas, kolikšna je trenutna vrednost tega plačila. Izračunamo diskontni faktor $v = \frac{1}{1+i} = 0,\overline{909}$. Iz tega sledi, da je trenutna vrednost plačila enaka $110 \cdot v = 100$ EUR.

S primerom smo želeli pokazati, da lahko izračunamo sedanjo vrednost, če poznamo vsa prihodnja plačila in obresti. Poglejmo si še definicijo obresti.

Definicija 2.2 *Obrestna mera za interval* $[k, k+1]$*, kjer je* $k = 0, 1, \ldots$*, je* $i_k = v(k+1, k) - 1$.

Definicija 2.3 *Diskontna obrestna mera za interval* $[k, k+1]$*, kjer je* $k = 0, 1, \ldots$*, je* $d_k = 1 - v(k, k+1)$.

Poglejmo si bolj podrobno ti dve definiciji. Investicija v vrednosti 1 v času k nam da $v(k+1, k) = 1 + i_k$ enot v času $k+1$. Podobno, če investiramo $1 - d_k = v(k, k+1)$ enot v času k, bomo imeli 1 enoto v času $k+1$. Torej je $d_k$vrednost, ki jo moramo odšteti vsaki enoti plačani v opazovanem časovnem intervalu, da dobimo vrednost plačano na začetku časovnega intervala.

Poglejmo si še povezavo med i_k in d_k

$$\begin{aligned} d_k &= 1 - v(k, k+1) = 1 - \frac{1}{v(k+1, k)} \\ &= \frac{v(k+1, k) - 1}{v(k+1, k)} = \frac{i_k}{1 + i_k}. \end{aligned}$$

Indeksirati začnemo pri 0, torej so obresti v prvem časovnem intervalu (i_0, d_0).

2.4 Efektivne obrestne mere

Pojem obrestne mere se vedno pojavlja v povezavi z osnovno časovno enoto (npr. leto), tako na primer govorimo o 4% letni obrestni meri. Potrebno je definirati še periodo konverzije. To je časovni interval, na koncu katerega se obresti pripisujejo.

Definicija 2.4 *Obrestna mera se imenuje efektivna, če sta osnovna časovna enota in perioda konverzije identični. Tedaj se obresti obračunajo na koncu časovne enote.*

Naj bo i letna obrestna mera. Zaradi enostavnosti predpostavimo, da je i enak za vsa leta obračuna, kar pomeni, da imamo konstantno obrestno mero. Vzemimo, da v neki sklad investiramo F_0 ter da na koncu k-tega leta za $k = 1, \ldots, n$ investiramo nadaljni znesek v višini r_k. Zanima nas, kakšno je stanje tega sklada na koncu k-tega leta.

Naj bo F_k saldo na koncu leta k, ki naj vključuje tudi plačilo r_k. Obresti, ki se naberejo v prejšnjih letih, so enake $i \cdot F_{k-1}$. Zato je

$$F_k = F_{k-1} + i \cdot F_{k-1} + r_k,\ \ k = 1, \ldots, n. \tag{2.2}$$

To rekurzivno formulo lahko zapišemo tudi kot

$$F_k - (1+i) \cdot F_{k-1} = r_k.$$

Pomnožimo obe strani zgornje formule z $(1+i)^{(n-k)}$ ter seštejemo za vse k. Ko odvečne člene pokrajšamo, nam na levi strani ostaneta samo prvi in zadnji člen. Tako dobimo

$$F_n = (1+i)^n \cdot F_0 + \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{(n-k)} \cdot r_k \tag{2.3}$$

Potence člena $(1+i)$ imenujemo akumulacijski faktorji. Vrednost začetnega kapitala C je po n letih enaka $(1+i)^n C$, kar predstavlja akumulirano vrednost. Enačba (2.3) nam da rezultat: kapital na koncu intervala je akumulirana vrednost začetnega kapitala plus vsota akumuliranih vrednosti vmesnih vložkov.

Z oznako

$$v = \frac{1}{1+i}$$

vidimo, da iz enačbe (2.3) dobimo

$$v^n \cdot F_n = F_0 + \sum_{k=1}^{n} v^k r_k.$$

Tukaj je v diskontni faktor, s pomočjo katerega izračunamo trenutno vrednost plačil. Tako je trenutna vrednost kapitala C, gledano po času n, enaka $v^n C$.

Zapišimo enačbo (2.2) kot

$$F_k - F_{k-1} = iF_{k-1} + r_k$$

ter jo seštejemo za vse vrednosti k. Dobimo

$$F_n - F_0 = \sum_{k=1}^{n} iF_{k-1} + \sum_{k=1}^{n} r_k.$$

Enačba nam pove, da je razlika med začetnim in končnim stanjem sklada enaka vsoti vseh obresti in vsoti vseh vložkov.

2.5 Diskontne obrestne mere

Včasih je smiselno, da obresti izračunamo na začetku vsake periode konverzije. Takšno obrestovanje imenujemo anticipativno obrestovanje. Naj bo d letna efektivna anticipativna obrestna mera. Oseba, ki investira kapital v višini C, prejme obresti dC na začetku leta in C na koncu leta. Predpostavimo, da se obresti dC investirajo pod enakimi pogoji, torej investitor prejme obresti $d(dC) = d^2C$ na začetku leta in vložek dC na koncu leta. Če ta postopek ponavljamo v neskončnost, vidimo, da investitor dobi na koncu leta za vložen kapital C izplačano

$$C + dC + d^2C + d^3C + \ldots = \frac{1}{1-d}C.$$

Ekvivalentna efektivna obrestna mera i je podana z enačbo

$$\frac{1}{1-d} = 1 + i, \tag{2.4}$$

iz česar sledi

$$d = \frac{i}{1+i}.$$

Torej če investiramo kapital v višini 1 enote, je d enak diskontirani vrednosti obresti i, kapitalizirani na koncu leta.

Prav tako iz enačbe (2.4) sledi, da je

$$i = \frac{d}{1-d}.$$

Obresti, dobljene na koncu leta, so enake akumulirani vrednosti obresti, obračunanih na začetku leta.

2.6 Aktuarska sedanja vrednost

V tem poglavju združimo dva pojma denarni tok in diskontni faktor. Podan imamo vektor plačil $c = (c_0, c_1, \ldots, c_n)$ in diskontni faktor v. Izračunati želimo vrednost vsakega plačila v času $t = 0$. To naredimo s pomočjo diskontne funkcije v, kjer predpostavimo, da se z v izračuna vrednost plačil v trenutnem času. Ta vrednost predstavlja trenutno vrednost denarnega toka oziroma plačil, označimo jo z APV, kar pomeni aktuarska sedanja vrednost. Plačilo v času $t = k$ ima APV enako $c_k v^k$ po definiciji diskontne funkcije. Pri tem ločimo dve možnosti:

1. $c_k > 0$; moramo plačati sedaj, da dobimo c_k v času t,
2. $c_k < 0$; dobimo $-c_k v^k$, da v času k plačamo c_k.

Definicija 2.5 *Aktuarsko sedanjo vrednost plačil definiramo kot vsoto vseh diskontiranih plačil, kjer je N čas zadnjega plačila:*

$$\text{APV} = \sum_{k=0}^{N} c_k v^k.$$

Poglejmo si še definicijo na področju zavarovalništva. Zanima nas, koliko je potrebno plačati za zavarovanje v tem trenutku, torej v času $t = 0$, če ne upoštevamo stroškov in velja, da je vrednost vplačila enaka vrednosti izplačila. To vrednost imenujemo ravno neto sedanja vrednost od zavarovalne vsote ZV.

Definicija 2.6 *Neto sedanjo vrednost od zavarovalne vsote definiramo kot diskontirano zavarovalno vsoto:*

$$\text{NSV} = ZV v^{t+1}.$$

Definicija 2.7 *Za vse čase $n = 0, 1, \ldots, N$, kjer je N čas zadnjega plačila, je aktuarska sedanja vrednost vektorja plačil c z diskontno funkcijo v, v času n definirana kot*

$$\text{Val}_n(c; v) = \sum_{k=0}^{N} c_k v^{n-k}.$$

Ta vrednost nam predstavlja znesek, ki ga imamo v času n, glede na vsa plačila, ki so podana z vektorjem c in diskontnim faktorjem v. Formula je uporabna, kadar se višina premije za vsak obrok razlikuje.

Lema 2.8 *Za poljubna* $m, n \in \mathbb{N}$ *velja formula*

$$\mathrm{Val}_m(c; v) = \mathrm{Val}_n(c; v)v^{m-n}.$$

Dokaz. Po definiciji Val_m dobimo:

$$\begin{aligned}\mathrm{Val}_m(c; v) &= \sum_{k=0}^{N} c_k v^{m-k} = \sum_{k=0}^{N} c_k v^{m-k} v^{n-k} v^{k-n} \\ &= \sum_{k=0}^{N} c_k v^{n-k} v^{m-n} = \mathrm{Val}_n(c; v)v^{m-n}\end{aligned}$$

□

Iz zgornjega sledi lema o linearnosti.

Lema 2.9 *Računanje aktuarske sedanje vrednosti je linearna preslikava.*

Dokaz. Preveriti moramo, da veljata naslednji formuli za vse vektorje plačil c, d, skalar α in čas k.

$$\begin{aligned}\mathrm{Val}_k(c + d) &= \sum_{k=0}^{N}(c_k + d_k)v^{n-k}) = \sum_{k=0}^{N} c_k v^{n-k} + \sum_{k=0}^{N} d_k v^{n-k} \\ &= \mathrm{Val}_k(c) + \mathrm{Val}_k(d), \\ \mathrm{Val}_k(\alpha c) &= \sum_{k=0}^{N}(\alpha c_k)v = \sum_{k=0}^{N} \alpha c_k v \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{N} c_k v = \alpha \mathrm{Val}_k(c).\end{aligned}$$

□

Lema 2.10 *Dva vektorja plačil* c *in* d *z diskontnim faktorjem* v *sta aktuarsko ekvivalentna za nenegativno število* n*, kadar velja*

$$\mathrm{Val}_n(c; v) = \mathrm{Val}_n(d; v).$$

Če formula velja za nek n*, velja za vse* n*.*

Pojem aktuarske ekvivalence v praksi pomeni, da sta c in d v finančno enaki situaciji.

2.7 Rezervacije

Poglejmo si še področje matematičnih rezervacij, ki spadajo med zavarovalno-tehnične rezervacije in so značilnost življenjskih zavarovanj. Med zavarovarovalno tehnične rezervacije spadajo še: rezervacije za prenosne premije, rezervacije za bonuse, popuste in storno, škodne rezervacije in izravnalne rezervacije. Opredelimo najprej, kje matematične rezervacije sploh nastopajo. Splošna opredelitev je, da se matematična rezervacija oblikuje za vsa dolgoročna zavarovanja, pri katerih izračun premije temelji na tablicah smrtnosti. Matematična rezervacija spada med obveznosti zavarovalnice in ne med njena sredstva. Pove nam torej, koliko obveznosti ima zavarovalnica do svojih zavarovancev v danem trenutku, ne pa, koliko njihovega denarja ima naloženega.

Ob podpisu zavarovalne pogodbe obe pogodbeni stranki prevzameta določene obveznosti. Zavarovalnica se obveže, da bo zavarovancu izplačala zavarovalno vsoto v primeru smrti, doživetja, itd., zavarovanec pa sprejme obveznost, da bo redno plačeval premijo. Včasih zavarovanec svojo obveznost plača takoj, kar imenujemo zavarovanje z enkratnim plačilom premije, pogosteje pa jo plačuje obročno, npr. enkrat letno.

Zavarovalnica izračuna pošteno funkcionalno premijo, če je vrednost skupnih bodočih pričakovanih vplačil zavarovanca ravno enaka vrednosti skupnih bodočih pričakovanih obveznosti zavarovalnice. Zelo splošno lahko torej trdimo, da od trenutka, ko zavarovanec vplača prvo premijo, vrednost bodočih zavarovančevih obveznosti ni več enaka vrednosti bodočih obveznosti zavarovalnice. Matematična rezervacija nam pove, kolikšna je ta razlika. Poglejmo še uradno definicijo matematične rezervacije.

Definicija 2.11 *Matematična rezervacija posamezne police je rezervacija, ki se oblikuje v višini sedanje vrednosti vseh ocenjenih bodočih obveznosti zavarovalnice, zmanjšanih za sedanjo vrednost ocenjenih vseh bodočih obveznosti zavarovanca.*

Obstaja več načinov kako izračunati matematične rezervacije. Prvi način je, da izhajamo iz bodočih obveznosti (rezervacij), pri drugem pa iz preteklih vplačil (izravnave). Prvi pristop, ki izhaja iz dogajanja v prihodnosti, imenujemo prospektivna metoda, drugega pa retrospektivna. Dogovorjeno je, da se prvi pristop uporablja, kjer je le mogoče. Izjemoma se uporabi retrospektivna metoda, a le v primeru, kjer dobimo višjo rezervacijo, kot bi jo dobili s prospektivno metodo.

2.7.1 Prospektivna metoda

Osnovna ideja prospektivne metode je, da je matematična rezervacija razlika med vrednostjo bodočih obveznosti zavarovalnice na dan oblikovanja in vrednostjo bodočih obveznosti zavarovanca na dan oblikovanja. Pri vrednotenju bodočih obveznosti sta ključna dva parametra. To sta obrestna mera in tablice smrtnosti.

Zavarovalnica mora bodoče obveznosti vrednotiti s tistimi parametri, ki so za zavarovalnico najbolj varni, torej tistimi, ki dajo najvišjo trenutno vrednost bodočih obveznosti. Če so torej obrestne mere nižje od pričakovanih, mora zavarovalnica bodoče obveznosti vrednotiti po tej novi, nižji obrestni meri. Tako mora zaradi neugodnih obrestnih mer v tistem poslovnem letu zvišati matematično rezervacijo. Če pa so obrestne mere višje od pričakovanih, mora zavarovalnica obveznosti vrednotiti po slednjih. Pozitivno razliko, ki je posledica višje obrestne mere pa lahko zavarovancu prizna v obliki dodatnega pripisa dobička.

Podobno velja tudi za tablice smrtnosti. Bodoče obveznosti mora zavarovalnica vrednotiti s pomočjo tistih tablic smrtnosti, ki dajo za zavarovalnico bolj neugoden rezultat, torej višjo rezervacijo.

2.7.2 Retrospektivna metoda

Osnovna logika metode je, da zasleduje klasični varčevalni pristop. Najbolj enostavno si retrospektivno metodo predstavljamo, če zavarovalno polico štejemo za varčevalni račun. Zavarovanec z vsakim plačilom premije poveča sredstva na svojem varčevalnem računu, vsa zbrana sredstva pa se obrestujejo. Sredstva se lahko plemenitijo z vnaprej dogovorjeno obrestno mero ali pa se le-ta spreminja sproti. Obveznost zavarovalnice je v vsakem trenutku enaka privarčevanim sredstvom zavarovanca.

Če je le mogoče, je za uporabo predpisana prospektivna metoda. Odgovor lahko razberemo iz primera, ko je zavarovalnica v izračunu premije garantirala višjo obrestno mero, kot jo na trgu lahko dosega. Celotno tveganje takega početja se je odrazilo takoj, od zavarovalnice pa posledično zahtevalo prikaz celotne izgube že ob sklenitvi zavarovanja. Zavarovalnica je torej takoj soočena s tveganjem, morebitna izguba pa se izkaže že v letu sklenitve takega zavarovanja. Z retrospektivno metodo se takšno početje prezre. Zavarovalnica vsako leto oblikuje višino zbranih sredstev, ki jih mora zavarovanec imeti. Če zavarovalnici z njegovimi sredstvi ni uspelo doseči takih odnosov v letu sklenitve zavarovanja, je ustvarila izgubo v višini razlike med obljubljenim donosom in dejansko doseženim donosom. Vendar je zaznala samo izgubo enega leta. Zavarovalnica torej z retrospektivno metodo lahko raztegne izgubo, ki jo povzroči previsoka obljubljena obrestna mera, skozi celotno trajanje zavarovanja. Posledice napačne poslovne odločitve v letu sklenitve zavarovanja torej čutijo vsa naslednja poslovna leta, v katerih zavarovanje traja.

2.7.3 LAT test

LAT test je preizkus ustreznosti oblikovanih obveznosti. Njegov namen je, da zavarovalnica preveri, ali so njene obveznosti določene v zadostni meri oziroma ima zavarovalnica dovolj visoko oblikovane svoje obveznosti, s katerimi bo v prihodnje pokrivala vse škode in stroške.

Poglavje 3

Tablice smrtnosti

Del sestave modelov za življenjska zavarovanja so tablice smrtnosti, ki nam predstavljajo pomembno povezavo med smrtnostjo in starostjo prebivalstva. Prvi, ki je raziskoval tablice smrtnosti je bil Edmond Halley [15], ki se je ukvarjal z analizo starosti ob smrti iz zapisov poljsko-nemškega mesta Breslaua (danes Vroclav). To je omogočilo britanski vladi, da je prodajala življenjske rente na podlagi starosti kupca. Halleyevo delo je močno vplivalo na aktuarstvo in predstavlja velik korak v zgodovini matematike.

Tablice smrtnosti [8] so podatki o verjetnosti, v katerem letu bo oseba umrla, kjer je verjetnost odvisna vsaj od starosti in spola osebe. Naj bo l_0 poljubno, celo število. Imamo skupino l_0 pravkar rojenih ljudi. Radi bi napovedali koliko teh ljudi bo še živelo v naslednjih letih. Predpostavili bomo, da so naši izračuni natančni.

Z l_x bomo označili število ljudi, ki bodo v času x še vedno živi in z d_x število ljudi, ki umrejo med časoma x in $x + 1$. Osnovna povezava med tema dvema količinama je tako:

$$l_{x+1} = l_x - d_x. \tag{3.1}$$

Enostavne tablice smrtnosti lahko prikažemo kot tabele vrednosti l_x in d_x, kjer je x nenegativno število. Poglejmo si primer.

Zgled.

x	l_x	d_x
0	100 000	2000
1	98 000	1500
2	96 500	1000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
ω	0	

V določenem času se bo tablica smrtnosti končala. Leto, v katerem se konča, označimo z ω, ki je takšno, da velja $l_\omega = 0$. To je zadnji čas tabele in v tem času so vse osebe iz originalne skupine že umrle. Dejanska vrednost ω se spreminja glede na različne tablice smrtnosti, vendar se giblje nekje okrog števila 110.

3.1 Osnovne definicije

Poglejmo si osnovne definicije povezane z verjetnostjo, ki bodo pomembne v naslednjih poglavjih.

Definicija 3.1 *Za nenegativno število n in x naj bo*

$$ {}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}. \tag{3.2}$$

Formula predstavlja verjetnost, da bo oseba, ki je živa v času x, živa tudi v času $x + n$. Osebo, ki je stara x let, označimo kar z (x).

Definicija 3.2 *Za nenegativno število n in x naj bo*

$$ {}_nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}. $$

Enačba predstavlja verjetnost, da bo oseba (x) umrla med časoma x in $x + n$.

Iz teh dveh definicij dobimo povezavo.

Lema 3.3 *Za nenegativno število n in x velja formula*

$$ {}_nq_x = 1 - {}_np_x. $$

Dokaz. $1 - {}_np_x = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = {}_nq_x$. □

Zgled. Iz prejšnjega primera tako dobimo:

$$\begin{aligned} {}_2p_0 &= \frac{l_2}{l_0} = \frac{96500}{100000} = 0,965 \\ {}_2q_1 &= \frac{l_1 - l_3}{l_1} = \frac{98000 - 95500}{98000} = \frac{25}{980} = 0,0255. \end{aligned}$$

Opomba 3.4 *Ker je oznaka ${}_1p_x$ zelo pogosta, pišemo kar p_x, enako velja za q_x. Količina q_x predstavlja ravno smrtnost v starosti x let.*

Tako veljata formuli

$$\begin{aligned} {}_1p_x &= \frac{l_{x+1}}{l_x} = p_x \\ {}_1q_x &= \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = q_x. \end{aligned}$$

Zanima nas, kolikšna je verjetnost, da bo oseba starosti x, umrla ravno v času med $x+n$ in $x+n+k$? To je količina, ki jo uporabljamo pogosto. Izračunamo jo lahko na več načinov, poglejmo si tri najbolj pogoste.

1. $\frac{l_{x+n} - l_{x+n+k}}{l_x}$.

   Števec predstavlja število oseb živih v času $x+n$, katerim odštejemo število oseb živih v času $x+n+k$. To predstavlja ravno število oseb, ki so umrle med časoma $x+n$ in $x+n+k$. Če delimo to število s številom vseh oseb živih v času x, dobimo ravno željeno verjetnost.

2. ${}_np_x - {}_{n+k}p_x$.

   Izraz predstavlja verjetnost, da bo (x) živel n let, kateremu odštejemo verjetnost, da bo živel $n+k$ let. Razlika predstavlja ravno željeno verjetnost.

3. ${}_np_x {}_kq_{x+n}$.

   Zadnji izraz predstavlja produkt dveh vrednosti. Če oseba umre med izbranima časoma, mora (x) najprej živeti do časa $x+n$. Oseba v času $x+n$ pa mora potem umreti v naslednjih k letih.

Na vse tri izraze bomo gledali kot na ekvivalentne. Izbrali bomo tistega, ki je za dan primer najbolj primeren oziroma uporaben.

Zelo uporabna je tudi naslednja enačba, ki jo imenujemo pravilo množenja.

Izrek 3.5 *Za vsa nenegativna cela števila n,k in x velja*

$$ {}_{n+k}p_x = {}_n p_x {}_k p_{x+n}, \tag{3.3} $$

Dokaz. Izrek nam pove, da če želi (x) živeti $n+k$ let, mora najprej živeti n let in nato v starosti $x+n$ biti živa še k let. Izrek dokažemo direktno iz definicije (3.2).

$$ {}_n p_x {}_k p_{x+n} = \frac{l_{x+n}}{l_x}\frac{l_{x+n+k}}{l_{x+n}} = \frac{l_{x+n+k}}{l_x} = {}_{n+x}p_x $$

□

Velja tudi naslednji izrek, ki je uporaben pri izračunu premije v praktičnem delu.

Izrek 3.6 *Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ velja formula*

$$ {}_n p_x = p_x p_{x+1} p_{x+2} \cdots p_{x+n-1}. \tag{3.4} $$

Dokaz. Vemo, da za vsak x velja formula

$$ {}_1 p_x = p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}. $$

Tako dobimo

$$ p_x p_{x+1} p_{x+2} \cdots p_{x+n-1} = \frac{l_{x+1}}{l_x}\frac{l_{x+2}}{l_{x+1}}\frac{l_{x+3}}{l_{x+2}} \cdots \frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}} = \frac{l_{x+n}}{l_x} = {}_n p_x $$

□

3.2 Komutacijska števila

Komutacijska števila [2, 3] izvirajo iz 18. stoletja in so bila zelo popularna, ker so poenostavila aktuarske izračune. Zaradi uvedbe računalniške tehnologije se jih ne uporablja več tako pogosto. Dobimo jih, če osnovne funkcije tablic smrtnosti q_x, l_q, d_x združimo z obrestno mero. Delimo jih na komutacijska števila za žive in komutacijska števila za mrtve.

3.2.1 Komutacijska števila za žive

Število D_x predstavlja diskontirano število živih oseb starih x let:

$$D_x = l_x v^x.$$

Podobno definiramo diskontirano število živih oseb starih $x + j$ let, kjer $j \in \mathbb{N}$:

$$D_{x+j} = l_{x+j} v^{x+j}.$$

Vsota diskontiranih živih oseb starih x, $x + 1$, ... let je:

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}.$$

Vsota vsot vseh diskontiranih živih oseb starih x,$x + 1$,$x + 2$,... let je:

$$S_x = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} N_{x+k}.$$

3.2.2 Komutacijska števila za mrtve

Število C_x predstavlja diskontirano število mrtvih oseb starih x let:

$$C_x = d_x v^{x+1}.$$

Podobno definiramo diskontirano število mrtvih oseb starih $x + j$ let, kjer je $j \in \mathbb{N}$:

$$C_{x+j} = d_{x+j} v^{x+j+1}.$$

Vsota diskontiranih mrtvih oseb starih x, $x + 1$, $x + 2$,... let je:

$$M_x = C_x + C_{x+1} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k}.$$

vsota vseh diskontiranih mrtvih oseb starih x, $x + 1$, $x + 2$, ... let je:

$$R_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} M_{x+k}.$$

3.2.3 Povezave med komutacijskimi števili za žive in mrtve

Povezava med C_x in D_x:

$$\begin{aligned} C_x &= d_x v^{x+1} = (l_x - l_{x+1})v^{x+1} = l_x v^{x+1} - l_{x+1}v^{x+1} \\ &= v l_x v^x - l_{x+1}v^{x+1} = vD_x - D_{x+1}. \end{aligned}$$

Povezava med M_x in N_x:

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k} = (vD_x - D_{x+1}) + (vD_{x+1} - D_{x+2}) + \ldots \\ &= v(D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots) - (D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots) = vN_x - N_{x+1}. \end{aligned}$$

3.3 Konstrukcija tablic smrtnosti s pomočjo q_x

Tablice smrtnosti so za $x = 0, 1, \ldots, \omega - 1$ zgrajene z vrednostmi q_x, kjer q_x predstavlja verjetnost, da bo oseba starosti x let umrla v naslednjem letu. Kako izračunati te vrednosti, obravnavamo kot statističen problem. Ideja je, da opazujemo kako dolgo bodo ljudje različne starosti živeli. Imamo dve možnosti opazovanja ljudi. Prva je, da izberemo skupino novorojenčkov in z leti spremljamo število preživelih, vendar pa je ta metoda dokaj zamudna. Druga in bolj uporabna možnost pa je, da opazujemo skupine ljudi različnih starosti za krajše časovno obdobje, kot je npr. eno leto. Recimo, da imamo skupino 1.000 ljudi starosti 50 in 10 od njih bo umrlo v roku enega leta, potem lahko ocenimo q_{50} kot 0.01. To je zelo poenostavljen primer, v praksi je proces bolj zahteven. Statistična raziskava, ki raziskuje takšne probleme se imenuje analiza preživetja.

V tem delu bomo obravnavali vrednosti q_x kot poznane. Tablico smrtnosti lahko potem enostavno zgradimo, če začnemo s poznano vrednostjo l_0 in uporabimo enačbi

$$\begin{aligned} d_x &= l_x q_x \\ l_{x+1} &= l_x - d_x, \end{aligned}$$

ki sledita iz formul (3.1) in (3.2). Videli pa bomo, da to ni vedno nujno potrebno, da izračunamo l_x in d_x. V praksi so tablice smrtnosti izračunane samo z verjetnostmi q_x.

3.4 Pričakovan preostanek življenjske dobe

Zanima nas, koliko let bo še živela oseba, ki je trenutno stara x let. Nekateri bodo živeli še ogromno let, nekateri pa bodo umrli takoj, vendar želimo poiskati neke vrste povprečno življenjsko dobo. Pogledali si bomo dve vrsti izračuna [8]:

1. Opazovanje skupine ljudi.
   Prvi način kako to izračunamo je, da vzamemo veliko število ljudi starih x let in jih opazujemo dokler ne umrejo. Potem lahko seštejemo vsa preživeta leta in jih delimo s številom vseh ljudi, s čimer dobimo ravno željeno povprečje. Poglejmo si enostaven primer.

   Zgled. Vzamimo tri ljudi starosti 60 let. Recimo da en umre star 62 let, drugi $72,5$ in tretji $91,25$. Vsota vseh let bi tako bila $2 + 12,5 + 31,25 = 45,75$. Če delimo to s številom oseb, kar je 3, dobimo, da je pričakovano število let, ki jih bo oseba pri starosti 60 še živela, ravno $15,25$.

   Za takšen način izračuna pričakovane starosti bi potrebovali več kot 3 opazovane ljudi in metoda je zelo zamudna, zato tak način ni praktičen.

2. Izračun pričakovane vrednosti.
   Poglejmo si še drugi način izračuna. Recimo, da začnemo z l_x ljudmi starosti x. Čez eno leto bo l_{x+1} živečih, ki bodo stari $x+1$ let. Na koncu drugega leta bo l_{x+2} živečih, ki bodo stari $x+2$. Če nadaljujemo po tej poti, dobimo vsoto vseh živečih:

   $$l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots + l_{\omega-1}.$$

   Če to delimo z l_x, dobimo naslednjo enakost:

   $$e_x = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} \frac{l_{x+k}}{l_x} = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} {}_kp_x. \tag{3.5}$$

   Količino e_x imenujemo skrajšan pričakovan preostanek življenjske dobe v starosti x. V naših izračunih smo upoštevali le cela leta, torej časa nismo gledali zvezno, ampak diskretno. V primeru, kjer smo obravnavali osebe stare 60 let, bi oseba, ki umre v starosti $72,5$ let imela pri 60 letih le še 12 let življenja namesto $12,5$. Med vrednostima

0 in 1 štejemo tako manj, kot dejansko je, zato definiramo polno pričakovano vrednost v starosti x:

$$\overset{\circ}{e}_x = e_x + \frac{1}{2}.$$

V nadaljnjih poglavjih bomo bolj podrobno definirali $\overset{\circ}{e}_x$ z uporabo porazdelitvene funkcije.

Obstaja enostavna rekurzivna formula, da lahko izračunamo e_x za vse vrednosti x. Iz druge enakosti (3.5) dobimo

$$\begin{aligned} e_x &= p_x + {}_2p_x + {}_3p_x + \ldots + {}_{\omega-x-1}p_x \\ &= p_x(1 + p_{x+1} + {}_2p_{x+1} + {}_2p_{x+1} + \ldots + {}_{\omega-x-2}p_{x+1}) \\ &= p_x(1 + e_{x+1}). \end{aligned}$$

V drugi vrstici smo uporabili pravilo množenja (3.3). To je rekurzija, pri začetnem pogoju $e_\omega = 0$. Poglejmo si bolj natančno, kaj nam predstavlja formula. Da bi lahko živeli celo število let v prihodnosti, mora (x) najprej živeti $x + 1$ let, kar predstavlja verjetnost p_x. Tako bo (x) preživel eno dodatno leto, čemur prištejemo pričakovan preostanek v starosti $x + 1$, kar predstavlja ravno $1 + e_{x+1}$. Pričakovan preostanek življenjske dobe t je funkcija odvisna od let. Za vsako starost x, pričakovan preostanek vrne povprečno število let, kolikor jih bo (x) še živel. Pomembno je, da to izrazimo kot funkcijo, ne kot eno samo število. Če kje preberemo, da se je pričakovana življenjska doba zvišala iz 75 na 78, to pomeni pričakovano življenjsko dobo pri starosti 0, kar nam ne pomaga, če želimo vedeti pričakovano življenjsko dobo pri 80-ih letih.

Prav tako je pomembno, da pričakovan preostanek ne predstavlja povprečne starosti ampak povprečno trajanje. Povprečna starost pri 50 je $31,2$, kar pomeni, da v povprečju ljudje pri 50 lahko pričakujejo, da bodo živeli do starosti $81,2$.

Poglejmo si še pričakovan preostanek življenjske dobe v naslednjih n letih, kjer je n fiksno obdobje. Tako dobimo iz formule (3.5) enakost, kjer upoštevamo naslednjih n let

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{l_{x+k}}{l_x} = \sum_{k=1}^{n} {}_kp_x. \tag{3.6}$$

Dobimo torej skrajšan n-letni začasni pričakovan preostanek življenjske dobe v starosti x. Količina predstavlja pričakovano celo število let, ki jih bo oseba starosti x še živela v naslednjih n letih.

Radi bi prilagodili formulo zaradi zaokroževanja v letu smrti. Tisti, ki bodo živeli do starosti $x+n$, bodo živeli še celih n let, zato je samo $(l_x - l_{x+n})$ oseb, ki so umrli v n letih in jih moramo obravnavati. Da dobimo bolj točen trenutni pričakovan preostanek v starosti x let, uporabimo formulo (3.6) ampak namesto $\overset{\circ}{e}_x = e_x + \frac{1}{2}$, uporabimo $\overset{\circ}{e}_x = e_x + \frac{1}{2}\frac{(l_x - l_{x+n})}{l_x}$. Tako dobimo celotni n-letni začasni preostanek v starosti x:

$$\overset{\circ}{e}_x = e_x + \frac{1}{2}\frac{(l_x - l_{x+n})}{l_x} = e_x + \frac{1}{2}{}_nq_x = \sum_{k=1}^{n} {}_kp_x + \frac{1}{2}{}_nq_x.$$

3.5 Primer tablic smrtnosti

V tem poglavju si bomo pogledali tablice smrtnosti [16], ki jih bomo poimenovali SLO_2007, saj so narejene za slovensko prebivalstvo v letu 2007. Tablice so narejene posebej za moške in ženske, nato pa smo izračunali še tablice za oba spola. To smo naredili tako, da smo uporabili 60% vrednosti smrtnosti od moških tablic in 40% vrednosti od ženskih tablic. Poglejmo si bolj podrobno postopek. Označimo s q_{x_z} verjetnost smrti v ženskih tablicah in q_{x_m} verjetnost smrti v moških tablicah. Tako dobimo q_x, ki nam predstavlja verjetnost smrti v združenih tablicah:

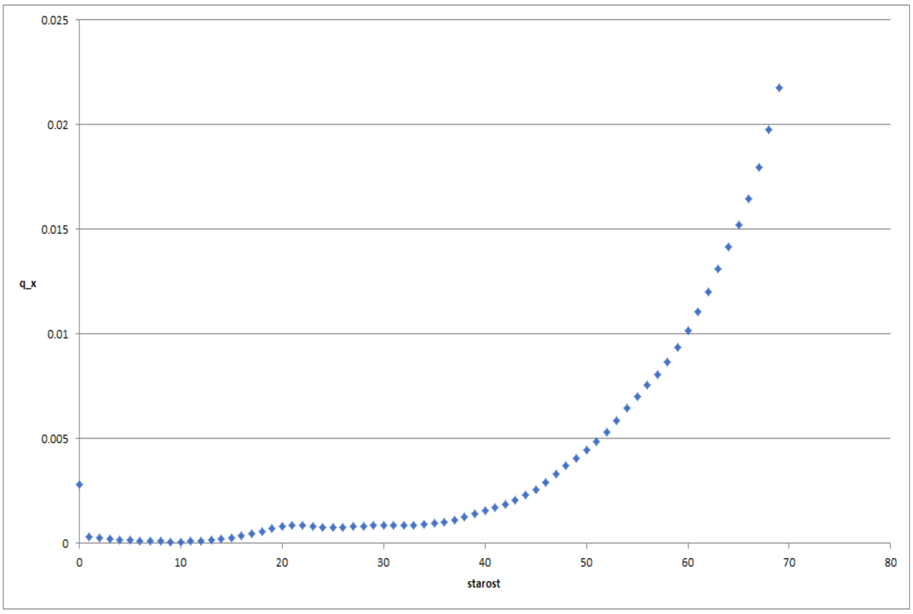
$$q_x = 0,4q_{x_z} + 0,6q_{x_m}.$$

Ta izračun smo naredili zato, da smo na varni strani, saj je smrtnost za moške ponavadi višja kot za ženske. Tako smo dobili tablice, ki so v prilogi. Imenovali jih bomo SLOUNISEX_2007.

Poglejmo si na grafu slike 3.1, kako izgledajo tablice. Na absicsni osi imamo prikazano starost in na ordinatni osi verjetnost smrti.

Tablice so prikazane le do starosti 70 let, zato jih vidimo bolj podrobno in lažje opazimo posebnosti. Na grafu vidimo skok pri novorojenčkih, najbrž zaradi težav pri porodu in visoke smrtnosti v prvem letu, drugi skok je v starosti 20 let, kar je najbrž posledica pridobitve vozniškega izpita in polnoletnosti. Nato verjetnosti smrti narašča, izrazito od približno 40. leta dalje, kar je posledica staranja.

Izračunane tablice SLOUNISEX_2007 bodo v praktičnem delu uporabljene za izračun premij.



Slika 3.1: Tablice smrtnosti SLOUNISEX_2007

3.6 Izbira tablic smrtnosti

Tablice smrtnosti dobro prikazujejo kako je starost pomembna pri izračunu let, ki jih bo oseba še živela. Obstajajo še različni drugi dejavniki, ki vplivajo na prihodnost, kot so spol, zdravje, življenjski stil in geografska lokacija. V praksi te dejavnike upoštevamo tako, da naredimo več različnih tablic smrtnosti. Lahko se naredi tablica, ki upošteva le določeno skupino ljudi, za katere velja določena lastnost. Tako je npr. znano, da ženske živijo dlje od moških, zato se naredijo posebej tablice za ženske in moške. Podobno se lahko naredijo ločene tablice za kadilce in nekadilce. Zelo pomembno je tudi, v kakšne namene se bodo tablice uporabile. Zavarovalnice lahko naredijo svoje tablice smrtnosti, ki temeljijo na podatkih od zavarovancev. Razlika je tudi med individualnim in skupinskim zavarovanjem. Izbira pravilne tablice smrtnosti je tako zelo pomembna aktuarska naloga.

Poglavje 4

Življenjska zavarovanja

Za sklenitev življenjskega zavarovanja se odločimo, kadar želimo sebi in svojim bližnjim zagotoviti socialno in finančno varnost. Na sklenitev zavarovanja vplivajo različni dejavniki. Ti so lahko rojstvo otroka, bolezen bližnjih, sklenitev kredita in drugi. Pomembno je, da sklenemo ustrezno zavarovanje za naše potrebe. Na to vplivajo naša starost, življenjski stil, prosti čas, družina in zaposlitev. Ko se odločimo za primerno zavarovanje, sklenemo z zavarovalnico zavarovalno polico in postanemo zavarovanec. Zavarovalna polica je tako pogodba med zavarovalnico in zavarovancem. V zameno za plačilo premije zavarovalnica v primeru škodnega dogodka plača dogovorjen znesek, ki ga imenujemo zavarovalna vsota. Škodni dogodek je negotov, nepričakovan dogodek, ki deluje na zavarovano osebo. Pri življenjskih zavarovanjih je škodni dogodek smrt. V tem primeru se zavarovalna vsota izplača bližnjim takoj po smrti in ta znesek imenujemo likvidirana odškodnina. Pri sklepanju je pomembno tudi trajanje oziroma doba zavarovanja, ki vpliva na višino premije. Zavarovanje lahko sklenemo za določeno obdobje, lahko pa je tudi doživljenjsko. Potrebno je ločiti tudi med življenjskim zavarovanjem, kjer je izplačilo eno ter rentnim varčevanjem, kjer je izplačil več in so periodična. Osnova za vsebino poglavja so knjige [3, 7, 8].

4.1 Različni tipi življenjskih zavarovanj

Poznamo več vrst življenjskih zavarovanj. Osnovna delitev življenjskih zavarovanj je na klasična in naložbena. Zavarovanja pa lahko ločimo tudi glede na izplačila, pri čemer imamo klasična in rentna.

4.1.1 Klasično življenjsko zavarovanje

S to vrsto zavarovanja lahko zavarujemo nevarnost svoje smrti, doživetja ali obojega hkrati. Zavarovanje za primer smrti imenujemo riziko zavarovanje, zavarovanje za primer smrti in doživetja pa mešano življenjsko zavarovanje. Mešano zavarovanje je takšno zavarovanje, kjer bo zavarovalnica zavarovalno vsoto ob naši smrti izplačala upravičencem, prav tako pa nam bo izplačala to vsoto v primeru doživetja. Zavarovalni vsoti za doživetje in smrt se lahko razlikujeta. Obstaja pa tudi življenjsko zavarovanje, kjer lahko k zavarovanju dodatno priključimo kritične bolezni, nezgode, dnevne odškodnine in ostale dodatke. Tri najbolj pogosto zavarovane kritične bolezni so rak, možganska kap in srčni infarkt.

4.1.2 Naložbeno življenjsko zavarovanje

Tudi v tej vrsti zavarovanj zavarujemo nevarnost svoje smrti in doživetja, vendar pa v tem primeru višina zavarovalne vsote za doživetje ni natančno določena, temveč je pričakovana. Zavarovalna vsota naložbenega življenjskega zavarovanja se spreminja z indeksom na katerega je zavarovanje vezano. To pomeni, da naložbeno tveganje prevzamemo sami. Običajno se dogovori najnižji znesek izplačila v primeru smrti, ki pa se ob ugodnih razmerah trga lahko tudi zvišuje. Ključno za zavarovanca je, da je v primeru negativnih trendov trga dogovorjena višina zneska izplačila za smrt zajamčena.

4.2 Osnovna ideja izračuna premije

Osnovna ideja izračuna premije je, da mora premija zagotoviti sredstva za izplačilo vseh obljub, ki jih je zavarovalnica dala zavarovancu, poleg tega pa mora pokriti še vse stroške zavarovalnice. Iz tega sledi, da je premija za življenjsko zavarovanje sestavljena iz funkcionalnega in stroškovnega dela. Poglejmo si izračun premije na enostavnem primeru.

4.2.1 Izračun funkcionalnega dela premije

Pri klasičnih življenjskih zavarovanjih ima zavarovanec pravico do izplačila zavarovalne vsote v primeru smrti oziroma preživetja celotnega obdobja zavarovanja. Obstaja še izplačilo v primeru hujše bolezni, invalidnosti, v obliki rednih mesečnih izplačil, itd.

Poglejmo si enostaven primer za izračun funkcionalnega dela premije oziroma neto premije.

Zgled. Zavarovanka, ženska stara 30 let, bi rada sklenila zavarovanje pri katerem bi njen otrok dobil izplačanih 10.000 EUR, če bi umrla v naslednjih petih letih. Če bi preživela vseh pet let, pa dobi sama izplačilo 5.000 EUR. Morebitno izplačilo za smrt se izvede v letu v katerem zavarovanka umre, izplačilo za doživetje pa se izvede naslednji dan po poteku pogodbe.
V tabeli 4.1 poglejmo, kakšne možnosti izplačil nastopijo. Recimo, da je bila pogodba sklenjena 1. 1. 2019.

Leto izplačila	Znesek izplačila	Pogoj izvedbe
2019	10.000 EUR	smrt v prvem letu
2020	10.000 EUR	smrt v drugem letu
2021	10.000 EUR	smrt v tretjem letu
2022	10.000 EUR	smrt v četrtem letu
2023	10.000 EUR	smrt v petem letu
2023	5.000 EUR	preživela vseh pet let

Tabela 4.1: Tabela izplačil

Predpostavimo, da je 1. 1. 2019 zavarovalnica sklenila popolnoma enako zavarovanje s stotimi enako starimi ženskami, od katerih sta dve umrli prvo leto, tri drugo leto in po štiri naslednja tri leta. Denarni tok izplačil je prikazan v tabeli izplačil 4.2.

Leto izplačila	Znesek izplačila
2019	20.000 EUR
2020	30.000 EUR
2021	40.000 EUR
2022	40.000 EUR
2023	40.000 EUR
2023	415.000 EUR

Tabela 4.2: Tabela izplačil za 100 zavarovancev

Zavarovalnica je torej v petih letih izplačala 585.000 EUR, torej mora sto zavarovancev vplačati vsaj toliko premij, da bo pokrila ta izplačila.

Primer pokaže, da mora zavarovalnica znati opredeliti, kako verjetno je, da bo zavarovanka v naslednjih petih letih umrla. Oceniti mora tudi, kdaj bo umrla, če sploh bo. Zelo pomembna je tudi obrestna mera, saj zavarovalnica zbrano premijo nalaga in tako pridobi obresti. Ob sklenitvi more torej zbrati toliko premije, da bo premija skupaj z obrestmi zadoščala za poplačilo obveznosti. Poglejmo si nadaljevanje zgornjega primera.

Zgled. Predpostavimo, da zavarovalnica obrestuje zbrano premijo s 4% efektivno letno obrestno mero. Izračunajmo koliko premije je potrebno zbrati ob sklenitvi, da bo z obrestmi zadoščala za vsa izplačila. Vsako izplačilo torej ustrezno diskontiramo. Dobimo:

$$\begin{aligned} A &= \frac{20.000}{1.04} + \frac{30.000}{1.04^2} + \frac{40.000}{1.04^3} + \frac{40.000}{1.04^4} + \frac{40.000 + 415.000}{1.04^5} \\ &= 490.696, 4 \end{aligned}$$

Znesek z obrestmi je precej manjši od tistega brez upoštevanja obrestovanja. Če bi vsaka od stotih zavarovank vplačala 4.907 EUR, bi zavarovalnica ob 4% obrestni meri zagotovila dovolj denarja za vsa izplačila.

Primer ni vključeval verjetnosti kdaj in če bodo zavarovanke sploh umrle. Če bi vključeval, bi bila premija različna za vsako osebo posebej. Tista oseba, za katero bi bilo bolj verjetno, da bo umrla prej, bi imela večjo premijo. Verjetnost preživetja in smrti pa dobimo ravno iz tablic smrtnosti.

Iz primera torej vidimo, da je neto premija v splošnem odvisna od verjetnosti smrti in od obrestne mere s katero obrestujemo že vplačano premijo. Odvisna pa je tudi od višine zavarovalne vsote, saj ravno ta definira višino izplačil.

4.2.2 Stroškovni del premije

Za pokrivanje stroškov zavarovalnica poleg funkcionalnega dela premije zavarovancu zaračuna tudi stroškovni del. Ta del je sestavljen iz stroškov pridobivanja zavarovanj, stroškov vplačil in administrativnih stroškov.

4.3 Matematični izračun premije

Poglejmo si še izpeljavo za formule za izračun premije.

Imamo zavarovalno polico za (x), osebo starosti x let. Naj bo b_k znesek, ki bo plačan v času $k+1$ v primeru smrti v času k do $k+1$. Tako definiramo $b = (b_0, b_1, \dots, b_{\omega-x-1})$ kot vektor izplačil v primeru smrti.

Naj bo v fiksen diskontni faktor. Želimo izračunati enkratno neto premijo, ki jo označimo z $A_x(b)$. A je standardni simbol za premijo, ki je najbrž prišel iz angleške besede za zavarovanje "assurance", ki je starejša verzija "insurance", kar pomeni zavarovanje. Princip za

izračun premije je takšen, da morajo vse premije skupaj s prihodki od obresti zadostovati za poplačilo škod, kot smo pokazali v prejšnjem primeru.
Začnemo z vektorjem izplačil $b = e_k = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, kjer je 1 na k-tem mestu. To pomeni, da je plačan znesek 1, če oseba (x) umre med časoma $x + k$ in $x + k + 1$. Vsota vseh ostalih izplačil je enaka 0.
Recimo, da imamo l_x oseb starosti x, ki so sklenile isto zavarovanje. Izmed teh je d_{x+k} oseb, ki umrejo med časom $x + k$ in $x + k + 1$ in vsaka izmed teh bo v času $k + 1$ prejela izplačilo v višini 1. Vsa izplačila tem osebam bodo tako enaka $v^{k+1} d_{x+k}$. To mora biti enako celotnemu znesku pobranih premij, kar je ravno neto premija na osebo pomnožena s številom vseh oseb, ki so sklenile zavarovanje, $l_x A_x(e_k)$. Tako mora veljati enakost

$$A_x(e_k) = v^{k+1} \frac{d_{x+k}}{l_x}.$$

Splošno polico se lahko obravnava kot zaporedje letnih polic, kjer k-ta polica plača b_k v času $k + 1$ v primeru smrti prejšnje leto. Premija za takšno polico je torej $b_k v^{k+1} \frac{d_{x+k}}{l_x}$, za celotno premijo vseh polic pa seštejemo vse premije:

$$\begin{aligned} A_x(b) &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} b_k v^{k+1} \frac{d_{x+k}}{l_x} = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} b_k v^{k+1} ({}_k p_x - {}_{k+1} p_x) \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} b_k v^{k+1} \; {}_k p_x q_{x+k}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

V formuli 4.1 seštejemo število pogojev, kjer vsak vsebuje tri faktorje b_k, v in ${}_k p_x$. Z b_k označimo zavarovalno vsoto, z v diskontni faktor in s p verjetnost preživetja. Vidimo torej, da so trije pomembni dejavniki, ki vplivajo na višino neto premije.

Opomba 4.1 *Izračunana vrednost neto premije je dejansko matematično upanje vseh neto sedanjih vrednosti s pripadajočimi verjetnostmi smrtnosti v posameznem letu.*

Zgled. Recimo, da imamo podane verjetnosti smrtnosti v posameznem letu: $q_{60} = 0,2$, $q_{61} = 0,4$, $q_{62} = 0,5$ in efektivno letno obrestno mero $i = 2,75\%$. Z osebo starosti 60 let sklenemo zavarovalno polico, s katero se dogovorimo za različne zavarovalne vsote. Konec prvega leta po smrti zavarovalnica izplača 80 enot, konec drugega leta 75 in konec tretjega leta 100. Če zavarovanec živi do starosti 63, je zavarovanje končano in zavarovanec ne dobi ničesar. Poiskati moramo enkratno premijo za to zavarovanje.

Najprej moramo izračunati diskontni faktor v:

$$v = \frac{1}{1 + i} = 0,9732.$$

Nato moramo izračunati ${}_kp_x$:

$$
\begin{aligned}
{}_0p_{60} &= 1,\\
{}_1p_{60} &= 0,8,\\
{}_1p_{61} &= 0,6,\\
{}_2p_{60} &= {}_1p_{60}{}_1p_{61} = 0,48.
\end{aligned}
$$

Nato lahko izračunamo neto premijo. Za izračun premije uporabimo formulo (4.1) in dobimo

$$
\begin{aligned}
A &= b_0v^1{}_0p_{60}q_{60} + b_1v^2{}_1p_{60}q_{61} + b_2v^3{}_1p_{61}q_{62}\\
&= 80 \cdot 0,97 \cdot 1 \cdot 0,2 + 75 \cdot 0,97^2 \cdot 0,8 \cdot 0.4 + 100 \cdot 0,97^3 \cdot 0,48 \cdot 0.5\\
&= 15,57 + 22,73 + 22,12 = 60,42.
\end{aligned}
$$

Če bi v tem primeru začeli z $l_{60} = 1000$, potem imamo $d_{60} = 200$, $l_{61} = 800$, $d_{61} = 320$, $l_{62} = 480$ in $d_{62} = 240$, iz česar vidimo povezavo med l_x, d_x in q_x.

4.4 Kapitalska zavarovanja

Kapitalska zavarovanja so takšne vrste zavarovanj, kjer se obveznost zavarovalnice izplača v enkratnem znesku, ki mu pravimo zavarovalna vsota. Poglejmo si določeno osebo, staro x let. Označimo njeno bodočo življenjsko dobo s $T(x)$, ki jo bomo krajše označili kar s T. To pomeni, da je starost v kateri bo oseba umrla ravno $x + T$.

Naša bodoča življenjska doba T je torej slučajna spremenljivka, ki ji lahko priredimo porazdelitveno funkcijo

$$G(t) = P(T \leq t),\ t \geq 0.$$

Za vsak t nam torej funkcija $G(t)$ predstavlja verjetnost, da bo x let stara oseba umrla v naslednjih t letih. Privzemimo, da je G zvezna funkcija z verjetnostno gostoto $g(t)$, ki ima predpis $g(t) = G'(t),\ t \geq 0$. Tako je naprimer

$$g(t)dt = P(t < T < t + dt) \tag{4.2}$$

ravno verjetnost, da bo x let stara oseba umrla v starosti med $x + t$ in $x + t + dt$.

Čas in višina izplačila pri kapitalskih zavarovanjih sta lahko funkciji slučajne spremenljivke T, torej sta tudi sami slučajni spremenljivki. Sedanjo vrednost izplačila, ki je izračunana na podlagi fiksne obrestne mere i, označimo z Z. Pričakovano sedanjo vrednost obveznosti pa označimo z $E(Z)$, kar je ravno enkratna neto premija zavarovalne police. Enkratna neto premija ne kaže rizika, ki ga nosi zavarovalnica. Da se lahko določi pravo vrednost rizika, je potrebno upoštevati druge karakteristike slučajne spremenljivke Z, na primer varianco.

Verjetnosti in druge vrednosti, ki nas zanimajo, lahko izrazimo s funkcijama g in G. Tako dobimo relacijo

$$ {}_tq_x = G(t),\ t \geq 0, $$

kjer ${}_tq_x$ predstavlja verjetnost, da bo oseba, stara x let, umrla v naslednjih t letih. Podobno dobimo verjetnost ${}_tp_x$, da oseba, stara x let, preživi še vsaj t let

$$ {}_tp_x = 1 - G(t). \tag{4.3} $$

Verjetnost, da bo oseba starosti x preživela naslednjih s let in umrla v sledečih t letih ${}_{s|t}q_x$ izračunamo kot

$$ {}_{s|t}q_x = P(s < T < s + t) = G(s + t) - G(s) = {}_{s+t}q_x - {}_sq_x. $$

S ${}_tp_x$ označimo pogojno verjetnost, da bo x let stara oseba preživela nadaljnjih t let, po tem, ko bo dosegla starost $x + s$:

$$ {}_tp_{x+s} = P(T > s + t \mid T > s) = \frac{1 - G(s + t)}{1 - G(s)}. $$

Podobno definiramo ${}_tq_{x+s}$ kot pogojno verjetnost smrti v t letih pri predpostavki, da x let stara oseba doživi $x + s$ let:

$$ {}_tp_{x+s} = P(T \leq s + t \mid T > s) = \frac{G(s + t) - G(s)}{1 - G(s)}. $$

Izrek 4.2 *Veljata enakosti*

1. ${}_{s+t}p_x = {}_sp_x{}_tp_{x+s}$,
2. ${}_{s|t}q_x = {}_sp_x{}_tq_{x+s}$.

Dokaz. Ločimo izračuna za obe enakosti:

1. ${}_{s+t}p_x = 1 - G(s + t) = (1 - G(s))\frac{1-G(s+t)}{1-G(s)} = {}_sp_x{}_tp_{x+s}$,
2. ${}_{s|t}q_x = G(s + t) - G(s) = (1 - G(s))\frac{G(s+t)-G(s)}{1-G(s)} = {}_sp_x{}_tq_{x+s}$.

□

Definicija 4.3 *Pričakovan preostanek življenjske dobe x let stare osebe je $E(T)$, kar označimo z $\mathring{e}_x$ in izračunamo*

$$\mathring{e}_x = \int_0^\infty tg(t)dt.$$

Pričakovan preostanek življenjske dobe lahko izračunamo tudi z uporabo porazdelitvene funkcije, kjer predpostavimo, da $E(T)$ obstaja, in uporabimo formulo 4.3:

$$\mathring{e}_x = \int_0^\infty (1 - G(t))dt = \int_0^\infty {}_tp_x dt.$$

4.5 Jakost smrtnosti

Definicija 4.4 *Jakost smrtnosti x let stare osebe v starosti $x + t$ definiramo kot*

$$\mu_{x+t} = \frac{g(t)}{1 - G(t)}$$

Za jakost smrtnosti velja enačba

$$\mu_{x+t} = \frac{g(t)}{1 - G(t)} = -\frac{d}{dt} \ln(1 - G(t)).$$

Verjetnost smrti na intervalu $[t, t+dt]$ lahko izpeljemo z jakostjo smrtnosti na osnovi formul (4.2) in (4.3):

$$P(t < T < t + dt) = g(t)dt = \frac{g(t)(1 - G(t))}{1 - G(t)} dt = {}_tp_x \mu_{x+t} dt.$$

Bodočo pričakovano življenjsko dobo lahko tako sedaj zapišemo kot

$$\mathring{e}_x = \int_0^\infty t {}_tp_x \mu_{x+t} dt.$$

Poglejmo si trditev, ki sledi iz zgornje definicije.

Trditev 4.5 *Jakost smrtnosti x let stare osebe v starosti $x + t$ s pomočjo verjetnosti ${}_tp_x$ lahko izračunamo kot*

$$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt} \ln {}_tp_x.$$

Poglejmo si, kaj nam da integracija zgornje formule:

$$\begin{aligned}
\int_0^t \mu_{x+s} ds &= \int_0^t -\frac{d}{dt} \ln {}_t p_x ds \\
-\int_0^t \mu_{x+s} ds &= \ln {}_t p_x \\
e^{-\int_o^t \mu_{x+s} ds} &= e^{\ln {}_t p_x} \\
{}_t p_x &= e^{-\int_o^t \mu_{x+s} ds}.
\end{aligned}$$

4.6 Neto premija

Najprej definirajmo diskretno naključno spremenljivko $K = [T(x)]$ kot celoštevilsko število dopolnjenih let, ki jih bo preživela oseba stara x let. Verjetnostna porazdelitev spremenljivke K je enaka

$$P(K = k) = P(k \leq T < k + 1) = {}_k p_x q_{x+k}.$$

Poglejmo si različne vrste zavarovanj in formule za izračun neto premij za vsako vrsto posebej.

4.6.1 Zavarovanje za primer smrti

Oglejmo si najprej dosmrtno zavarovanje za primer smrti. Pri tem zavarovanju se izplača zavarovalna vsota ob koncu leta, v katerem je zavarovanec umrl. Višina izplačila je fiksna, medtem ko je čas izplačila $(K + 1)$ slučajna spremenljivka. Sedanja vrednost spremenljivke Z je enaka

$$Z = v^{K+1}. \tag{4.4}$$

Porazdelitev za Z je določena s porazdelitvijo za K in s formulo

$$P(Z = v^{k+1}) = P(K = k) = {}_k p_x q_{x+k} \tag{4.5}$$

za $k = 0, 1, 2, \ldots$. Enkratno neto premijo za to zavarovanje običajno označimo z A_x. Torej imamo

$$A_x = E(v^{K+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}. \tag{4.6}$$

Oglejmo si še začasno zavarovanje za primer smrti v trajanju n let. Pri tem zavarovanju se zavarovalna vsota izplača samo, če zavarovanec umre v prvih n letih in se v tem primeru izplača na koncu leta smrti. Zdaj je

$$Z = \begin{cases} v^{K+1} & \text{za } K = 0, 1, \ldots, n-1, \\ 0 & \text{za } K = n, n+1, n+2, \ldots \end{cases}$$

Enkratna neto premija je tokrat enaka

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = E(v^{K+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}{}_{k}p_x q_{x+k}. \tag{4.7}$$

4.6.2 Zavarovanje za primer doživetja

Zavarovanje za primer doživetja v trajanju n let predvideva izplačilo zavarovalne vsote samo tedaj, če je zavarovanec še živ ob koncu n-tega leta. Označimo $Z = I \cdot v^n$, kjer je I indikator:

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{, če oseba preživi } n \text{ let,} \\ 1 & \text{, če oseba ne preživi } n \text{ let} \end{cases}$$

Potem izračunamo pričakovano vrednost spremenljivke Z:

$$E(Z) = E(I \cdot v^n) = v^n P(K \geq n) = v^n{}_{n}p_x.$$

Iz tega sledi, da je enkratna neto premija je enaka

$$A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = v^n{}_{n}p_x. \tag{4.8}$$

4.6.3 Mešano zavarovanje

Predpostavimo, da se zavarovalna vsota izplača ob koncu leta smrti, če ta nastopi v prvih n letih zavarovanja, sicer pa na koncu n-tega zavarovalnega leta:

$$Z = \begin{cases} v^{K+1} & \text{za } K = 0, 1, \ldots, n-1, \\ v^n & \text{za } K = n, n+1, n+2, \ldots \end{cases}$$

Enkratno neto premijo označimo z $A_{x:\overline{n}|}$. Označimo še sedanjo vrednost spremenljivke za začasno zavarovanje za primer smrti za n let z Z_1 in sedanjo vrednost spremenljivke za zavarovanje za primer doživetja z Z_2. Iz definicije mešanega zavarovanja je očitno, da je

$$Z = Z_1 + Z_2.$$

V primeru, da sta zavarovalni vsoti za smrt in doživetje enaki, velja formula za premijo

$$A_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}. \tag{4.9}$$

4.7 Rente

Renta je zaporedje večkratnih vplačil ali izplačil, ki tekom določenega obdobja naraščajo, padajo ali so enaka. Ločimo večne in časovne rente.

4.7.1 Večne rente

V tem poglavju si bomo pogledali nekatere vrste časovnih rent ter izračunali njihovo neto sedanjo vrednost. Ločimo dve vrsti rent. Prva je prenumerandna renta, katere neto sedanjo vrednost označimo z $\ddot{a}$, ki se izplačuje enkrat na začetku vsakega intervala, druga pa je postnumerandna renta, katere neto sedanjo vrednost označimo z a, ki se izplačuje enkrat na koncu vsakega podintervala.

Najprej si poglejmo večno rento z letnimi plačili v višini 1. Sedanja vrednost prenumerandne večne rente je

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = 1 + v + v^2 + v^3 + \cdots = \frac{1}{1-v} = \frac{1}{d}. \tag{4.10}$$

Sedanja vrednost postnumerandne večne rente pa je enaka

$$a_{\overline{\infty}|} = v + v^2 + v^3 + \cdots = \frac{v}{1-v} = \frac{1}{i}. \tag{4.11}$$

Poglejmo si sedaj večno rento, kjer se zneski v višini $\frac{1}{m}$ plačajo m-krat v vsakem letu. Sedanja vrednost prenumerandne rente v času 0 je enaka

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m}v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}v^{\frac{2}{m}} + \cdots = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{1-v^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{d^{(m)}}. \tag{4.12}$$

Sedanja vrednost postnumerandne rente v času 0 pa je enaka

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{m}v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}v^{\frac{2}{m}} + \cdots = \frac{1}{m} \cdot \frac{v^{\frac{1}{m}}}{1-v^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{m((1+i)^{\frac{1}{m}}-1)} = \frac{1}{i^{(m)}}. \tag{4.13}$$

4.7.2 Časovne rente

V praksi se časovno omejene rente uporabljajo mnogo pogosteje kot večne rente. Posvetili se bomo osnovnim vrstam časovnih rent, katerih trajanje bo n let. Poglejmo si najprej prenumerandno časovno rento z letnimi vplačili v višini 1. Njeno sedanja vrednost izračunamo:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1}$$

Časovno rento si lahko predstavljamo kot razliko dveh večnih rent, eno z začetkom v času 0, drugo pa z začetkom v času n. Tako dobimo

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{\infty}|} - v^n \ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d} - v^n \frac{1}{d} = \frac{1 - v^n}{d}.$$

Analogno iz (4.11), (4.12) in (4.13) pridemo do formul

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i},$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{d^{(m)}},$$

$$a^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i^{(m)}}.$$

Opazimo, da se števec v zgornjih izrazih ne spreminja, vrednost imenovalca pa je odvisna od vrsta rente in frekvence plačevanja. Pomembno je, da je trajanje n celo število.

Pri časovnih rentah je zanimiva tudi končna ali akumulirana vrednost rente, kar predstavlja ravno vrednost vseh vplačil po preteku n let. Za končne vrednosti bomo uporabljali simbol s. Končno vrednost dobimo tako, da sedanjo vrednost rente pomnožimo s faktorjem $(1+i)^n$:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{d},$$

$$s_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

$$\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{d^{(m)}},$$

$$s_{n}^{(m)} = \frac{(1+i)^n - 1}{i^{(m)}}.$$

Med končno in sedanjo vrednostjo časovne rente s konstantnimi plačili obstaja povezava.

Lema 4.6 *Za vsako naravno število n velja enakost*

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{s_{\overline{n}|}} + i.$$

Dokaz. Izračunajmo desno stran enačbe, kjer upoštevamo, da je $s_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n-1}{i}$:

$$\frac{1}{s_{\overline{n}|}} + i = \frac{i}{(1+i)^n - 1} + i = \frac{i}{\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n}} = \frac{i}{1-(\frac{1}{1+i})^n} = \frac{i}{1-v^n} = \frac{1}{a_{\overline{n}|}}.$$

□

4.7.3 Življenjske rente

Življenjske rente so sestavljene iz zaporedja obrokov, ki se plačujejo tako dolgo, dokler določena oseba še živi ali pa poteče izplačevanje rente, če je ta časovno vezana. Torej je življenjska renta časovna renta, ki traja preostalo življenjsko dobo T. Sedanja vrednost življenjske rente je slučajna spremenljivka, ki jo označimo z Y. Enkratna neto premija življenjske rente je pričakovana sedanja vrednost $E(Y)$. Življenjsko rento lahko štejemo po eni strani za izplačila iz zavarovalne police, po drugi strani pa za periodično plačilo premij z nasprotnim predznakom.

Oglejmo si prenumerandno življenjsko rento, ki jo sestavljajo letna plačila v višini 1. Obroke plačujemo v časovnih točkah $0, 1, \ldots, K$. Sedanja vrednost rente je

$$Y = 1 + v + v^2 + \cdots + v^K = \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, \tag{4.14}$$

verjetnostna porazdelitev te slučajne spremenljivke pa je podana s

$$P(Y = \ddot{a}_{\overline{K+1}|}) = P(K = k) = {}_kp_x q_{x+k}, \ k = 0, 1, \ldots$$

Enkratna neto premija, ki jo označimo z $\ddot{a}_x$, je pričakovana vrednost za (4.14):

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|\,k}p_x q_{x+k}. \tag{4.15}$$

Prav tako lahko (4.14) zapišemo kot

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} v^k I_{(K \geq k)},$$

kjer smo z $I_{(K\geq k)}$ označili indikator dogodka $K \geq k$. Če izračunamo njeno pričakovano vrednost, dobimo

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x = E(Y) = E(\sum_{k=0}^{\infty} v^k I_{(K\geq k)}) &= \sum_{k=0}^{\infty} E(v^k I_{(K\geq k)}) \\ = \sum_{k=0}^{\infty} v^k E(I_{(K\geq k)}) &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k P(K \geq n) = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Našli smo torej dve formuli za izračun enkratne neto premije. V (4.15) smo obravnavali rento kot celoto, medtem ko v (4.16) gledamo na rento kot na zaporedje zavarovanj za primer doživetja.

Obstaja povezava med življenjsko rento in dosmrtnim zavarovanjem za primer smrti, kjer je sedanja vrednost obveznosti podana z enačbama (4.4) in (4.6). S pomočjo (4.10) lahko (4.14) zapišemo kot

$$Y = \frac{1 - v^{K+1}}{d} = \frac{1 - Z}{d}.$$

S tem, ko izračunamo njeno pričakovano vrednost, dobimo

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d}.$$

Sedanja vrednost n-let trajajoče začasne prenumerandne življenjske rente je

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|} & \text{za } K = 0, 1, \ldots, n-1, \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} & \text{za } K = n, n+1, n+2, \ldots \end{cases}$$

Podobno kot zgoraj, izrazimo enkratno neto premijo kot

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\, {}_k p_x q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|}\, {}_n p_x.$$

Enkratno neto premijo lahko izračunamo tudi iz dosmrtne prenumerandne rente iz formule 4.16, kjer upoštevamo, da je začetna prenumerandna renta dolžine n let, zato vsota teče od $k = 0$ do $n - 1$. Dobimo formulo

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_k p_x. \tag{4.17}$$

4.8 Letna neto premija

Z zavarovalno polico so natančno določene obveznosti zavarovatelja v primeru škodnega dogodka. Določene pa so tudi premije, ki jih plača zavarovanec. V osnovi ločimo tri načine plačevanja premij:

1. plačilo enkratne premije,
2. periodično plačevanje premij konstantne višine,
3. periodično plačevanje premij spremenljive višine.

Formule za izračun prve točke smo obravnavali že v poglavjih 4.6.1, 4.6.2 in 4.6.3. Zanima nas predvsem druga točka, kjer je potrebno definirati še trajanje in frekvenco plačevanja premije. Praviloma se premije plačujejo v naprej, zanimale pa nas bodo letne neto premije.

V zvezi z zavarovalno polico definirajmo celotno izgubo police L, ki jo ima zavarovatelj. Izguba je ravno razlika med sedanjo vrednostjo izplačil zavarovatelja in sedanjo vrednostjo plačanih premij.

Definicija 4.7 *Neto premija je takšna premija, ki zadošča formuli*

$$E(L) = 0, \tag{4.18}$$

kar pomeni, da je pričakovana vrednost izgube zavarovatelja enaka nič.

Če se premija plačuje periodično v konstantni višini, kar je v našem primeru enkrat letno, nam (4.18) enolično določa neto premijo.

4.8.1 Zavarovanje za primer smrti

Poglejmo si najprej dosmrtno kritje z zavarovalno vsoto 1, plačljivo na koncu leta smrti, ki se financira z letno premijo P_x. Po definiciji je izguba zavarovatelja enaka

$$L = v^{K+1} - P_x \cdot \ddot{a}_{\overline{K+1}|}.$$

Iz (4.18) sledi, da je

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}.$$

Poglejmo si še začasno zavarovanje za primer smrti v trajanju n let z zavarovalno vsoto 1, plačljivo na koncu leta smrti. Letno neto premijo označimo s simbolom $P^1_{x:\overline{n}|}$. Izguba zavarovatelja je enaka

$$L = \begin{cases} v^{K+1} - P^1_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{\overline{K+1}|} & \text{za } K = 0, 1, \dots, n-1, \\ -P^1_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{\overline{n}|} & \text{za } K = n, n+1, n+2, \dots \end{cases}$$

Tako dobimo

$$P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}. \tag{4.19}$$

4.8.2 Zavarovanje za primer doživetja

V primeru zavarovanja za doživetje označimo letno neto premijo s $P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$. Izguba zavarovatelja je enaka

$$L = \begin{cases} -P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} \cdot \ddot{a}_{\overline{K+1}|} & \text{za } K = 0, 1, \dots, n-1, \\ v^n - P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|} & \text{za } K = n, n+1, n+1, \dots \end{cases}$$

Tako dobimo

$$P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

4.8.3 Mešano zavarovanje

Letno neto premijo označimo s $P_{x:\overline{n}|}$. Tako dobimo formuli

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

in

$$P_{x:\overline{n}|} = P^1_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}. \tag{4.20}$$

4.9 Obračun stroškov

Stroški so tesno povezani s premijami in rezervami. Stroške razdelimo v tri osnovne skupine:

- Pridobitveni stroški.
  To so stroški, ki so povezani s sklenitvijo novega zavarovanja: provizija zastopnikov, potni stroški, zdravniški pregledi, izpis police in marketing. Za vse te stroške se zaračuna enkraten znesek, ki je proporcionalen zavarovalni vsoti. Te stroške označimo z α.
- Inkasni stroški.
  Ti stroški nastanejo na začetku vsakega leta, v katerem je treba plačati premijo. Ti stroški so proporcionalni stroškovni premiji in jih označimo z β.
- Upravni stroški.
  To so vsi preostali stroški zavarovalnice. Npr. plače zaposlenih, najemnine, investicije, itd. Zaračunajo se med celotno dobo zavarovalne police na začetku vsakega leta. Izraženi so proporcionalno z zavarovalno vsoto in jih označimo z γ.

4.9.1 Stroškovna premija

Poglejmo si, kako se izračuna letna premija, ki vsebuje tudi stroške.

Definicija 4.8 *Letna premija, katere pričakovana sedanja vrednost zadostuje za kritje obveznosti iz police in nastalih stroškov se imenuje stroškovna premija.*

Stroškovno premijo označimo s P^a. Zapišemo lahko

$$P^a = P + P^\alpha + P^\beta + P^\gamma,$$

kjer je P letna neto premija, P^α, P^β in P^γ tri komponente stroškov.

Poglejmo si stroškovno premijo za mešano zavarovanje z zavarovalno vsoto 1 in trajanjem n let. Stroškovno premijo $P^a_{x:\overline{n}|}$ dobimo iz pogoja, da je

$$P^a_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \beta P^a_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|}. \tag{4.21}$$

Po deljenju z $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ dobimo

$$P^a_{x:\overline{n}|} = P_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + \beta P^a_{x:\overline{n}|} + \gamma.$$

Izraz predstavlja ravno razbitje stroškovne premije na komponente.

Če iz formule (4.21) izrazimo $P^a_{x:\overline{n}|}$, dobimo

$$P^a_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \gamma \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{(1-\beta)\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

Če v tej enačbi zamenjamo α z $\alpha(A_{x:\overline{n}|} + d\ddot{a}_{x:\overline{n}|})$, saj velja enakost $A_{x:\overline{n}|} + d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1$, dobimo povezavo z letno neto premijo

$$P^a_{x:\overline{n}|} = \frac{1+\alpha}{1-\beta} P_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha d + \gamma}{1-\beta}. \tag{4.22}$$

Če torej neto premiji dodamo α, β in γ, dobimo bruto oziroma stroškovno premijo. To je ravno znesek, ki ga plača zavarovanec v določenem obdobju. Pri izračunu bruto premije izhajamo iz neto premije, kjer upoštevamo tablice smrtnosti in obrestno mero ter nato dodamo še stroške.

Izračun bruto premije smo naredili samo za mešano življenjsko zavarovanje, za ostala zavarovanja določimo premijo na podoben način. Upoštevati je potrebno pripadajočo rento in neto premijo.

Poglavje 5

Različni vplivi na premijo

Do sedaj smo obravnavali življenjska zavarovanja, kjer je prišlo do smrti le zaradi enega dejavnika. Zanima pa nas, kako je v primeru, kjer lahko pride do škodnega vzroka zaradi več različnih dejavnikov in kako ti dejavniki vplivajo na višino premije. Primer takšnega zavarovanja je zavarovanje za smrt, kjer se zavarujemo za hujše bolezni kot so npr. rak, kap in infarkt. Zanima nas kakšna je premija v primeru le ene hujše bolezni in kakšna je premija v primeru večih. Razlikujemo pa lahko tudi po vzroku smrti, kot sta nezgodna ali naravna smrt, saj je lahko izplačilo višje v primeru nezgode. V tem poglavju bomo obravnavali tablice smrtnosti za več škodnih vzrokov oziroma dejavnikov, izračunali verjetnosti preživetja in smrti iz tablic smrtnosti, si pogledali povezavo med škodnimi vzroki in obravnavali povezavo z modelom z enim vzrokom. Vsebina je povzeta po [1, 8].

5.1 Osnovni model

Modeli, kjer imamo več škodnih vzrokov, so nadgradnja modelov z enim. Do škode pa pride zaradi enega izmed teh dejavnikov. Poglejmo si bolj podrobno takšen model. Imamo torej m različnih škodnih vzrokov police na skupini ljudi. Te vzroke lahko imenujemo tudi dejavniki prekinitve, saj zmanjšujejo število zavarovancev, ki imajo še veljavno zavarovanje. Pri riziku življenjskem zavarovanju imamo le en dejavnik, zaradi katerega lahko pride do izplačila zavarovalne vsote, to je smrt. Obravnavali pa bomo zavarovanje, kjer imamo teh dejavnikov več in zato se to področje v aktuarski matematiki imenuje "multiple decrement theory" oziroma v prevodu teorija več škodnih vzrokov.

5.1.1 Tablice smrtnosti

Pomemben faktor v izračunu premij sta verjetnost preživetja in smrtnosti, zato bomo obravnavali te količine tudi pri zavarovanjih, kjer imamo več vzrokov.
Ponavadi imamo podane tablice smrtnosti za en škodni vzrok, zanima pa nas kakšne so, če jih združimo za več vzrokov. Škodne vzroke bomo oštevilčili z 1 do m in uporabili oznako (j), kjer se bomo sklicevali na vzrok j. Prav tako bomo uporabljali oznako (τ), kar bo pomenilo vse vzroke skupaj. Izberemo si poljubno število oseb starosti 0, ki jih označimo z $l_0^{(\tau)}$. Tako nam $l_x^{(\tau)}$ predstavlja število oseb, ki bodo še živele v starosti x. To je seveda pod pogojem, da ne bodo podlegle kateremu izmed m vzrokov. Naj bo $d_x^{(j)}$ število oseb, ki bodo podlegle vzroku (j) med letoma x in $x+1$. Velja formula

$$d_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} d_x^{(j)}.$$

Formula predstavlja število vseh oseb, ki bodo podlegla vsem dejavnikom med letoma x in $x+1$. Iz tega sledi

$$l_{x+1}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} - d_x^{(\tau)},$$

kar pomeni, da je število preživelih v letu $x+1$ enako številu preživelih leta x, ki jim odštejemo vse tiste, ki so umrli med letoma x in $x+1$.

Poglejmo si preprost primer z dvema vzrokoma.

Zgled. Opazujemo obdobje dveh let, kjer imamo dva škodna vzroka. V prvem primeru pride do nezgodne smrti $d_x^{(1)}$ in v drugem primeru zaradi naravne smrti $d_x^{(2)}$.

x	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$
0	2000	150	50
1	1800	180	60
2	1560	200	70

Zelo pomembno je, da pravilno razvrstimo osebe k pravilnemu škodnemu vzroku. To pomeni, da če je škodni vzrok invalidnost, se zavarovanje prekine in je izplačana škoda zaradi invalidnosti. Pomembno je torej, kateri vzrok nastopi prvi. Tudi če oseba umre za tem, ko postane invalidna, na naše izračune to več nima vpliva.

Pri izračunu oseb, ki umrejo, smo definirali začetek s starostjo 0 in konec s 101, lahko pa bi bilo katerokoli poljubno leto, odvisno od vzrokov in situacije.

Poglejmo si količine, ki so izračunane iz tablic smrtnosti in so pomembne za izračun premije.

Definicija 5.1 *Vrednost* $q_x^{(j)}$ *je verjetnost, da bo prišlo do škodnega primera police za osebo* (x) *v času* x *do* $x+1$ *zaradi vzroka* j *. Za vsak* $j \in \mathbb{N}$ *se izračuna*

$$q_x^{(j)} = \frac{d_x^{(j)}}{l_x^{(\tau)}}.$$

V praksi se najprej izračunajo te verjetnosti, nato pa se zgradijo tablice smrtnosti za model z več dejavniki. Tako dobimo:

$$q_x^{(\tau)} = \frac{d_x^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{d_x^{(j)}}{l_x^{(\tau)}} = \sum_{j=1}^{m} q_x^{(j)}.$$

Podobno definiramo verjetnost preživetja.

Definicija 5.2 *Vrednost* $p_x^{(j)}$ *je verjetnost, da oseba v času* x *do* $x+1$ *ne bo podlegla škodnemu vzroku* (j)*:*

$$p_x^{(j)} = 1 - q_x^{(j)}.$$

Izračunajmo sedaj verjetnost, da oseba v času x do $x+1$ ne bo podlegla škodnemu vzroku.

$$p_x^{(\tau)} = 1 - q_x^{(\tau)} = 1 - \frac{d_x^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} = \frac{l_x^{(\tau)} - d_x^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} = \frac{l_{x+1}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}.$$

Definicija 5.3 *Naj bo*

$${}_k p_x^{(\tau)} = \frac{l_{x+k}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}$$

verjetnost, da bo oseba (x) *preživela do leta* $x+k$*.*

Definicija 5.4 *Naj bo*

$${}_n q_x^{(j)} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} d_{x+k}^{(j)}}{l_x^{(\tau)}}$$

verjetnost, da bo oseba (x) *podlegla vzroku* j *v roku* n *let.*

Lema 5.5 *Količina* ${}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)}$ *je verjetnost, da oseba* (x) *preživi* k*-to leto in nato podleže vzroku* (j) *v letu* $x+k$ *do* $x+k+1$*. Velja*

$$\frac{d_{x+k}^{(j)}}{l_x^{(\tau)}} = {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)}. \tag{5.1}$$

Dokaz. Za vsak j velja

$$
{}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)} = \frac{l_{x+k}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} \frac{d_{x+k}^{(j)}}{l_{x+k}^{(\tau)}} = \frac{d_{x+k}^{(j)}}{l_x^{(\tau)}}.
$$

□

Količina, ki nas zanima, je tudi

$$
l_x^{(j)} = \sum_{k=0}^{n} d_{x+k}^{(j)}.
$$

Formula izračuna število ljudi v opazovani skupini, ki bodo podlegli vzroku (j) med letoma x in $x+n$. V našem modelu predvidevamo, da bo enkrat vsak podlegel nekemu vzroku, kar je očitno, saj je smrt eden izmed vzrokov. Velja torej

$$
l_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} l_x^{(j)}.
$$

Če poznamo $l_x^{(j)}$ za vse x in j, ki sta celi števili, lahko končamo našo tabelo, saj velja

$$
d_x^{(j)} = l_x^{(j)} - l_{x+n}^{(j)}.
$$

Torej

$$
{}_n q_x^{(j)} = \frac{l_x^{(j)} - l_{x+n}^{(j)}}{l_x^{(\tau)}}.
$$

Definirajmo

$$
{}_n p_x^{(j)} = \frac{l_{x+n}^{(j)}}{l_x^{(\tau)}},
$$

kar je verjetnost, da bo oseba (x) doživela enega izmed škodnih vzrokov po letu n. ${}_n p$ predstavlja preživetje do časa n, ekvivalentno pa pomeni tudi, da oseba podleže vzroku po času n.

5.2 Izračun premije

Tudi v primeru, kjer imamo več škodnih vzrokov, nas zanima kako se izračuna premija. Izračun je zelo podoben tistemu z enim škodnim vzrokom. Poglejmo si polico za (x), ki velja samo za vzrok (j). Za to polico so definirana izplačila $b_k^{(j)}$, če oseba umre v času od k

do $k+1$ zaradi vzroka (j). Izračuni so enaki kot v primeru (4.1), le da uporabimo formule iz (5.1).

Definicija 5.6 *Premijo j-te police definiramo kot*

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(j)} v^k \frac{d_{x+k}^{(j)}}{l_x^{(\tau)}} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(j)} v^k {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)}.$$

Celotno vrednost pa dobimo tako, da seštejemo po vseh vrednostih j, torej po vseh škodnih vzrokih.

Primer izračuna bo predstavljen v praktičnem poglavju magistrskega dela.

Tudi v primeru več škodnih vzrokov nas zanima količina jakost smrtnosti. Podobno kot smo jo definirali za en vzrok, jo sedaj še za več vzrokov.

Definicija 5.7 *Jakost smrtnosti x leta stare osebe v starosti $x+t$ za škodni vzrok (j) definiramo*

$$\mu_{x+t}^{(j)} = \frac{g(t)^{(j)}}{1-G(t)}.$$

V aktuarski matematiki jakost smrtnosti predstavlja takojšnjo stopnjo umrljivosti, merjeno letno. Stopnja umrljivosti pa predstavlja ravno število smrti v določeni populaciji, kar pomeni število umrlih prebivalcev na število vseh prebivalcev, ki so iste starosti.

Trditev 5.8 *Jakost smrtnosti x leta stare osebe v starosti $x+t$ s pomočjo verjetnosti ${}_t p_x^{(j)}$ izračunamo kot*

$$\mu_{x+t}^{(j)} = -\frac{d}{dt} \ln {}_t p_x^{(j)}.$$

Lema 5.9 *Verjetnost, da bo oseba umrla v naslednjih t letih zaradi vzroka (j) je enaka*

$${}_t q_x^{(j)} = \int_0^t {}_s p_x^{(\tau)} \mu_{x+s}^{(j)} ds. \tag{5.2}$$

Dokaz. Po definiciji $\mu^{(j)}$ velja formula

$$\mu_{x+t}^{(j)} = \frac{g(t)^{(j)}}{1-G(t)} = \frac{g(t)^{(j)}}{{}_t p_x^{(\tau)}}.$$

Izrazimo $g(t)^{(j)}$ in dobimo

$$g(t)^{(j)} = \mu^{(j)}_{x+t} \cdot {}_tp^{(\tau)}_x.$$

Uporabimo $g(t)^{(j)} = G'(t)^{(j)} = {}_tq'^{(j)}_x$ in dobimo ravno želeno enakost

$${}_tq^{(j)}_x = \int_0^t {}_sp^{(\tau)}_x \mu^{(j)}_{x+s} ds.$$

□

Lema 5.10 *Za jakost smrtnosti več škodnih vzrokov velja formula*

$$\mu^{(\tau)}_{x+t} = \sum_{j=1}^{m} \mu^{(j)}_{x+t}.$$

Dokaz. Po definiciji $\mu^{(j)}$ velja formula

$$\mu^{(j)}_{x+t} = \frac{g(t)^{(j)}}{1 - G(t)} = \frac{g(t)^{(j)}}{{}_tp^{(\tau)}_x}.$$

Iz tega sledi

$$\sum_{j=1}^{m} \mu^{(j)}_{x+t} = \sum_{j=1}^{m} \frac{g(t)^{(j)}}{{}_tp^{(\tau)}_x} = \frac{g(t)^{(\tau)}}{{}_tp^{(\tau)}_x} = \mu^{(\tau)}_{x+t}.$$

□

S pomočjo jakosti smrtnosti pa izračunamo premijo zaradi škodnega vzroka (j). Neto sedanjo vrednost police zaradi škodnega vzroka (j) izračunamoo s formulo

$$A = \int_0^\infty c^{(j)} v^t {}_tp^{(\tau)}_x \mu^{(j)}_{x+t} dt,$$

kjer je $c^{(j)}$ izplačilo zaradi vzroka (j).

Če seštejemo formulo za vse škodne vzroke, dobimo

$$\bar{A} = \sum_{j=1}^{m} \int_0^\infty c^{(j)} v^t {}_tp^{(\tau)}_x \mu^{(j)}_{x+t} dt.$$

Definirajmo še uteženo povprečje.

Definicija 5.11 *Uteženo povprečje jakosti smrtnosti med letoma x in $x+1$ definiramo z formulo*

$$m_x = \frac{\int_0^1 {}_tp_x \mu_{x+t} dt}{\int_0^1 {}_tp_x dt}.$$

Podobno imamo formulo za en škodni vzrok

$$m_x^{(j)} = \frac{\int_0^1 {}_tp_x^{(j)} \mu_{x+t}^{(j)} dt}{\int_0^1 {}_tp_x^{(j)} dt}$$

in za vse škodne vzroke

$$m_x^{(\tau)} = \frac{\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(\tau)} dt}{\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)} dt}.$$

5.3 Povezava z modelom z enim vzrokom

Težji del teorije več dejavnikov se ukvarja s povezavami med različnimi dejavniki, od katerih je odvisen škodni dogodek.

Poglejmo si primer za lažje razumevanje. Imamo stroj, ki je sestavljen iz dveh komponent: dela 1 in dela 2. Dela delujeta neodvisno eden od drugega. Če želimo, da stroj deluje, morata delovati oba dela. Torej če del 1 ne deluje, stroj ne bo deloval, kljub temu, da del 2 deluje brezhibno. Predpostavimo tudi, da ne moreta oba dela hkrati prenehati delovati. Recimo, da želimo izračunati verjetnost, da bo del nehal delovati za neko obdobje, recimo eno leto. Imamo štiri količine, ki nas zanimajo. Za $j = 1, 2$, naj bo $q'^{(j)}$ verjetnost, da se bo del j pokvaril in naj bo $q^{(j)}$ verjetnost, da bo stroj odpovedal zaradi okvare dela j, kar pomeni da bo v opazovanem obdobju enega leta del j prvi odpovedal. Kakšno je razmerje med tema dvema količinama oziroma verjetnostima? Ker odpoved stroja zaradi dela j dejansko pomeni, da je odpovedal del j, velja

$$q'^{(j)} \geq q^{(j)}$$

Očitno je tudi, da količini nista enaki. Recimo, da enkrat v letu del 1 odpove, zato odpove tudi stroj in nato odpove še del 2. Torej bi se dogodek, da odpove del 2 zgodil, vendar ne bi povzročil okvare stroja (torej $q'^{(2)} > q^{(2)}$).

Definirajmo še dodatne količine, povezane s tema dvema verjetnostima. Naj bo $p'^{(j)} = 1 - q'^{(j)}$ verjetnost, da bo del j delal konec leta, $q^{(\tau)}$ verjetnost, da se bo stroj pokvaril v roku enega leta in $p^{(\tau)} = 1 - q^{(\tau)}$ verjetnost, da bo stroj eno leto brezhibno deloval. Stroj se lahko pokvari v dveh različnih scenarijih. Prvi je, da odpove del 1 in drugi, da odpove del 2. Velja

$$q^{(\tau)} = q^{(1)} + q^{(2)}.$$

Po drugi strani, pa morata delovati oba dela, če želimo da stroj na koncu opazovanega obdobja deluje. Ker sta dela drug od drugega neodvisna, lahko množimo verjetnosti in dobimo

$$p^{(\tau)} = p'^{(1)}p'^{(2)}.$$

Iz zgornjih dveh enačb, tako dobimo enakost

$$q^{(1)} + q^{(2)} = 1 - p'^{(1)}p'^{(2)},$$

ki jo zapišemo v obliki

$$q^{(1)} + q^{(2)} = q'^{(1)} + q'^{(2)} - q'^{(1)}q'^{(2)}.$$

Ker pa ne moremo direktno izračunati q' iz q in obratno, potrebujemo dodatne količine in definicije. Z metodo v nadaljevanju bomo poiskali možne rešitve in pogoje, ki vodijo k njim.

Poglejmo si model z dvema vzrokoma, prvi je smrt in drugi invalidnost. Recimo, da želimo uporabiti model samo za en vzrok, to je smrt. Zanima nas, kakšna je verjetnost za smrt v starosti (x), kar označimo z $q_x'^{(1)}$. To zagotovo ni vrednost $q_x^{(1)}$, saj je to ravno verjetnost, da bo (x) umrl v roku enega leta preden bo nastopila invalidnost. Velja $q_x'^{(1)} > q_x^{(1)}$. Situacija je podobna primeru stroja. Oseba lahko umre v istem letu, kot je nastopila invalidnost. Verjetnost za smrtnost za (x) v modelu z enim vzrokom je enaka $q_x'^{(1)}$. Izračunati želimo tudi $q_x'^{(2)}$, kar je ravno verjetnost, da bo (x) podlegel invalidnosti v roku enega leta, pri tem pa predpostavimo, da ni prišlo do škodnega primera zaradi drugih vzrokov. Predstavljati si je potrebno vzrok invalidnosti neodvisno od vzroka smrti. To pomeni, da se lahko nadaljuje tudi po smrti. Za vsak vzrok j, je seznam vrednosti $q_x'^{j}$ za različne vrednosti x definiran kot pripadajoč model za vzrok j. Te vrednosti nam dajo verjetnosti škodnega primera za določen vzrok j, kjer predvidevamo, da še ni prišlo do škodnega primera zaradi kakršnegakoli drugega vzroka. Problem se lahko pojavi pri prehajanju iz $\{q_x^{(1)}, q_x^{(2)}\}$ v $\{q_x'^{(1)}, q_x'^{(2)}\}$ in obratno. Model z več vzroki lahko sestavimo z uporabo modelov z enim vzrokom.

Za vsak vzrok (j) v modelu z več vzroki lahko naredimo model z enim vzrokom, ki je neodvisen od drugih. V vsakem modelu se prikazuje skupina ljudi, ki se manjša le zaradi enega vzroka. Verjetnosti v modelih z enim vzrokom bomo imenovali neto verjetnosti, ker so neodvisne od drugih vzrokov in lahko pride do prekinitve le zaradi enega škodnega vzroka. To pomeni, da je v modelu z enim vzrokom verjetnost, da oseba umre zaradi vzroka (j) med letoma x in $x+t$ ravno ${}_tq_x'^{(j)}$. Očitno je, da velja

$$ {}_tq_x'^{(j)} \geq {}_tq_x^{(j)}, $$

ker v modelu z večimi vzroki lahko pride do škode še zaradi drugih škodnih vzrokov.

Zanima nas, kako izračunamo $q_x'^{(1)}, q_x'^{(2)}, \ldots, q_x'^{(m)}$, kjer imamo podane $q_x^{(1)}, q_x^{(2)}, \ldots, q_x^{(m)}$ in obratno.
Osnovna povezava je

$$ \mu_{x+t}^{(j)} = \mu_{x+t}'^{(j)} \text{ za vse } j = 1, 2, \ldots, m. \tag{5.3} $$

Ta enakost velja, saj predstavlja $\mu_{x+t}^{(j)}$ ravno verjetnost, da ne bo prišlo do nobenega vzroka, vključno z vzrokom (j). Kar pomeni, da velja enaka verjetnost v modelu z enim vzrokom, saj tudi tam ne bo prišlo do škode zaradi vzroka (j). Veljata tudi enakosti

$$ e^{-\int_0^t \mu_{x+s}^{(\tau)} ds} = {}_tp_x^{(\tau)} = {}_tp_x'^{(1)} \cdot {}_tp_x'^{(2)} \cdots {}_tp_x'^{(m)} $$

in

$$ \begin{aligned} {}_tq_x^{(j)} &= \int_0^t {}_sp_x^{(\tau)} \mu_{x+s}^{(j)} ds \\ &= \int_0^t {}_sp_x^{(\tau)} \mu_{x+s}'^{(j)} ds \\ &= \int_0^t \frac{{}_sp_x^{(\tau)}}{{}_sp_x'^{(j)}} {}_sp_x'^{(j)} \mu_{x+s}'^{(j)} ds. \end{aligned} $$

Če predpostavimo, da so vzroki enakomerno porazdeljeni v vsakem modelu, sledi izrek.

Izrek 5.12 *Za vsak* $x \in \mathbb{N}$, $0 < t < 1$ *in* $j = 1, 2, \ldots, m$ *velja*

$$ {}_tp_x'^{(j)} = (1 - tq_x^{(\tau)})^{\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}}. $$

Dokaz. Ker so vsi vzroki enakomerno porazdeljeni, velja ${}_tq_x^{(j)} = tq_x^{(j)}$. Iz tega sledi ${}_tq_x^{(\tau)} = tq_x^{(\tau)}$ Iz (5.2) izrazimo jakost smrtnosti in dobimo

$$ \mu_{x+t}^{(j)} = \frac{\frac{d}{dt} {}_tq_x^{(j)}}{{}_tp_x^{(\tau)}} = \frac{\frac{d}{dt} {}_tq_x^{(j)}}{1 - tq_x^{(\tau)}}. $$

Izrazimo sedaj ${}_tp_x'^{(j)}$ z jakostjo smrtnosti modela z enim vzrokom.

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x'^{(j)} &= e^{-\int_0^t \mu_{x+s}'^{(j)} ds} = e^{-\int_0^t \frac{\frac{d}{ds} q_x^{(j)}}{1 - sq_x^{(\tau)}} ds} \\
&= e^{-q_x^{(j)} \int_0^t \frac{1}{1-sq_x^{(\tau)}} ds} = e^{-\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}} \ln(1-sq_x^{(\tau)}) \Big|_0^t} \\
&= e^{-\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}} \ln(1-tq_x^{(\tau)})} = (1 - tq_x^{(\tau)})^{\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}}.
\end{aligned}
$$

□

Posledica 5.13 *Velja formula*

$$
q_x'^{(j)} = 1 - (1 - q_x^{(\tau)})^{\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}}.
$$

Poglejmo si še primer za model z enim vzrokom. Spet velja osnovna povezava (5.3). Ker so vsi vzroki enakomerno porazdeljeni, velja ${}_tq_x'^{(j)} = tq_x'^{(j)}$. Iz formule (5.2) sledi

$$
{}_tp_x'^{(j)} \mu_{x+t}'^{(j)} = {}_tp_x'^{(j)} \mu_{x+t}^{(j)} = \frac{d}{dt} {}_tq_x'^{(j)}.
$$

Izrek 5.14 *Za vsak $x \in \mathbb{N}$, $< 0 < t < 1$ in $j = 1, 2, \ldots, m$ velja*

$$
{}_tq_x^{(j)} = q_x'^{(j)} \int_0^t \prod_{i \neq j} (1 - sq_x'^{(i)}) ds.
$$

Dokaz. Če uporabimo formulo pred izrekom, za vsaj j velja

$$
\begin{aligned}
{}_tq_x^{(j)} &= \int_0^t {}_sp_x^{(\tau)} \mu_{x+s}^{(j)} ds = \int_0^t e^{-\int_0^t \mu_{x+s}^{(\tau)} ds} \mu_{x+s}'^{(j)} ds \\
&= \int_0^t {}_sp_x'^{(1)} {}_sp_x'^{(2)} \cdots {}_sp_x'^{(m)} \mu_{x+s}'^{(j)} ds = \int_0^t \prod_{i \neq j} {}_sp_x'^{(i)} {}_sp_x'^{(j)} \mu_{x+s}^{(j)} ds \\
&= q_x'^{(j)} \int_0^t \prod_{i \neq j} (1 - sq_x'^{(i)}) ds.
\end{aligned}
$$

□

Poglejmo si primer z dvema vzrokoma v splošnem.

Zgled. Naj bo $m = 2$, izračunajmo ${}_tq_x^{(1)}$ in ${}_tq_x^{(2)}$:

$$
\begin{aligned}
{}_tq_x^{(1)} &= q_x'^{(1)} \int_0^t (1 - sq_x'^{(2)})ds = q_x'^{(1)}(t - \frac{1}{2}t^2 q_x'^{(2)}) \\
{}_tq_x^{(2)} &= q_x'^{(2)}(t - \frac{1}{2}t^2 q_x'^{(1)}).
\end{aligned}
$$

Poglavje 6

Praktični del

V drugem delu magistrskega dela bomo obravnavali izračune premije zavarovanja za različne dejavnike. Pogledali bomo kako v praksi različne predpostavke vplivajo na višino premije in kako se premija spreminja glede na dodajanje škodnih vzrokov k zavarovanju. Pogledali si bomo življenjsko zavarovanje za primer smrti oziroma riziko zavarovanje, zavarovanje za smrt v primeru kapi, raka in infarkta, zavarovanje za doživetje in mešano življenjsko zavarovanje. Nato bomo zgenerirali 1.000 polic življenjskega zavarovanja in za njih izračunali enkratno neto premijo. Celotno premijo bomo nato primerjali z neto premijo, ki jo za te police izračuna programsko orodje za modeliranje življenjskih zavarovanj.

6.1 Riziko zavarovanje

Poglejmo si najprej izračun premije za življenjsko zavarovanje za primer smrti za obdobje n let oziroma riziko življenjsko zavarovanje. Zavarovanje je opisano v poglavju 4.6.1, za izračun premije pa uporabimo formulo (4.7):

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_kp_x q_{x+k}.$$

Da lahko izračunamo premijo, potrebujemo vhodne oziroma začetne podatke:

- tablice smrtnosti iz katerih preberemo verjetnosti preživetja p_x in smrti q_x; uporabljene so tablice za Slovenijo iz leta 2007, SLOUNISEX_2007, izračunane v poglavju 3.5,
- trajanje zavarovanja, ki bo v našem izračunu določeno na 10 let,

- zavarovalna vsota,
- efektivna letna obrestna mera i, ki bo določena na $i = 0,0275$ in iz katere bomo izračunali diskontni faktor v,
- starost zavarovanca (osebe, ki sklepa zavarovanje).

Poglejmo si najprej izračun premije za osebo staro 40 let za zavarovalno vsoto 100.000 EUR. Izračunati je potrebno verjetnost preživetja po n letih, ${}_np_x$. Uporabimo formulo (3.4):

$$ {}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = p_x p_{x+1} \cdots p_{x+n-1}. $$

Tako dobimo tabelo 6.1, kjer imamo vse podatke za izračun premije.

k	starost	p_x	q_x	v^{k+1}	${}_kp_x$
0	40	0,99845	0,00155	0,97324	1,00000
1	41	0,99830	0,00170	0,94719	0,99845
2	42	0,99816	0,00184	0,92184	0,99675
3	43	0,99796	0,00204	0,89717	0,99491
4	44	0,99770	0,00230	0,87315	0,99288
5	45	0,99741	0,00259	0,84978	0,99059
6	46	0,99707	0,00293	0,82704	0,98803
7	47	0,99669	0,00331	0,80491	0,98514
8	48	0,99630	0,00370	0,78336	0,98188
9	49	0,99592	0,00408	0,76240	0,97824

Tabela 6.1: Vhodni podatki za izračun riziko premije

Prvi stolpec nam predstavlja leto zavarovanja, drugi starost zavarovanca, tretji in četrti stolpec preberemo iz tablic smrtnost, v petem stolpcu imamo ustrezno potenciran diskontni faktor, podatke v šestem stolpcu pa izračunamo s formulo (3.4). Podatke dobimo v tabeli 6.2.

k	starost	p_x	q_x	v^{k+1}	${}_kp_x$	Členi vsote A
0	40	0,99845	0,00155	0,97324	1,00000	0,00151
1	41	0,99830	0,00170	0,94719	0,99845	0,00161
2	42	0,99816	0,00184	0,92184	0,99675	0,00169
3	43	0,99796	0,00204	0,89717	0,99491	0,00182
4	44	0,99770	0,00230	0,87315	0,99288	0,00199
5	45	0,99741	0,00259	0,84978	0,99059	0,00218
6	46	0,99707	0,00293	0,82704	0,98803	0,00239
7	47	0,99669	0,00331	0,80491	0,98514	0,00262
8	48	0,99630	0,00370	0,78336	0,98188	0,00285
9	49	0,99592	0,00408	0,76240	0,97824	0,00305

Tabela 6.2: Izračun riziko enkratne neto premije

V tabelo smo dodali še sedmi stolpec, ki nam predstavlja člene vsote v formuli za izračun premije. Ko člene seštejemo in pomnožimo vsoto z zavarovalno vsoto, dobimo ravno enkratno neto premijo:

$$A^1_{40:\overline{10}|} = ZV \cdot \sum_{k=0}^{9} v^{k+1} {}_kp_{40} q_{40+k} = 100.000 \cdot 0,0217204 = 2.172,04.$$

Izračunali smo enkratno neto premijo, ker pa se premija zavarovanja plačuje bolj pogosto kot enkratno, pa izračunajmo še letno neto premijo. Uporabimo formulo (4.19):

$$P^1_{40:\overline{10}|} = \frac{A^1_{40:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{10}|}}.$$

Izračunati moramo torej $\ddot{a}_{40:\overline{10}|}$, za kar uporabimo formulo (4.17):

$$\ddot{a}_{40:\overline{10}|} = \sum_{k=0}^{9} v^k {}_kp_{40}.$$

Tako dodamo v tabelo 6.3 še osmi stolpec, kjer izračunamo člene zgornje vsote.

Letna neto premija je tako enaka

$$P^1_{40:\overline{10}|} = \frac{2.172,04}{8,80} = 246,83.$$

Če želimo izračunati bruto premijo, pa moramo izračunati tudi stroškovni del premije. Stroškovna premija je sestavljena iz treh komponent, zato potrebujemo α, β in γ. Naši

k	starost	p_x	q_x	v^{k+1}	$_kp_x$	Členi vsote A	Členi vsote a
0	40	0,99845	0,00155	0,97324	1,00000	0,00151	1,00000
1	41	0,99830	0,00170	0,94719	0,99845	0,00161	0,97173
2	42	0,99816	0,00184	0,92184	0,99675	0,00169	0,94411
3	43	0,99796	0,00204	0,89717	0,99491	0,00182	0,91715
4	44	0,99770	0,00230	0,87315	0,99288	0,00199	0,89078
5	45	0,99741	0,00259	0,84978	0,99059	0,00218	0,86494
6	46	0,99707	0,00293	0,82704	0,98803	0,00239	0,83961
7	47	0,99669	0,00331	0,80491	0,98514	0,00262	0,81475
8	48	0,99630	0,00370	0,78336	0,98188	0,00285	0,79032
9	49	0,99592	0,00408	0,76240	0,97824	0,00305	0,76632

Tabela 6.3: Izračun riziko letne neto premije

podatki so $\alpha = 0,014$, kar predstavlja $1,4\%$ zavarovalne vsote, $\beta = 0,073$ oziroma $7,3\%$ premije in $\gamma = 0,001$ oziroma $0,1\%$ zavarovalne vsote za vsako leto zavarovanja.

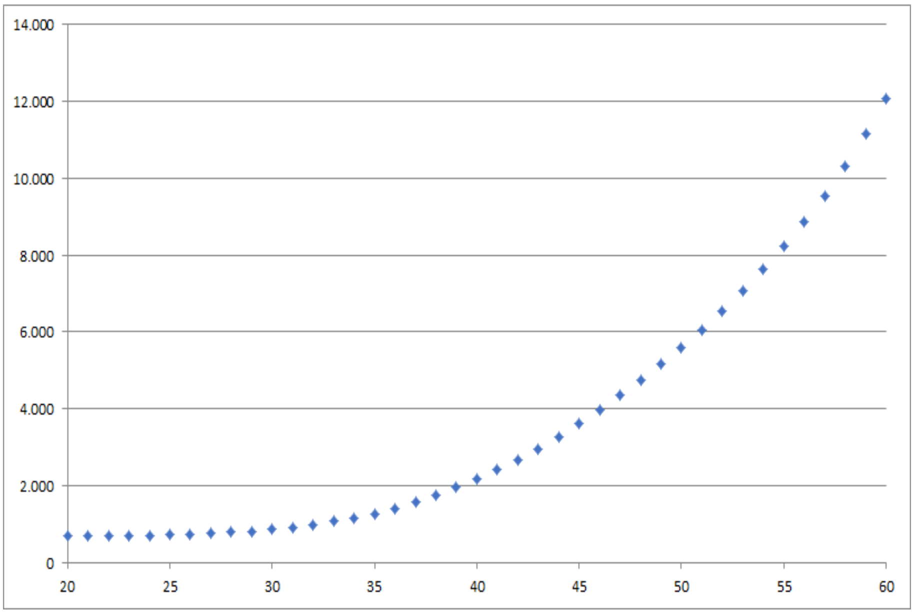
Uporabimo formuli (4.22) in $d = \frac{i}{1+i}$, da dobimo

$$P^a_{40:\overline{10}|} = 270,00.$$

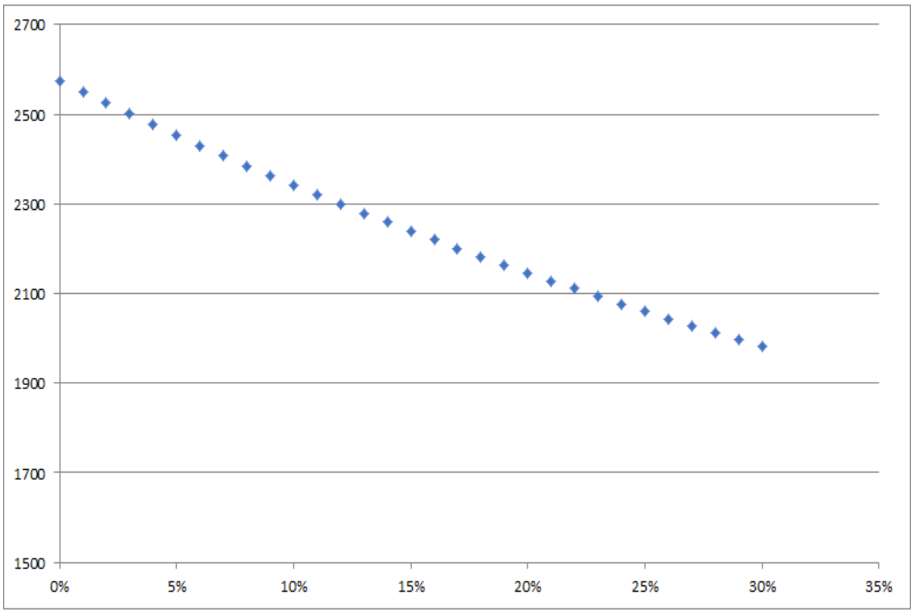
Izračun predstavlja ravno letni znesek, ki ga mora oseba plačevati za opisano zavarovanje.

Trije pomembni dejavniki, ki vplivajo na izračun premije so starost osebe, obrestna mera in zavarovalna vsota. Poglejmo si na treh grafih, ki so prikazanih na slikah 6.1, 6.2 in 6.3, kako je enkratna neto premija odvisna od le-teh.

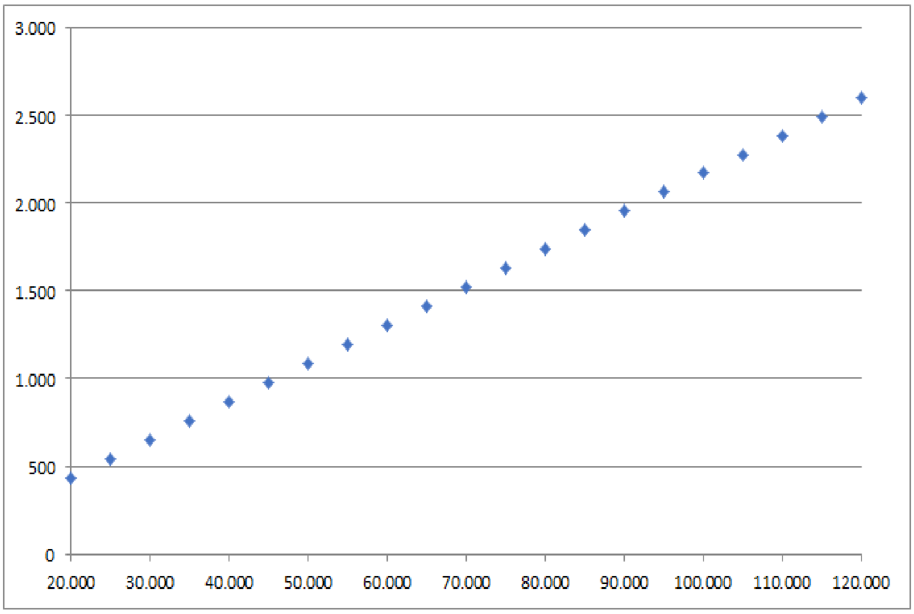
Rezultat je očiten. Vidimo, da se z višanjem zavarovalne vsote viša tudi premija, saj formulo za izračun le-te pomnožimo z ustrezno zavarovalno vsoto. Starejša kot je oseba, višje vrednosti za q_x so v tablicah smrtnosti, zato tudi s starostjo premija narašča. Z višanjem obrestne mere pa se premija manjša, saj lahko zavarovalnica bolje obrestuje že vplačane premije.



Slika 6.1: Odvisnost od starosti



Slika 6.2: Odvisnost od obrestne mere



Slika 6.3: Odvisnost od zavarovalne vsote

6.2 Zavarovanje za smrt v primeru več dejavnikov

V tem poglavju bomo izračunali premijo za življenjsko zavarovanje v primeru smrti, vendar bomo upoštevali le določene dejavnike. Najprej bomo izračunali premijo v primeru smrti zaradi raka, nato kapi in na koncu v primeru infarkta. Nato bomo izračunali premijo v primeru zavarovanja za dve in posebej za tri hujše bolezni in pogledali ali je bolje zavarovati vsak vzrok smrti posebej ali skupaj. Tudi v tem primeru bomo za izračun premije uporabili formulo (4.7), vendar bomo tokrat uporabili različne tablice. Imeli bomo trojne različne tablice. Ene za kap, ene za raka in ene za infarkt. Nato bomo te tri tablice združili v ene, ki jih bomo uporabili za izračun premije v primeru vseh treh dejavnikov. Upoštevali bomo tudi dva primera izračuna, v prvem bodo dogodki nezdružljivi in v drugem primeru bodo združljivi. Od tega bo odvisno, kako bodo izračunane verjetnosti v tablicah.

Poglejmo si najprej primer zavarovanja za smrt v primeru kapi.

Tudi v tem primeru potrebujemo vhodne oziroma začetne podatke, da lahko izračunamo premijo:

- tablice smrtnosti iz katerih preberemo verjetnosti preživetja p_x in smrti q_x; uporabljene so tablice 2007_*kap*, ki smo jih dobili tako, da smo slovenske tablice SLOUNISEX_2007 pomnožili z $0,3$,
- trajanje zavarovanja, ki bo v vseh naših izračunih določeno na 10 let,

- zavarovalna vsota, ki bo v našem primeru določena na 100.000 EUR,
- tehnična obrestna mera i, ki bo določena na $i = 0,0275$ in iz katere bomo izračunali diskontni faktor v,
- starost zavarovanca, ki bo v našem primeru 40 let.

Kot v prejšnjem poglavju, izračunamo ${}_np_x$ in člene vsote. Tako dobimo podatke v tabeli 6.4.

k	starost	p_x	q_x	v^{k+1}	${}_kp_x$	Členi vsote A
0	40	0,99954	0,00047	0,97324	1,00000	0,00045
1	41	0,99949	0,00051	0,94719	0,99954	0,00048
2	42	0,99945	0,00055	0,92184	0,99902	0,00051
3	43	0,99939	0,00061	0,89717	0,99847	0,00055
4	44	0,99931	0,00069	0,87315	0,99786	0,00060
5	45	0,99922	0,00078	0,84978	0,99717	0,00066
6	46	0,99912	0,00088	0,82704	0,99640	0,00072
7	47	0,99901	0,00099	0,80491	0,99552	0,00080
8	48	0,99889	0,00111	0,78336	0,99453	0,00086
9	49	0,99877	0,00123	0,76240	0,99343	0,00093

Tabela 6.4: Izračun neto premije za kap

Podobno kot v prejšnjih izračunih člene seštejemo in pomnožimo vsoto z zavarovalno vsoto. Dobimo ravno enkratno neto premijo:

$$A^1_{40:\overline{10|}} = ZV \cdot \sum_{k=0}^{9} v^{k+1}{}_kp_{40}q_{40+k} = 100.000 \cdot 0,0065667 = 656,67.$$

Torej znaša enkratna neto premija 656,67 EUR. Izračunati želimo še letno neto premijo, za kar uporabimo formulo (4.19). V tabeli 6.5 tako dobimo še osmi stolpec.

k	starost	p_x	q_x	v^{k+1}	${}_kp_x$	Členi vsote A	Členi vsote a
0	40	0,99954	0,00047	0,97324	1,00000	0,00045	1,00000
1	41	0,99949	0,00051	0,94719	0,99954	0,00048	0,97278
2	42	0,99945	0,00055	0,92184	0,99902	0,00051	0,94626
3	43	0,99939	0,00061	0,89717	0,99847	0,00055	0,92043
4	44	0,99931	0,00069	0,87315	0,99786	0,00060	0,89525
5	45	0,99922	0,00078	0,84978	0,99717	0,00066	0,87068
6	46	0,99912	0,00088	0,82704	0,99640	0,00072	0,84672
7	47	0,99901	0,00099	0,80491	0,99552	0,00080	0,82334
8	48	0,99889	0,00111	0,78336	0,99453	0,00086	0,80051
9	49	0,99877	0,00123	0,76240	0,99343	0,00093	0,77822

Tabela 6.5: Izračun letne neto premije za kap

Tako dobimo vsoto $\ddot{a}_{40:\overline{10}|} = 8,85$ in izračunamo premijo

$$P^1_{40:\overline{10}|} = \frac{A^1_{40:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{10}|}} = \frac{656,67}{8,85} = 74,16.$$

Za izračun bruto premije, moramo izračunati še stroškovni del premije, za kar uporabimo formuli (4.22) in $d = \frac{i}{1+i}$:

$$P^a_{40:\overline{10}|} = 81,13.$$

Poglejmo si še primer zavarovanja za smrt v primeru raka.

Tudi v tem primeru potrebujemo vhodne oziroma začetne podatke, da lahko izračunamo premijo. Začetni podatki bodo enaki, spremenile se bodo le tablice, ki bodo tokrat 2007_rak, ki smo jih dobili tako, da smo slovenske tablice SLOUNISEX_2007 pomnožili z $0,15$.

Kot v prejšnjem primeru izračunamo ${}_np_x$ in člene vsote. Izračunamo enkratno neto premijo in nato še letno in bruto premijo:

$$A^1_{40:\overline{10}|} = ZV \cdot \sum_{k=0}^{9} v^{k+1}{}_kp_{40}q_{40+k} = 100.000 \cdot 0,0032887 = 328,87,$$

$$P^1_{40:\overline{10}|} = \frac{A^1_{40:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{10}|}} = \frac{328,87}{8,87} = 37,09,$$

$$P^a_{40:\overline{10}|} = 40,58.$$

Poglejmo si še primer zavarovanja za smrt v primeru infarkta.

Tudi v tem primeru potrebujemo vhodne oziroma začetne podatke, da lahko izračunamo premijo. Začetni podatki bodo enaki, spremenile se bodo le tablice, ki bodo tokrat 2007_$infarkt$, ki smo jih dobili tako, da smo izračunali $q_{x-infarkt} = \frac{0{,}3 \cdot q_{x-rak} + 0{,}7 \cdot q_{x-kap}}{2}$.

Kot v prejšnjem primeru izračunamo $_kp_x$ in člene vsote. Izračunamo enkratno neto premijo in nato še letno in bruto premijo:

$$A^1_{40:\overline{10}|} = ZV \cdot \sum_{k=0}^{9} v^{k+1}{}_kp_{40}q_{40+k} = 100.000 \cdot 0,0033109 = 331,09,$$

$$P^1_{40:\overline{10}|} = \frac{A^1_{40:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{10}|}} = \frac{331,09}{9,98} = 33,19,$$

$$P^a_{40:\overline{10}|} = 36,31.$$

Sedaj si poglejmo primer zavarovanja za smrt v primeru kapi in raka.

Najprej moramo izračunati tablice smrtnosti, saj je to edini vhodni podatek, ki se spremeni. Ker sta kap in rak nezdružljiva dogodka, to pomeni, da se ne moreta oba zgoditi hkrati, izračunamo nove tablice smrtnosti tako, da seštejemo verjetnost, da bo oseba umrla zaradi raka in verjetnost, da bo oseba umrla zaradi kapi. Tako dobimo: $q_x = q_{x-kap} + q_{x-rak}$. Z novimi tablicami smrtnosti, podobno kot v prejšnjem poglavju, izračunamo $_np_x$ in člene vsote. Tako dobimo podatke v tabeli 6.6.

k	starost	p_x	q_x	v^{k+1}	$_kp_x$	Členi vsote A	Členi vsote a
0	40	0,99930	0,00070	0,97324	1,00000	0,00068	1,00000
1	41	0,99923	0,00077	0,94719	0,99930	0,00073	0,97256
2	42	0,99917	0,00083	0,92184	0,99854	0,00076	0,94580
3	43	0,99908	0,00092	0,89717	0,99771	0,00082	0,91972
4	44	0,99897	0,00104	0,87315	0,99679	0,00090	0,89429
5	45	0,99883	0,00117	0,84978	0,99576	0,00099	0,86945
6	46	0,99868	0,00132	0,82704	0,99460	0,00108	0,84519
7	47	0,99851	0,00149	0,80491	0,99329	0,00119	0,82149
8	48	0,99834	0,00167	0,78336	0,99181	0,00129	0,79831
9	49	0,99816	0,00184	0,76240	0,99016	0,00139	0,77565

Tabela 6.6: Izračun letne neto premije za kap in rak

Kot v prejšnjem primeru, izračunamo premije:

$$A^1_{40:\overline{10}|} = ZV \cdot \sum_{k=0}^{9} v^{k+1}{}_kp_{40}q_{x+40} = 100.000 \cdot 0,0098337 = 983,37,$$

$$P^1_{40:\overline{10}|} = \frac{A^1_{40:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{10}|}} = \frac{983,37}{8,84} = 111,21,$$

$$P^a_{40:\overline{10}|} = 121,65.$$

Če bi namesto ene sklenili dve zavarovanji, eno za smrt v primeru kapi in ena za smrt v primeru raka, bi skupna enkratna neto premija znašala $656,67 + 328,87 = 985,55$, kar je $2,17$ EUR več, kot če sklenemo samo eno zavarovanje.

Poglejmo, kaj bi se zgodilo z višino premije, če bi dodali še en dejavnik. Izračunajmo torej premijo za zavarovanje za smrt v primeru kapi, raka in infarkta.

Pri vhodnih podatkih pride do spremembe le pri tablicah smrtnosti, ostalo se ne spremeni. Tablice smrtnosti spet izračunamo tako, da seštejemo verjetnosti smrti za vse tri dejavnike, saj se ne morejo zgoditi hkrati, torej so nezdružljivi. Tako dobimo $q_x = q_{x-kap} + q_{x-rak} + q_{x-infarkt}$.

Z novimi tablicami smrtnosti tako podobno kot v prejšnjem primeru izračunamo ${}_np_x$ in člene vsote. Tako dobimo podatke v tabeli 6.7.

k	starost	p_x	q_x	v^{k+1}	${}_kp_x$	Členi vsote A	Členi vsote a
0	40	0,99910	0,00090	0,97324	1,00000	0,00087	1,00000
1	41	0,99902	0,00098	0,94719	0,99910	0,00093	0,97236
2	42	0,99894	0,00106	0,92184	0,99812	0,00098	0,94541
3	43	0,99882	0,00118	0,89717	0,99706	0,00106	0,91913
4	44	0,99867	0,00133	0,87315	0,99588	0,00115	0,89347
5	45	0,99850	0,00150	0,84978	0,99456	0,00126	0,86840
6	46	0,99831	0,00169	0,82704	0,99307	0,00139	0,84390
7	47	0,99809	0,00191	0,80491	0,99139	0,00153	0,81992
8	48	0,99786	0,00214	0,78336	0,98950	0,00166	0,79645
9	49	0,99764	0,00236	0,76240	0,98738	0,00178	0,77348

Tabela 6.7: Izračun letne neto premije za kap, rak in infarkt

Kot v prejšnjem primeru, izračunamo vse premije:

$$A^1_{40:\overline{10}|} = ZV \cdot \sum_{k=0}^{9} v^{k+1}{}_kp_{40}q_{x+40} = 100.000 \cdot 0,0126022 = 1.260,22,$$

$$P^1_{40:\overline{10}|} = \frac{A^1_{40:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{10}|}} = \frac{1.260,22}{8,83} = 142,78,$$

$$P^a_{40:\overline{10}|} = 156,07.$$

Če bi namesto ene sklenili tri zavarovanja, eno za smrt v primeru kapi, eno za smrt v primeru raka in eno za smrt v primeru infarkta, bi skupna enkratna neto premija znašala $656,67 + 328,88 + 331,09 = 1.316,64$, kar je $56,42$ EUR več, kot če sklenemo samo eno zavarovanje.

Zanima nas, zakaj je premija v primeru treh ločenih zavarovanj večja kot v primeru le enega. Označimo z Z sedanjo vrednost izplačila. Velja $Z = Z_r + Z_k + Z_i$. Potem je

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(Z_r) + \mathrm{Var}(Z_k) + \mathrm{Var}(Z_i) + 2\mathrm{Kov}(Z_r, Z_k) + 2\mathrm{Kov}(Z_k, Z_i) + 2\mathrm{Kov}(Z_r, Z_i).$$

Produkt Z_rZ_k, Z_kZ_i in Z_rZ_i je vedno enak 0, saj so neodvisni dogodki, ker ne vplivajo na verjetnost drug drugega, zato je

$$\mathrm{Kov}(Z_r, Z_i) = E(Z_rZ_i) - E(Z_r)E(Z_i) = -A_rA_i,$$

$$\mathrm{Kov}(Z_r, Z_k) = E(Z_rZ_k) - E(Z_r)E(Z_k) = -A_rA_k,$$

$$\mathrm{Kov}(Z_k, Z_i) = E(Z_kZ_i) - E(Z_k)E(Z_i) = -A_kA_i,$$

kjer z A_r označimo enkratno neto premijo za smrt v primeru raka, A_k za smrt v primeru kapi in A_i za smrt v primeru infarkta. Sedaj lahko zapišemo

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(Z_r) + \mathrm{Var}(Z_k) + \mathrm{Var}(Z_i) - 2A_rA_k - 2A_kA_i - 2A_rA_i.$$

Ta rezultat nam prikaže, da je pri zavarovanju vseh treh vzrokov riziko zavarovalnice, ki se meri z varianco, manjši kot v primeru treh ločenih zavarovanj.

Do sedaj smo obravnavali vzroke, ki so bili nezdružljivi. Poglejmo si sedaj primer zavarovanja, kjer so vzroki združljivi. Imamo življenjsko zavarovanje, kjer se zavarujemo za tri hujše bolezni rak, kap in smrt. To pomeni, da dobimo izplačano zavarovalno vsoto, če zbolimo za eno izmed teh treh bolezni. Dogodki so združljivi, saj lahko zbolimo za dvema ali celo tremi boleznimi hkrati.

Pri vhodnih podatkih pride do spremembe le pri tablicah smrtnosti, ostalo se ne spremeni. Tablice smrtnosti spet izračunamo tako, da seštejemo verjetnosti smrti za vse tri dejavnike, vendar moramo tokrat ustrezno odšteti preseke dogodkov. Uporabimo formulo verjetnosti za združljive dogodke, da izračunamo q_x v tablicah smrtnosti. Označimo z D_k dogodek, da nas zadene kap, D_r dogodek, da zbolimo za rakom in D_i dogodek, da nas doleti infarkt. Tako izračunamo

$$\begin{aligned} P(D_k \cup D_r \cup D_i) = P(D_k) + P(D_r) + P(D_i) - P(D_k p D_r) \\ - P(D_r D_i) - P(D_k D_i) + P(D_k D_r D_i). \end{aligned}$$

Verjetnost q_x, da zbolimo za eno izmed treh omenjenih oblik, je enaka

$$\begin{aligned} q_x &= q_{x-kap} + q_{x-rak} + q_{x-infarkt} - q_{x-kap} \cdot q_{x-rak} - q_{x-rak} \cdot q_{x-infarkt} \\ &- q_{x-kap} \cdot q_{x-infarkt} + q_{x-kap} \cdot q_{x-rak} \cdot q_{x-infarkt}. \end{aligned}$$

Z novimi tablicami smrtnosti tako podobno kot v prejšnjem primeru izračunamo ${}_n p_x$ in člene vsote. Tako dobimo podatke v tabeli 6.8.

k	starost	p_x	q_x	v^{k+1}	${}_k p_x$	Členi vsote A	Členi vsote a
0	40	0,99911	0,00089	0,97324	1,00000	0,00087	1,00000
1	41	0,99902	0,00098	0,94719	0,99911	0,00093	0,97237
2	42	0,99894	0,00106	0,92184	0,99812	0,00098	0,94541
3	43	0,99882	0,00118	0,89717	0,99706	0,00106	0,91913
4	44	0,99867	0,00133	0,87315	0,99588	0,00115	0,89347
5	45	0,99850	0,00150	0,84978	0,99456	0,00126	0,86840
6	46	0,99831	0,00169	0,82704	0,99307	0,00139	0,84390
7	47	0,99809	0,00191	0,80491	0,99140	0,00152	0,81993
8	48	0,99786	0,00214	0,78336	0,98950	0,00166	0,79646
9	49	0,99764	0,00236	0,76240	0,98739	0,00177	0,77349

Tabela 6.8: Izračun letne neto premije za kap, rak in infarkt z novimi tablicami smrtnosti

Kot v prejšnjem primeru, izračunamo vse premije:

$$
\begin{aligned}
A^1_{40:n\overline{10}|} &= ZV \cdot \sum_{k=0}^{9} v^{k+1}{}_k p_{40} q_{x+k} = 100.000 \cdot 0,0125956 = 1.259,56,\\
P^1_{40:\overline{10}|} &= \frac{A^1_{40:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{10}|}} = \frac{1.259,56}{8,83} = 142,61,\\
P^a_{40:\overline{10}|} &= 155,99.
\end{aligned}
$$

V tem primeru so tablice smrtnosti za hujše bolezni ostale iste kot v prejšnjem primeru, kjer so bili dogodki nezdružljivi. Vidimo, da se premija le minimalno razlikuje, saj so verjetnosti preseka, ki jih odštevamo in prištevamo, zelo majhne.

6.3 Doživetje

Poglejmo si izračun premije, kjer sklenemo zavarovanje samo za primer doživetja. Zavarovanje je opisano v poglavju (4.6.2), za izračun premije pa uporabimo formulo (4.8):

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = v^n {}_n p_x.$$

Vhodni podatki, ki jih potrebujemo:

- tablice smrtnosti iz katerih preberemo verjetnosti preživetja p_x in smrti q_x; uporabili smo slovenske tablice SLOUNISEX_2007,
- trajanje zavarovanja, ki bo določeno na 10 let,
- zavarovalna vsota, ki bo v našem primeru določena na 2.000 EUR,
- efektivna letna obrestna mera i, ki bo določena na $i = 0,0275$ in iz katere bomo izračunali diskontni faktor v,
- starost zavarovanca, ki bo v našem primeru 40 let.

Izračunati moramo ${}_n p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdots p_{x+n-1}$ in v^n. Tako dobimo:

$$A_{40:\overset{1}{\overline{10}|}} = v^{10}{}_{10}p_{40} = 2.000 \cdot v^{10} \cdot {}_{10}p_{40} = 2.000 \cdot 0,7623 \cdot 0,9742 = 1.485,53.$$

Izračunati želimo še letno neto premijo in bruto premijo

$$
\begin{aligned}
P_{40:\overline{10|}}^{\;\;\,1} &= \frac{A_{40:\overline{10|}}^{\;\;\,1}}{\ddot{a}_{40:\overline{10|}}} = \frac{1.485,53}{8,80} = 168,82 \\
P_{40:\overline{10|}}^{\;\;\,1} &= 183,87.
\end{aligned}
$$

6.4 Mešano življenjsko zavarovanje

Mešano življenjsko zavarovanje je opisano v poglavju 4.6.3. Vključuje zavarovanje za smrt in doživetje. Zavarovalni vsoti se lahko razlikujeta. Za izračun premije uporabimo formulo (4.9):

$$A_{x:\overline{n|}} = A^1_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overline{n|}}^{\;\;\,1}.$$

Za izračun neto letne premije pa uporabimo formulo (4.20):

$$P_{x:\overline{n|}} = P^1_{x:\overline{n|}} + P_{x:\overline{n|}}^{\;\;\,1}.$$

Vhodni podatki:

- tablice smrtnosti iz katerih preberemo verjetnosti preživetja p_x in smrti q_x; uporabili smo slovenske tablice SLOUNISEX_2007,
- trajanje zavarovanja, ki bo v vseh naših izračunih določeno na 10 let,
- zavarovalna vsota za smrt 100.000 in zavarovalna vsota za doživetje 2.000,
- efektivna letna obrestna mera i, ki bo določena na $i = 0,0275$ in iz katere bomo izračunali diskontni faktor v,
- starost zavarovanca, ki bo v našem primeru 40 let.

Za izračun premije mešanega življenjskega zavarovanja samo seštejemo premijo za riziko zavarovanje in doživetje, saj je mešano zavarovanje ravno kombinacija teh dveh. Paziti moramo le pri višini zavarovalne vsote vsakega zavarovanja. Tako dobimo

$$
\begin{aligned}
A_{40:\overline{10|}} &= 2.172,04 + 1.485,53 = 3.657,57 \\
P_{40:\overline{10|}} &= 246,83 + 168,82 = 415,60.
\end{aligned}
$$

Izračunajmo še stroškovno premijo s formulo (4.22):

$$P^a_{40:\overline{10|}} = 452,66.$$

6.5 Izračun neto premije

Poglejmo si sedaj izračun enkratne neto premije za 1000 različnih zavarovalnih polic. Najprej moramo zgenerirati police. To smo naredili tako, da smo naključno določili spol, starost zavarovanca med 15 in 70 let, zavarovalno dobo med 5 in 30 let in zavarovalno vsoto med 3.000 in 55.000 EUR. Nato smo s programom, ki je v prilogi, izračunali enkratno neto premijo za vse police. Uporabili smo funkcijo CelotnaPremijaSpol, ki loči izračun premije glede na moški in ženski spol. To pomeni, da loči med ženskimi in moškimi tablicami smrtnosti. Tako dobimo rezultat $6.157.812, 2$ EUR.
V Sloveniji je z zakonom določeno, da morajo biti tablice za moške in ženske enotne. Zato uporabimo tablice, ki so bile izračunane v poglavju o tablicah smrtnosti SLOUNISEX_2007 in uporabimo funkcijo CelotnaPremija, ki uporabi enotne tablice. Tako dobimo rezultat $6.459.075, 0$ EUR.
Zanima nas, kako bi lahko naš rezultat še izboljšali oziroma izračunali enkratno neto premijo bolj natančno. V našem izračunu smo predpostavili, da se zavarovalna vsota izplača vedno na koncu leta, v katerem pride do škodnega dogodka. Ta predpostavka je daleč od zavarovalniške prakse, saj se v večini primerov zavarovalna vsota izplača neposredno po smrti, kar bi radi upoštevali v našem izračunu. Poglejmo si torej bolj natančno funkcijo CleniVsote, ki sešteje člene vsote v formuli za izračun premije. Ko to vsoto zmnožimo z zavarovalno vsoto, dobimo ravno enkratno neto premijo. Če v formuli za izračun premije popravimo potenco diskontnega faktorja iz $i+1$ na $i+0,5$, predpostavimo ravno želeno. Število $0,5$ predstavlja ravno povprečje v letu, kdaj pride do škodnega dogodka. Tako smo predpostavili, da je povprečje sredina leta. Za enotne tablice dobimo tako rezultat $6.547.284, 9$.

Izračune za naše zgenerirane zavarovalne police smo želeli preveriti še s programskim orodjem za aktuarske izračune. Ta nam je vrnil rezultat $6.547.284, 9$, kar je enako kot smo izračunali z našim programom. Iz tega sklepamo, da so naši izračuni pravilni.

Literatura

[1] N. L. Bowers, Jr., H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones, C. J. Nesbitt *Actuarial Mathematics, 2. edition*, Society of Actuaries Schaumburg, Illinois, 1997

[2] S. Čoh, *Test dobičkonosnosti pri razvoju mešanega življenjskega zavarovanja*, Diplomsko delo, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, 2017.

[3] H. U. Gerber, *Matematika življenjskih zavarovanj*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1986.

[4] S. Glavaš, K. Rihter *Osebna zavarovanja*, Slovensko zavarovalno združenje, Ljubljana, 2010.

[5] R. Jamnik, *Verjetnostni račun*, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1971.

[6] T. Kačar, *Osnove zavarovalništva*, Slovensko zavarovalno združenje, Ljubljana, 2010.

[7] P. Močivnik, *Osnove aktuarske matematike*, Slovensko zavarovalno združenje, Ljubljana, 2010.

[8] S. D. Promislow, *Fundamentals of Actuarial Mathematics, 2. edition*, Wiley, 2011.

[9] Multiple decrements models (citirano 24. 4. 2020). Dostopno na naslovu: `https://users.math.msu.edu/users/valdezea/stt456s15/STT456Weeks8to9-S2015-annot.pdf`.

[10] Osnove teorije verjetnosti (citirano 24. 4. 2020). Dostopno na naslovu: `http://valjhun.fmf.uni-lj.si/~raicm/Poucevanje/BPSt/Verjetnost_os.pdf`.

[11] Wikipedia, Slučajna spremenljivka (citirano 24. 4. 2020). Dostopno na naslovu: `https://sl.wikipedia.org/wiki/Slucajna_spremenljivka`.

[12] Wikipedia, Cumulative Distribution Function (citirano 24. 4. 2020). Dostopno na naslovu: `https://en.wikipedia.org/wiki/Cumulative_distribution_function`.

[13] Wikipedia, Uniform Distribution (citirano 24. 4. 2020). Dostopno na naslovu: https://en.wikipedia.org/wiki/Uniform_distribution_(continuous).

[14] Wikipedia, Normal Distribution (citirano 24. 4. 2020). Dostopno na naslovu: https://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution.

[15] Wikipedia, Edmond Halley (citirano 24. 4. 2020). Dostopno na naslovu: https://sl.wikipedia.org/wiki/Edmond_Halley.

[16] Tablice smrtnosti Slovenije (citirano 16.8.2017). Dostopno na naslovu: https://www.stat.si/statweb/File/DocSysFile/8161.

Tablice smrtnosti 2007

Starost	q_x	Starost	q_x	Starost	q_x	Starost	q_x
0	0,002796	26	0,000762	52	0,005338	78	0,054284
1	0,000304	27	0,000796	53	0,005882	79	0,059928
2	0,000266	28	0,000834	54	0,006464	80	0,065958
3	0,000226	29	0,000856	55	0,007028	81	0,072754
4	0,000188	30	0,000856	56	0,007544	82	0,080958
5	0,000152	31	0,000848	57	0,008066	83	0,090408
6	0,000128	32	0,000854	58	0,008668	84	0,100188
7	0,00011	33	0,00088	59	0,009374	85	0,110098
8	0,000092	34	0,000914	60	0,010184	86	0,120768
9	0,00008	35	0,000958	61	0,011048	87	0,13369
10	0,000084	36	0,001006	62	0,012016	88	0,14905
11	0,0001	37	0,001102	63	0,013106	89	0,167176
12	0,000132	38	0,001242	64	0,014146	90	0,187194
13	0,000168	39	0,001398	65	0,015202	91	0,20761
14	0,00022	40	0,00155	66	0,016472	92	0,228948
15	0,000286	41	0,001704	67	0,017986	93	0,247672
16	0,000358	42	0,001844	68	0,019742	94	0,264238
17	0,000454	43	0,002044	69	0,021764	95	0,283442
18	0,000574	44	0,0023	70	0,024008	96	0,306132
19	0,0007	45	0,00259	71	0,026556	97	0,328866
20	0,000812	46	0,002926	72	0,0295	98	0,351902
21	0,000872	47	0,00331	73	0,032806	99	0,37526
22	0,000874	48	0,0037	74	0,03636	100	0,39591
23	0,000834	49	0,004084	75	0,040316	101	1
24	0,000774	50	0,004468	76	0,044598		
25	0,000752	51	0,004866	77	0,049162		

Koda za izračun premije v pythonu

```
Q = združene tablice smrtnosti, v obliki seznama
M = moške tablice smrtnosti, v obliki seznama
Z = ženske tablice smrtnosti, v obliki seznama
S = seznam zavarovalnic polic, primer police [1,22,6,27522]
- 1 ženski spol (0 predstavlja moški spol),
- 22 starost ob sklenitvi,
- 6 let zavarovalna doba
- 27.522 zavarovalna vsota
i = 0.0275
v = 1/(1+i)

def VerjetnostPrezivetja(A):
    S = []
    for i in range(0,len(A)):
        S.append(1-A[i])
    return S

def VerjetnostPrezivetja2(P,n,x):
    a = 1
    for j in range(0,n):
        a = a * P[x+j]
    return a

def CleniVsote(Q,v,n,x):
    A = []
    for i in range(0,n):
        b = Q[x+i] * (v**(i+0.5)) *
        * VerjetnostPrezivetja2(VerjetnostPrezivetja(Q),i,x)
        A.append(b)
```

```
    return A

def VsotaSeznama(A):
    s = 0
    for i in range(0,len(A)):
        s = s + A[i]
    return s

def PomnoziZZavVsoto(s,ZV):
    return s * ZV

def VrneEnkratnoNetoPremijo(Q,v,n,x,ZV):
    return PomnoziZZavVsoto(VsotaSeznama(CleniVsote(Q,v,n,x)),ZV)

def Renta(Q,v,n,x):
    s = 0
    for i in range(0,n):
        s = s + (v**i) * VerjetnostPrezivetja2(VerjetnostPrezivetja(Q),i,x)
    return s

def SpremembaTablic(Q,f):
    R = []
    for i in range(0,len(Q)):
        R.append(f * Q[i])
    return R

def IzracunPremije(S):
    A = []
    for i in range(0,len(S)):
        A.append(VrneEnkratnoNetoPremijo(Q,v,S[i][2],S[i][1],S[i][3]))
    return A

def IzracunPremijeStarost(S):
    A = []
    for i in range(20,61):
        A.append(VrneEnkratnoNetoPremijo(Q,v,i,S[1],S[3]))
    return A
```

```
def Vsota(S):
    s = 0
    for i in range(0,len(S)):
        s = s + S[i]
    return s

def VrneLetnoNetoPremijo(Q,v,n,x,ZV):
    s = VrneEnkratnoNetoPremijo(Q,v,n,x,ZV)/Renta(Q,v,n,x)
    return s

def IzracunLetnePremije(S):
    A = []
    for i in range(0,len(S)):
        A.append(VrneLetnoNetoPremijo(Q,v,S[i][2],S[i][1],S[i][3]))
    return A

def IzracunPremijeSpol(S):
    A = []
    for i in range(0,len(S)):
        if S[i][0] == 1:
            A.append(VrneEnkratnoNetoPremijo(Z,v,S[i][2],S[i][1],S[i][3]))
        else:
            A.append(VrneEnkratnoNetoPremijo(M,v,S[i][2],S[i][1],S[i][3]))
    return A


def IzracunLetnePremijeSpol(S):
    A = []
    for i in range(0,len(S)):
        if S[i][0] == 1:
            A.append(VrneLetnoNetoPremijo(M,v,S[i][2],S[i][1],S[i][3]))
        else:
            A.append(VrneLetnoNetoPremijo(Z,v,S[i][2],S[i][1],S[i][3]))
    return A

def CelotnaPremijaSpol(S):
    A = []
    for i in range(0,len(S)):
```

```
        for j in range(0,31):
            if S[i][2] == j:
                if S[i][0] == 1:
                    A.append(
                    VrneLetnoNetoPremijo(Z,v,S[i][2],S[i][1],S[i][3])*S[i][2])
                else:
                    A.append(
                    VrneLetnoNetoPremijo(M,v,S[i][2],S[i][1],S[i][3])*S[i][2])
    return Vsota(A)

def CelotnaPremija(S):
    A = []
    for i in range(0,len(S)):
        for j in range(0,31):
            if S[i][2] == j:
                A.append(
                VrneLetnoNetoPremijo(Q,v,S[i][2],S[i][1],S[i][3])*S[i][2])
    return Vsota(A)
```