UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Oddelek za matematiko in računalništvo

MAGISTRSKO DELO

Peter Goričan

Maribor, 2020

UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Oddelek za matematiko in računalništvo

Magistrsko delo

Veliki kontinuumi v inverznih limitah

na študijskem programu 2. stopnje Matematika

Mentor: prof. dr. Iztok Banič

Somentor: doc. dr. Matevž Črepnjak

Kandidat: Peter Goričan

Maribor, 2020

ZAHVALA

"Matematika je vladajoča znanost našega časa. Njene osvojitve se vsak dan širijo, čeprav brez hrupa. Kdor je nima na svoji strani, jo bo prej ali slej imel proti sebi." - J. F. Herbart

Zahvaljujem se mentorju, prof. dr. Iztoku Baniču, ki mi je s svojo vnemo in zagnanostjo približal obširen svet topologije ter me s svojim zgledom navdušil za nadaljno raziskovanje teoretične matematike. Prav tako gre zahvala tudi somentorju, doc. dr. Matevžu Črepnjaku za vse nasvete in spodbude pri raziskovalnem delu.

Posebna zahvala pa gre seveda tudi družini, ki me podpira že vse življenje na vseh mojih poteh in vsem prijateljem, ki so mi kakorkoli pomagali pri študiju.

Vsem iskreno hvala!

Veliki kontinuumi v inverznih limitah (Big continua in inverse limits)

Naj bo L inverzna limita inverznega zaporedja kontinuumov X_n in veznih funkcij f_n. Kontinuum C v inverzni limiti L je velik kontinuum v L, če je $p_n(C) = X_n$ za vsako naravno število n (p_n označuje projekcijo iz produkta prostorov X_i v prostor X_n). V magistrskem delu predstavite rezultate o obstoju velikih kontinuumov v inverznih limitah iz člankov [1] in [4].

Osnovni viri:

1. I. Banič, J. Kenndy, Inverse limits with bonding functions whose graphs are arcs, Topology Appl. (2015).
2. I. Banič, M. Črepnjak, P. Goričan, T. Kac, M. Merhar, U. Milutinović, Big and large continua in inverse limits of inverse systems over directed graphs, Topology Appl. (2020).

Maribor, 2020

Mentor in somentor:
prof. dr. Iztok Banič

doc. dr. Matevž Črepnjak

Goričan, P.: Veliki kontinuumi v inverznih limitah.
Magistrsko delo, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Oddelek za matematiko in računalništvo, 2020.

IZVLEČEK

V magistrskem delu predstavimo in razširimo posplošene dvostrane inverzne limite na inverzne limite nad usmerjenimi grafi.
Nato s pomočjo projekcij dokažemo, da pri določenih pogojih v teh inverznih limitah obstajajo posebni kontinuumi. Na koncu podamo še nekaj odprtih problemov za nadaljno raziskovanje.

Ključne besede: metrični prostor, kontinuum, večlična funkcija, inverzna limita,
posplošena inverzna limita, velik kontinuum, debel kontinuum.

Math. Subj. Class. (2010): 54B20, 54B05, 54B99, 54C60, 54C05, 37B45.

Goričan, P.: Big continua in inverse limits.
Master Thesis, University of Maribor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Department of Mathematics and Computer Science, 2020.

ABSTRACT

In the thesis we present and expand the notion of generalized two-sided inverse limits to inverse limits over directed graphs.
Then we show that in such inverse limits there are special kind of continua, if special conditions are satisfied. We use projection function. At the end we state some open problems for further research.

Keywords: metric space, continuum, set-valued function, inverse limit, generalized inverse limit, large continua, big continua.

Math. Subj. Class. (2010): 54B20, 54B05, 54B99, 54C60, 54C05, 37B45.

Kazalo

Uvod

V teoriji inverznih limit lahko raziskujemo zelo veliko različnih ugotovitev inverznih limit. Ena od teh je tudi povezanost. Ker v splošnem posplošena inverzna limita ni povezana (tudi če so grafi veznih funkcij povezani in surjektivni) je dokazovanje o obstoju posebnih komponent v teh zelo netrivialno.
V magistrskem delu predstavimo rezultate iz članka [1], ki so posplošitev rezultatov iz članka [4]. Avtorji se v članku [1] ukvarjajo s povezanostjo posplošenih inverznih limit nad usmerjenimi grafi. V članku dokažejo, da pri določenih pogojih vsaka taka inverzna limita vsebuje poseben kontinuum, katerega projekcije so grafi veznih funkcij ali pa kar faktorski prostori. Ta kontinuum imenujemo debel (če so projekcije grafi veznih funkcij) oziroma velik kontinuum (če so projekcije faktorski prostori).

V prvem poglavju predstavimo osnovne definicije o metričnih prostorih, definiramo topologijo, bazo topologije, vgnezdene preseke, podamo tudi definicijo kompaktnega prostora, definiramo kontinuum ter podamo nekaj zgledov in izrekov.
Drugo poglavje začnemo z definicijo Hausdorffove metrike, nato definiramo hiperprostor in podamo nekaj pomembnih izrekov o hiperprostorih. Srečamo se tudi z definicijo inverznega zaporedja ter inverzne limite in podamo nekaj zgledov le teh. Nadaljujemo z definicijo večlične funkcije in njenih lastnosti. Na koncu poglavja še definiramo posplošena inverzna zaporedja in posplošene inverzne limite ter podamo nekaj pomembnejših primerov.
V tretjem poglavju najprej predstavimo reultate članka [1], kjer nato definiramo neusmerjeni in usmerjeni graf ter nekaj njunih lastnosti. Nadaljujemo z definicijo posplošene inverzne limite nad usmerjenim grafom. Definiramo tudi vse potrebne projekcije. S pomočjo teh projekcij nato še definiramo velik in debel kontinuum. Na koncu poglavja navedemo par izrekov o velikih in debelih kontinuumih.
V četrtem poglavju, dokažemo, da obstoja velik in debel kontinuum, ob ustreznih predpostavkah. Predstavimo in dokažemo pogoje za povezavo med velikim in debelim kontinuumom ter podamo dva zgleda, kjer ti pogoji niso zadoščeni. S tem vidimo, da ne obstaja direktna povezava med velikim in debelim kontinuumom.

Magistrsko nalogo zaključimo z navedbo nekaj odprtih problemov in predstavimo možnosti za nadaljno raziskovanje.

Poglavje 1

Osnovni pojmi in definicije

1.1 Metrični prostori

V tem poglavju bomo najprej predstavili osnovne pojme in zglede, nato pa bomo navedli izreke, ki jih bomo uporabili v nadaljevanju.

Definicija 1.1. *Naj bo X neprazna množica. Preslikavi $d : X \times X \to \mathbb{R}$ pravimo metrika, če velja:*

1. $d(x, y) \geq 0$ *za vsaka* $x, y \in X$*,*
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *za vsaka* $x, y \in X$*,*
3. $d(x, y) = d(y, x)$ *za vsaka* $x, y \in X$*,*
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *za vse* $x, y, z \in X$*.*

Paru (X, d) *pravimo metrični prostor.*

Zgled. Naj bo $d_e : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija s predpisom $d_e(x, y) = |x - y|$ za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$, potem je $(\mathbb{R}, d_e)$ metrični prostor. Metriko d_e imenujemo evklidska metrika na množici realnih števil.

Zgled. Naj bo $p \geq 1$ poljuben in $d_p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija s predpisom: $d_p((x_u, y_u), (x_v, y_v)) = (|x_u - x_v|^p + |y_u - y_v|^p)^{\frac{1}{p}}$ za vsaka $(x_u, y_u), (x_v, y_v) \in \mathbb{R}^2$. Potem je d_p metrika na $\mathbb{R}^2$. Če je $p = 2$ pravimo, da je d_2 evklidska metrika na množici $\mathbb{R}^2$.

Zgled. Naj bo $d_\infty : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija s predpisom: $d_\infty((x_u, y_u), (x_v, y_v)) = \max\{|x_u - x_v|, |y_u - y_v|\}$ za poljubna $(x_u, y_u), (x_v, y_v) \in X$, potem je d_∞ metrika na $\mathbb{R}$.

Zgled. Naj bo X poljubna neprazna množica in $d : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija s predpisom

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, x \neq y \\ 0, x = y. \end{cases}$$

Preslikavo d imenujemo diskretna metrika na prostoru X. Ta zgled nam tudi pokaže, da je vsako neprazno množico mogoče opremiti z metriko.

Definicija 1.2. *Naj bo (X,d) metrični prostor, $x \in X$ in $r > 0$. Množici*

$$K_r(x) = \{y \in X;\ d(x,y) < r\}$$

pravimo odprta krogla v prostoru X s središčem v x in radijem r.

Definicija 1.3. *Naj bo (X,d) metrični prostor. Potem pravimo, da je množica $V \subseteq X$ odprta v X, če za vsak $x \in V$ obstaja tak $r > 0$, da je $K_r(x) \subseteq V$.*

Izrek 1.4. *Naj bo (X,d) metrični prostor, $x \in X$ in $r > 0$. Potem je $K_r(x)$ odprta množica v X.*

Dokaz. Naj bo $y \in K_r(x)$ in $r_0 = r - d(x,y)$. Dokazati je potrebno, da je $K_{r_o}(y) \subseteq K_r(x)$.
Naj bo še $y_0 \in K_{r_o}(y)$. Potem je

$$d(x,y_0) \leq d(x,y) + d(y,y_0) = r - r_0 + d(y,y_0) < r - r_0 + r_0 = r.$$

Sledi $y_0 \in K_r(x)$. □

Izrek 1.5. *Naj bo (X,d) metrični prostor in $V \subseteq X$. Potem je V odprta v X natanko tedaj, ko jo lahko zapišemo kot unijo odprtih krogel iz X.*

Dokaz. $(\Rightarrow)$:
Naj bo $V \subseteq X$ odprta. Ker je V odprta, zato za vsak $x \in V$ obstaja $r_x > 0$, da je $K_{r_x}(x) \subseteq V$. Posledično je $V = \bigcup_{x \in V} K_{r_x}(x)$.
$(\Longleftarrow)$:
Naj bo $V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} K_{r_\lambda}(x_\lambda)$ in $y \in V$ poljuben. Potem obstaja tak $\lambda_0 \in \Lambda$, da je $y \in K_{r_{\lambda_0}}(x_{\lambda_0})$. Ker pa je $K_{r_{\lambda_0}}(x_{\lambda_0})$ odprta po izreku 1.4, obstaja tak $r > 0$, da je $K_r(y) \subseteq K_{r_{\lambda_0}}(x_{\lambda_0})$. Sledi, da velja $K_r(y) \subseteq V$.
□

Definicija 1.6. *Naj bosta (X,d), (Y,D) metrična prostora in $f : (X,d) \to (Y,D)$ funkcija. Pravimo, da je f zvezna v $x_0 \in X$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da velja:*
za vsak $x \in X$ velja, če je $d(x_0,x) < \delta$, sledi $D(f(x_0), f(x)) < \epsilon$.
Funkcija je zvezna, če je zvezna v vsaki točki v (X,d).

Definicija 1.7. *Naj bosta* (X, d) *,*(Y, D) *metrična prostora in* $f : (X, d) \to (Y, D)$ *funkcija. Pravimo, da je* f *je homeomorfizem, če velja:*

1. f *je zvezna,*
2. f *je bijektivna,*
3. f^{-1} *je zvezna.*

Če obstaja takšna funkcija, pravimo, da je (X, d) *homeomorfen* (Y, D)*.*

1.2 Topologija

Tukaj bomo definirali, kaj je to topologija, baza topologije, našteli nekaj topoloških lastnosti ter definirali topološke produkte.

Definicija 1.8. *Naj bo* X *neprazna množica in* $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$*. Pravimo, da je* $\mathcal{T}$ *topologija na* X*, če velja:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$*,*
2. *za vsak* $\lambda \in \Lambda, V_\lambda \in \mathcal{T}$*, tedaj je* $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \in \mathcal{T}$*,*
3. *za poljubna* $A, B \in \mathcal{T}$ *velja:* $A \cap B \in \mathcal{T}$*.*

Paru $(X, \mathcal{T})$ *pa pravimo topološki prostor.*

Izrek 1.9. *Naj bo* (X, d) *metrični prostor in* $\mathcal{T}_d = \{V \subseteq X \mid V \text{ je odprta v } X\}$*. Potem je* $\mathcal{T}_d$ *topologija na* X*.*

Dokaz.

1. Velja, da je $X = \bigcup_{x \in X} K_1(x)$ in $\emptyset = \bigcup_{\lambda \in \emptyset} K_{r_\lambda}(x_\lambda)$. Po 1.5 sledi, da sta $X, \emptyset$ odprti v X. Zato je $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.
2. Ker lahko vsako odprto množico zapišemo kot unijo odprtih krogel in ker je unija unije odprtih krogel spet unija odprtih krogel, je poljubna unija odprtih množic spet odprta množica.
3. Naj bosta $A, B \in \mathcal{T}$ in $A \cap B \neq \emptyset$ (če je presek prazen, sledi po točki 1), naj bo še $x \in A \cap B$ poljuben. Sledi, da obstajata takšna r_0, r_1, da je $K_{r_0}(x) \subseteq A$ in $K_{r_1}(x) \subseteq B$. Naj bo $r = \min\{r_0, r_1\}$, potem je $K_r(x) \subseteq A \cap B$. Sledi, da je $A \cap B \in \mathcal{T}$.

□

Definicija 1.10. *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $A \subseteq X$. Tedaj družini množic $\mathcal{T}_A = \{A \cap V \mid V \in \mathcal{T}\}$ pravimo relativna topologija na A dobljena iz X. Par $(A, \mathcal{T}_A)$ pa imenujemo topološki podprostor prostora $(X, \mathcal{T})$.*

Izrek 1.11. *Par $(A, \mathcal{T}_A)$ je topološki prostor.*

Dokaz. Dokazati je potrebno, da je $\mathcal{T}_A$ res topologija na A.

1. $A = A \cap X$, $\emptyset = A \cap \emptyset$. Sledi, da je $A, \emptyset \in \mathcal{T}_A$.
2. Naj bo za vsak $\lambda \in \Lambda$, $U_\lambda \in \mathcal{T}_A$. Torej za vsak $\lambda \in \Lambda$ obstaja tak $V_\lambda \in \mathcal{T}$, da je $U_\lambda = V_\lambda \cap A$. Potem je $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda}(V_\lambda \cap A) = (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda) \cap A \in \mathcal{T}_A$.
3. Naj bosta $U, V \in \mathcal{T}_A$. Potem obstajata taka $U_1, V_1 \in \mathcal{T}$, da je $U = U_1 \cap A$, $V = V_1 \cap A$. Sledeče je tudi $U_1 \cap V_1 \in \mathcal{T}$. Torej je $U \cap V = (U_1 \cap A) \cap (V_1 \cap A) = (U_1 \cap V_1) \cap A \in \mathcal{T}_A$.

□

Definicija 1.12. *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $Y \subseteq X$. Pravimo, da je Y zaprta v X, če je $X \backslash Y \in \mathcal{T}$.*

Izrek 1.13. *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in naj C označuje družino vseh zaprtih množic v X. Potem velja:*

1. *$\emptyset, X \in C$,*
2. *če sta $A, B \in C$, je $A \cup B \in C$,*
3. *če je za vsak $\lambda \in \Lambda$, $A_\lambda \in C$, potem je $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in C$.*

Dokaz.

1. Ker je $X \backslash \emptyset = X$ in $X \backslash X = \emptyset$ je $X, \emptyset \in C$.
2. Naj bosta $A, B \in C$. Potem je $X \backslash (A \cup B) = (X \backslash A) \cap (X \backslash B) \in \mathcal{T}$. Torej je $A \cup B \in C$.
3. Naj bo za vsak $\lambda \in \Lambda$, $A_\lambda \in C$. Potem je $X \backslash (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda}(X \backslash A_\lambda) \in \mathcal{T}$, sledi, da je $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in C$.

□

Definicija 1.14. *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $Y \subseteq X$. Zaprtje od Y je najmanjša (glede na inkluzijo) zaprta množica, ki vsebuje Y. Oznaka:* $\mathrm{Cl}(Y)$.

Izrek 1.15. *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $Y \subseteq X$. Potem obstaja zaprtje od Y.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{F}$ množica vseh zaprtih množic, ki vsebujejo Y. Torej je $\mathcal{F} = \{Z \subseteq X \mid Z \text{ je zaprta in } Y \subseteq Z\}$. Množica $\bigcap_{C \in \mathcal{F}} C$ je zaprta v X po izreku 1.13 in vsebuje Y. Pokažimo še, da je najmanjša glede na inkluzijo.
Naj bo $G \in \mathcal{F}$ poljubna. Torej je G ena izmed množic v preseku. Torej je $G \supseteq \bigcap_{C \in \mathcal{F}} C$. Sledi je $\mathrm{Cl}(Y) = \bigcap_{C \in \mathcal{F}} C$. □

Izrek 1.16. *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $V \subseteq X$ in $x \in X$. Potem sta naslednji trditvi ekvivalentni:*

- $x \in \mathrm{Cl}(V)$,
- *za vsak $U \in \mathcal{T}$ velja, če je $x \in U$, potem je $U \cap V \neq \emptyset$.*

Dokaz. $(\Rightarrow)$:
Naj bo $x \in \mathrm{Cl}(V)$ in $U \in \mathcal{T}$ poljubna, ki vsebuje x. Recimo, da je $U \cap V = \emptyset$. Naj bo $Z = X \backslash U$. Tedaj je Z zaprta in vsebuje V. Torej je $\mathrm{Cl}(V) \subseteq Z$, kar pa pomeni, da je $x \in Z$. To pa nas privede do protislovja, ker je $x \in U$.
$(\Leftarrow)$:
Recimo, da za vsak $U \in \mathcal{T}$, ki vsebuje x, velja $V \cap U \neq \emptyset$. Recimo še, da $x \notin \mathrm{Cl}(V)$. Naj bo $A = X \backslash \mathrm{Cl}(V)$. Tedaj je A odprta in vsebuje x. Kar pa nas privede v protislovje, saj je po predpostavki $V \cap A \neq \emptyset$. □

Definicija 1.17. *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $Y \subseteq X$. Z* $\mathrm{Int}(Y)$ *označujemo največjo odprto množico, ki je vsebovana v Y.*

Izrek 1.18. *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $Y \subseteq X$. Potem* $\mathrm{Int}(Y)$ *obstaja.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{F} = \{N \in \mathcal{T} \mid N \subseteq Y\}$. Množica $\bigcup_{N \in \mathcal{F}} N$ je odprta v X, ki je vsebovana v Y. Pokažimo še, da je res največja.
Naj bo G poljubna odprta množica, da velja $G \subseteq Y$. Sledi, da je $G \in \mathcal{F}$. Torej je G ena izmed unije, kar pa pomeni $G \subseteq \bigcup_{N \in \mathcal{F}} N$. Potem je $\mathrm{Int}(Y) = \bigcup_{N \in \mathcal{F}} N$. □

Izrek 1.19. *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $V \subseteq X$ in $x \in X$. Potem sta naslednji trditvi ekvivalentni:*

- $x \in \mathrm{Int}(V)$,
- *obstaja tak $U \in \mathcal{T}$, da je $x \in U$ in $U \subseteq \mathrm{Int}(V)$.*

Dokaz. $(\Rightarrow)$
Očitno je za $U = \mathrm{Int}(V)$, $x \in U \subseteq \mathrm{Int}(V)$.
$(\Leftarrow)$
Naj bo $U \in \mathcal{T}$, $x \in U$ in $U \subseteq V$. Torej je U odprta množica, ki je vsebovana v V. Po dokazu izreka 1.18, sledi, da je $U \subseteq \mathrm{Int}(V)$. Torej je $x \in \mathrm{Int}(V)$. □

1.3 Baze topoloških prostorov

Definicija 1.20. *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki podprostor in $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Družino množic $\mathcal{B}$ imenujemo baza za $\mathcal{T}$, če velja:*

1. *za vsak $C \in \mathcal{B}$ je tudi $C \in \mathcal{T}$,*
2. *za vsak $V \in \mathcal{T}$ obstaja tak $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$, da je $V = \bigcup_{S \in \mathcal{D}} S$.*

Izrek 1.21. *Naj bo X neprazna množica in $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Potem sta naslednji trditvi ekvivalentni:*

1. *obstaja topologija $\mathcal{T}$ na X za katero je $\mathcal{B}$ baza,*
2. *2.1 $\bigcup_{S \in \mathcal{B}} S = X$,*

   2.2 za vsaka $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ in vsak $b \in B_1 \cap B_2$ obstaja $C \in \mathcal{B}$, da velja: $b \in C$ ter $C \subseteq B_1 \cap B_2$.

Dokaz. Dokažimo, da iz 1. sledi 2.

2.1 Ker je $\mathcal{B}$ baza od $\mathcal{T}$ in $X \in \mathcal{T}$, po definiciji sledi, da obstaja $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$, da je $\bigcup_{S \in \mathcal{D}} S = X$.

2.2 Naj bosta $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ poljubni ter $b \in B_1 \cap B_2$ tudi poljuben. Ker je $\mathcal{B}$ baza od $\mathcal{T}$, je $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$. Potem obstaja tak $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$, da je $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{S \in \mathcal{D}} S$. Torej obstaja tak $D_0 \in \mathcal{D}$, da je $b \in D_0$.

Sedaj pa še dokažimo, da iz 2. sledi 1.
Naj bo $\mathcal{T} = \{\bigcup_{S \in \mathcal{D}} S \mid \mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}\}$. Dokažimo, da je $\mathcal{T}$ topologija na X.

1. Iz 2.1 in 2.2 neposredno sledi $\emptyset,\ X \in \mathcal{T}$.
2. Naj bo za vsak $\lambda \in \Lambda,\ U_\lambda \in \mathcal{T}$. Potem je za vsak $\lambda \in \Lambda$, $U_\lambda = \bigcup_{D \in \mathcal{D}_\lambda} D$ za nek $\mathcal{D}_\lambda \subseteq \mathcal{B}$. Torej je $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{D \in \mathcal{D}_\lambda} D \in \mathcal{T}$.
3. Naj bosta $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$. Potem obstajata $A_1 = \bigcup_{D \in \mathcal{D}_1} D$ ter $A_2 = \bigcup_{D \in \mathcal{D}_2} D$ za neka $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subseteq \mathcal{B}$.
   Potem za vsak par $C \in \mathcal{D}_1,\ D \in \mathcal{D}_2$ in za vsak $b \in C \cap D$ obstaja tak $U \in \mathcal{B}$, da je $b \in U$ ter $U \subseteq C \cap D$. Torej za vsak $b \in A_1 \cap A_2$ obstajata taka $C \in \mathcal{D}_1,\ D \in \mathcal{D}_2$, da je $b \in C \cap D$ Sledi, da za vsak b obstaja tak U_b, da je $b \in U_b \subseteq C \cap D$, $U_b \in \mathcal{B}$. Družino vseh teh množic označimo z $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}$. Potem je $A_1 \cap A_2 = \bigcup_{U_b \in \mathcal{E}} U_b \in \mathcal{T}$.

□

Izrek 1.22. *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $\mathcal{B}$ baza za topologijo $\mathcal{T}$. Potem je $V \in \mathcal{T}$ natanko takrat, ko za vsak $x \in V$ obstaja $C \in \mathcal{B}$, da je $x \in C$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$):
Naj bo $V \in \mathcal{T}$ in $x \in V$ poljuben. Potem obstaja tak $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$, da je $V = \bigcup_{S \in \mathcal{D}} S$. Torej obstaja tak $S \in \mathcal{D}$, da je $x \in S$.
($\Leftarrow$):
Za vsak $x \in V$ obstaja $S_x \in \mathcal{B}$, da je $x \in S_x \subseteq V$. Tedaj je $V = \bigcup_{x \in V} S_x$. □

Zgled. Naj bo $X = \mathbb{R}$ z metriko d in $\mathcal{B}$ družina množic, $\mathcal{B} = \{K_r(x) \mid r > 0, x \in X\}$. Potem je $\mathcal{B}$ baza za prostor X.

1.4 Zvezne funkcije in homeomorfizmi

Definicija 1.23. *Naj bosta $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ topološka prostora in $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{S})$ funkcija ter $U \subseteq X$. S $f(U)$ bomo označevali množico vseh slik elementov iz U, $f(U) = \{f(u) \mid u \in U\}$.*

Definicija 1.24. *Naj bosta $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ topološka prostora in $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{S})$ funkcija ter $U \subseteq Y$. S $f^{-1}(U)$ bomo označevali množico vseh praslik elementov iz U, $f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$.*

Definicija 1.25. *Naj bosta $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ topološka prostora in $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{S})$ funkcija. Pravimo, da je f zvezna, če za vsak $U \in \mathcal{S}$ velja $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$.*

Definicija 1.26. *Naj bosta* $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ *topološka prostora in* $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{S})$ *funkcija. Pravimo, da je* f *zvezna v* $x_0 \in X$, *če za vsak* $V \in \mathcal{S}$, $f(x_0) \in V$, *obstaja tak* $U \in \mathcal{T}$, $x_0 \in U$, *da velja:* $f(U) \subseteq V$.

Izrek 1.27. *Kompozitum zveznih funkcij je spet zvezna funkcija.*

Dokaz. Naj bodo $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$, $(Z, \mathcal{W})$ topološki prostori, $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$, $g : (Y, \mathcal{S}) \to (Z, \mathcal{W})$ zvezni funkciji in $V \in \mathcal{W}$ poljubna. Dokazati zadošča, da je $(g \circ f)^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.
Veja, da je $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$. Ker je g zvezna, je $g^{-1}(V) \in \mathcal{S}$, in ker je f zvezna, je tudi $f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \mathcal{T}$. □

Definicija 1.28. *Naj bosta* $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ *topološka prostora in* $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ *funkcija. Pravimo, da je* f *homeomorfizem, če velja:*

1. f *je zvezna,*
2. f *je bijektivna,*
3. f^{-1} *je zvezna.*

Če takšna funkcija obstaja, pravimo, da sta prostora $(X, \mathcal{T})$ *in* $(Y, \mathcal{S})$ *homeomorfna.*

Naslednji izrek nam bo povedal nekaj lastnosti o prostorih, ki so preslikani z zvezno funkcijo.

Izrek 1.29. *Veljata naslednji trditvi.*

1. *Zvezna slika povezanega prostora je povezan prostor.*
2. *Zvezna slika kompaktnega prostora je kompakten prostor.*

Dokaz. Glej [8]. □

1.5 Topološke lastnosti

Definicija 1.30. *Pravimo, da je L topološka lastnost, če za poljubna topološka prostora* $(X, \mathcal{T})$, (Y, S) *velja: če ima prostor* $(X, \mathcal{T})$ *lastnost L in če obstaja homeomorfizem iz* $(X, \mathcal{T})$ *v* (Y, S), *potem ima tudi* (Y, S) *lastnost L.*

Definicija 1.31. *Pravimo, da je topološki prostor* $(X, \mathcal{T})$*:*

1. T_1*-prostor, če za vsaka* $x, y \in X$*,* $x \neq y$*, obstaja tak* $V \in \mathcal{T}$*, da je* $x \in V$ *in* $y \notin V$*,*
2. T_2*-prostor, če za vsaka* $x, y \in X$*,* $x \neq y$*, obstajata* $V, U \in \mathcal{T}$*, da je* $x \in V$*,* $y \in U$ *ter* $V \cap U = \emptyset$*,*
3. T_3*-prostor, če za vsako zaprto množico* $A \subseteq X$ *in za vsak* $x \in X \setminus A$*, obstajata* $V, U \in \mathcal{T}$*, da je* $x \in V$*,* $A \subseteq U$ *in* $V \cap U = \emptyset$*,*
3. T_4*-prostor, če za vsaki zaprti množici* $A, B \subseteq X$*,* $A \cap B = \emptyset$*, obstajata* $V, U \in \mathcal{T}$*, da je* $A \subseteq V$*,* $B \subseteq U$ *in* $V \cap U = \emptyset$*.*

Definicija 1.32. *Topološki prostor* $(X, \mathcal{T})$ *je:*

1. *Hausdorffov, če je* T_2*-prostor,*
2. *regularen, če je* T_1*-prostor in* T_3*-prostor,*
3. *normalen, če je* T_1*-prostor in* T_4*-prostor.*

1.6 Povezanost

Definicija 1.33. *Naj bo* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor. Pravimo, da je* $(X, \mathcal{T})$ *nepovezan, če obstajata taka* $U, V \in \mathcal{T}$*, da velja:*

1. $U, V \neq \emptyset$*,*
2. $U \cap V = \emptyset$*,*
3. $U \cup V = X$*.*

Pravimo, da sta množici U, V *separacija prostora* $(X, \mathcal{T})$*.*

Definicija 1.34. *Prostor* $(X, \mathcal{T})$ *je povezan, če ni nepovezan.*

Izrek 1.35. *Topološki prostor* $(X, \mathcal{T})$ *je nepovezan natanko tedaj, ko obstaja takšna množica* $V \subseteq X$*, da velja:*

1. $V \neq X$ *in* $V \neq \emptyset$*,*
2. $V \in \mathcal{T}$*,*
3. $X \setminus V \in \mathcal{T}$*.*

Dokaz. ($\Rightarrow$)
Naj bo $(X, \mathcal{T})$ nepovezan. Potem obstajata taki $U, V \in \mathcal{T}$, da je: $U, V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$ in $U \cup V = X$. Opazimo, da je $U = X \backslash V$.
($\Leftarrow$)
Naj bo $V \subseteq X$ tako, da velja 1., 2. in 3. Tedaj je par V, $U = X \setminus V$ separacija za $(X, \mathcal{T})$. □

1.7 Produkti topoloških prostorov

Definicija 1.36. *Naj bosta $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ topološka prostora. Paru $(X \times Y, \mathcal{U})$ pravimo topološki produkt prostorov $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$, če je $\mathcal{U}$ topologija, za katero je množica $\mathcal{B} = \{V \times U \mid V \in \mathcal{T},\ U \in \mathcal{S}\}$ baza.*

Izrek 1.37. *Naj bosta $(X, \mathcal{T})$, (Y, S) topološka prostora. Potem obstaja njun topološki produkt.*

Dokaz. Dovolj je pokazati, da je družina množic $\mathcal{B} = \{V \times U \mid V \in \mathcal{T},\ U \in \mathcal{S}\}$ res baza za neko topologijo na $X \times Y$.

1. Ker je $X \in \mathcal{T}$ in $Y \in \mathcal{S}$, je tudi $X \times Y \in \mathcal{B}$.
2. Naj bosta $A_1 = V_1 \times U_1$ in $A_2 = V_2 \times U_2$ poljubna elementa iz $\mathcal{B}$ ter $x \in A_1 \cap A_2$ poljuben. Potem je $x \in (V_1 \cap V_2) \times (U_1 \cap U_2) \in \mathcal{B}$.

□

Izrek 1.38. *Naj bosta $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ topološka prostora, $(X \times Y, \mathcal{U})$ njun topološki produkt, A zaprta v $(X, \mathcal{T})$ in B zaprta v $(Y, \mathcal{S})$. Potem je tudi $A \times B$ zaprta v $(X \times Y, \mathcal{U})$.*

Dokaz. Pokažimo, da je $(X \times Y)\backslash(A \times B) \in \mathcal{U}$.
Velja, da je $(X \times Y)\backslash(A \times B) = ((X\backslash A) \times Y) \cup (X \times (Y\backslash B))$. Posledično je $(X \times Y)\backslash(A \times B) \in \mathcal{U}$. □

Definicija 1.39. *Naj bosta $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ topološka prostora in $(X \times Y, \mathcal{U})$ njun topološki produkt. Potem preslikavama $p_1 : (X \times Y, \mathcal{U}) \to (X, \mathcal{T})$ in $p_2 : (X \times Y, \mathcal{U}) \to (Y, S)$ s predpisoma $p_1(x, y) = x$ in $p_2(x, y) = y$, za vsak $(x, y) \in X \times Y$, pravimo projekciji na X oziroma na Y.*

Izrek 1.40. *Projekciji p_1 in p_2 sta zvezni.*

Dokaz. Dokažimo samo za p_1, saj je za p_2 dokaz analogen.
Naj bo $U \in \mathcal{T}$ poljuben. Potem je $p_1^{-1}(U) = U \times Y$. Sledi, da je $p_1^{-1}(U) \in \mathcal{U}$. □

1.8 Kompaktnost

V tem podpoglavju bomo definirali kompaktnost množice, pokritja in podpokritja ter navedli nekaj izrekov o kompaktnosti.

Definicija 1.41. *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(X)$ poljubna družina množic v X. Pravimo, da je $\mathcal{V}$ pokritje prostora X, če je $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V = X$.*

Definicija 1.42. *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(X)$ poljubna družina množic v X. Pravimo, da je $\mathcal{V}$ odprto pokritje za X, če je pokritje za X in za vsak $V \in \mathcal{V}$ velja, da je $V \in \mathcal{T}$. Če je $|\mathcal{V}| < \infty$, pravimo, da je $\mathcal{V}$ končno pokritje.*

Definicija 1.43. *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(X)$ pokritje množice X. Naj bo še $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Pravimo, da je $\mathcal{U}$ podpokritje pokritja $\mathcal{V}$, če je tudi$\mathcal{U}$ pokritje za X in za vsak $U \in \mathcal{U}$ velja, da je $U \in \mathcal{V}$. $\mathcal{U}$ je končno podpokritje, če je $|\mathcal{U}| < \infty$.*

Definicija 1.44. *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Pravimo, da je X kompakten, če ima vsako odprto pokritje prostora X kakšno končno podpokritje.*

Izrek 1.45. *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ kompakten topološki prostor. Potem vsako zaporedje (x_n) v X vsebuje kakšno konvergentno podzaporedje.*

Dokaz. Dovolj je, da pokažemo, da ima vsako zaporedje v X stekališče v X.
Naj bo (x_n) zaporedje v X. Recimo, da zaporedje (x_n) nima stekališča. Torej za vsak $s \in X$, s ni stekališče od (x_n). Naj bo za vsak $s \in X$, $U_s \in \mathcal{T}$ tak, da je $s \in U_s$ in U_s vsebuje le končno elementov zaporedja (x_n). Potem je $\mathcal{U} = \{U_s \mid s \in X\}$ pokritje za X. Ker je X kompakten, $\mathcal{U}$ vsebuje neko končno podpokritje za X. Naj bo $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ eno takšno končno podpokritje. Potem $\mathcal{V}$ vsebuje neki U_{s_0}, v katerem se nahaja neskončno členov zaporedja (x_n) kar pa je protislovje. □

Izrek 1.46. *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $(A, \mathcal{T}_A)$ in $(B, \mathcal{T}_B)$ kompaktna podprostora od X. Potem je tudi $(A \cup B, \mathcal{T}_{A \cup B})$ kompakten prostor.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ odprto podpokritje za $A \cup B$. Torej je $\mathcal{U}$ odprto pokritje za A in odprto pokritje za B. Ker sta A, B kompaktni, obstajata $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{U}$, ki je končno podpokritje za A, in $\mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{U}$, ki je končno podpokritje za B. Torej je $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ končno podpokritje za $A \cup B$. □

1.9 Kontinuumi

Definicija 1.47. *Kontinuum je neprazen povezan kompakten metrični prostor.*

Definicija 1.48. *Naj bo X kontinuum in $Y \subseteq X$ podprostor. Pravimo, da je Y podkontinuum prostora X, če je Y tudi sam kontinuum.*

Definicija 1.49. *Naj bo X kontinuum. Pravimo, da je X degeneriran, če je $|X| = 1$, sicer je nedegeneriran.*

Zgled. Vsak zaprti interval $[a, b]$ opremljen z evklidsko metriko je kontinuum.

Definicija 1.50. *Vsak kontinuum, ki je homeomorfen zaprtemu intervalu, imenujemo lok.*

Zgled. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ je množica $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \| x \| = 1\}$, ki je opremljena z evklidsko metriko, kontinuum.

Definicija 1.51. *Vsak kontinuum, ki je homeomorfen množici S^n imenujemo, n-sfera.*

Zgled. Naj bo $V = \{(x, \sin(\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, 1]\}$, potem je $\mathrm{Cl}(V)$ kontinuum, ki ga imenujemo Varšavski lok.

Definicija 1.52. *Vsak kontinuum, ki je homeomorfen Varšavskemu loku, imenujemo* $\sin \frac{1}{x}$*-kontinuum.*

Definicija 1.53. *Hilbertova kocka je kontinuum, ki je homeomorfen števnemu produktu zaprtih intervalov:* $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \times \cdots = \prod_{n \in \mathbb{N}} [0, 1]$.

Definicija 1.54. *Kontinuum X je dedno ekvivalenten če:*

1. *X je nedegeneriran,*
2. *za vsak nedegeneriran podkontinuum $Y \subseteq X$ velja, da je Y homeomorfen X.*

Zgled. Lok je dedno ekvivalenten kontinuum.

1.10 Vgnezdeni preseki

Izrek 1.55. *Naj bo za vsak $n \in \mathbb{N}$, X_n neprazen kompakten metrični prostor in za vsak $n \in \mathbb{N}$ $X_{n+1} \subseteq X_n$. Potem je $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ neprazen kompakten metrični prostor.*

Dokaz. Dokaz najdemo v [9]. □

Definicija 1.56. *Naj bo za vsak $n \in \mathbb{N}$, X_n kontinuum in naj velja za vsak $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} \subseteq X_n$. Potem produktu $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ pravimo vgenzdeni presek kontinuumov.*

Izrek 1.57. *Vsak vgnezdeni presek kontinuumov je kontinuum.*

Dokaz. Naj bo za vsak $n \in \mathbb{N}$, X_n kontinuum in naj velja za vsak $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} \subseteq X_n$.
Naj bo $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$. Po izreku 1.55 je K neprazen kompakten metrični prostor. Pokažimo še, da je K povezan.
Recimi, da ni. Potem obstajata $U, V \subseteq K$, da velja:

1. U, V sta odprti v K,
2. $U, V \neq \emptyset$ in $U, V \neq K$,
3. $U \cap V = \emptyset$,
4. $U \cup V = K$.

Ker je $U = K \setminus V$ in $V = K \setminus U$, sta U in V tudi zaprti v K. Torej je $d(U, V) > 0$. Naj bo $r = d(U, V) = \inf\{d(u, v) \mid u \in U, v \in V\}$. Potem lahko definiramo množici $A = \bigcup_{u \in U} K_{\frac{r}{3}}(u)$ in $B = \bigcup_{v \in V} K_{\frac{r}{3}}(v)$.
Očitno je $K = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $K \cap A \neq \emptyset$ in $K \cap B \neq \emptyset$, (saj sta U in V separacija prostora K).
Sedaj pokažimo še, da obstaja tak $m \in \mathbb{N}$, da za vsak $n > m$ velja: $X_n \subseteq A \cup B$.
Recimo, da za vsak $i \in \mathbb{N}$ obstaja točka $x_i \in X_i \backslash (A \cup B)$. Torej smo dobili zaporedje točk (x_i) v kompaktnem prostoru $X_1 \backslash (A \cup B)$. Potem obstaja stekališče s zaporedja (x_i). Torej je $s \notin A \cup B$. Kar pa nas privede do protislovja, saj je $s \in K$.
Torej obstaja $m \in \mathbb{N}$, da je za vsak $n > m$, $X_m \subseteq A \cup B$. Ker je X_m kontinuum, sledi, da je $X_m \subseteq A$ ali $X_m \subseteq B$. Torej je tudi $K \subseteq A$ ali pa je $K \subseteq B$, kar pa je protislovje. Sledi, da je K povezan. □

Zgled. Naj bosta $X_1 = [0, 1]$ in $X_2 = X_1 \backslash (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Za vsak $n \geq 3$ za X_n iz X_{n-1} izvzamemo odprto osrednjo tretjino vsakega intervala. Tako dobimo zaporedje kompaktnih množic X_n, da velja $X_{n+1} \subseteq X_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Potem produkt $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ imenujemo Cantorjeva srednjetretjinska množica, ki ni kontinuum.

Poglavje 2

Hiperprostori, inverzne limite in večlične funkcije

V tem poglavju bomo vpeljali pojem hiperprostora, definirali Hausdorffovo metriko in konvergentna zaporedja v hiperprostorih. Nato bomo definirali inverzne limite ter predstavili nekaj zgledov. Kasneje še definiramo večlične funkcije in s pomočjo teh tudi posplošene inverzne limite. Poglavje zakljucimo z definicijo posplošene dvostrane inverzne limite.

2.1 Hiperprostori

Definicija 2.1. *Naj bo (X, d) metrični prostor. Z $2^X = \{U \subseteq X \mid U \neq \emptyset,\ X \backslash U \text{ odprta v } X\}$ bomo označevali množico vseh zaprtih nepraznih podmnožic množice X.*

Definicija 2.2. *Naj bo (X, d) metrični prostor, $U \in 2^X$ in $\epsilon > 0$. Potem je $N_d(\epsilon, U) = \{x \in X \mid \text{obstaja } u \in U,\ da\ je\ d(u, x) < \epsilon\}$.*
To množico imenujemo epsilonska okolica množice U.

Definicija 2.3. *Naj bo (X, d) metrični prostor. Potem funkciji $H_d : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}$ s predpisom $H_d(U, V) = \inf\{\epsilon > 0 \mid U \subseteq N_d(\epsilon, V),\ V \subseteq N_d(\epsilon, U)\}$ pravimo Hausdorffova metrika.*

Izrek 2.4. *Naj bo (X, d) metrični prostor, H_d Hausdorffova metrika na 2^X, $\epsilon > 0$, $U, V \in 2^X$ in $u \in U$. Potem obstaja tak $v \in V$, da je $d(u, v) < H_d(U, V) + \epsilon$.*

Dokaz. Dokaz najdemo v [9]. □

Izrek 2.5. *Hausdorffova metrika na 2^X je metrika na 2^X.*

Dokaz.

1. Očitno je $H_d(U, V) \geq 0$ za vsak $U, V \in 2^X$.

2. Dokazati je potrebno, da velja $H_d(U, V) = 0$ natanko tedaj, ko je $U = V$.
   Če je $U = V$, je očitno $H_d(U, V) = 0$.
   Naj bosta $U, V \in 2^X$ takšni, da je $H_d(U, V) = 0$. Po definiciji Haudorffove merike velja, da je za vsak $\epsilon > 0$ množica $U \subseteq N_d(\epsilon, V)$. Naj bo $u \in U$ poljuben. Po izreku 2.4 lahko dobimo zaporedje (v_n) v V, da velja: za vsak $n \in \mathbb{N}$ je $d(v_n, u) < \frac{1}{n}$. Opazimo, da to zaporedje konvergira k u. Ker pa je V zaprta, sledi, da je $u \in V$, torej je $U \subseteq V$. Na analogen način dokažemo še obratno inkluzijo.

3. Po definicije Hausdorffove metrike je očitno, da je $H_d(U, V) = H_d(V, U)$ za vsaka $U, V \in 2^X$.

4. Dokazati moramo, da velja $H_d(U, W) \leq H_d(U, V) + H_d(U, W)$ za vse $U, V, W \in 2^X$. Naj bodo $U, V, W \in 2^X$ poljubni in $\epsilon > 0$.
   Potem po izreku 2.4 za vsak $u \in U$ obstaja tak $v \in V$, da je $d(u, v) < H_d(U, V) + \frac{\epsilon}{2}$. Torej tudi za ta $v \in V$ po izreku 2.4 obstaja tak $w \in W$, da je $d(v, w) < H_d(v, W) + \frac{\epsilon}{2}$.
   Ker je d metrika, dobimo $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w) + \epsilon < H_d(U, V) + H_d(V, W) + \epsilon$. Torej je $U \subseteq N_d(H_d(U, V) + H_d(V, W) + \epsilon, W)$. Analogno dokažemo tudi, da je $W \subseteq N_d(H_d(W, V) + H_(V, U) + \epsilon, U)$. Od tod sledi, da je $H_d(U, W) < H_d(U, V) + H_d(V, W) + \epsilon$. Ker pa to velja za vsak $\epsilon > 0$, dobimo željeno neenakost.

□

Definicija 2.6. *Naj bo (X, d) metrični prostor. Potem paru $(2^X, H_d)$ pravimo hiperprostor prostora X.*

Izrek 2.7. *Naj bo (X, d) metrični prostor. Potem veljata naslednji dve trditvi:*

1. *če je (X, d) kompakten, je tudi $(2^X, H_d)$ kompakten,*

2. *če je (X, d) kontinuum, je tudi $(2^X, H_d)$ kontinuum.*

Dokaz. Dokaz najdemo v [9] □

Definicija 2.8. *Naj bo (X, d) metrični prostor in (U_n) zaporedje nepraznih podmnožic množice X. Pravimo, da je:*

1. $\limsup(U_n) = \{x \in X \mid \textit{za vsak } r > 0 \text{ je } K_r(x) \cap U_n \neq \emptyset, \text{ za neskončno mnogo indeksov n}\}$,

2. $\liminf(U_n) = \{x \in X \mid za\ vsak\ r > 0$ je $K_r(x) \cap U_n \neq \emptyset,$ za vse razen morda za končno mnogo indeksov $n\}$.

Definicija 2.9. *Naj bo (X, d) metrični prostor in (U_n) zaporedje nepraznih podmnožic množice X. Pravimo, da je U limita zaporedja (U_n) če je:*

1. $U \subseteq X$,
2. $U = \limsup(U_n) = \liminf(U_n)$.

Izrek 2.10. *Naj bo (X, d) kompakten metrični prostor in (U_n) zaporedje nepraznih zaprtih podmnožic množice X. Potem je U limita zaporedja (U_n) natanko tedaj, ko (U_n) konvergira k U v prostoru $(2^X, H_d)$.*

Dokaz. Dokaz najdemo v [9]. □

2.2 Inverzne limite

V tem podpoglavju bomo vpeljali pojem inverzne limite kot tudi posplošene inverzne limite. Podali bomo tudi nekaj zgledov ter pomembnejših izrekov.

Definicija 2.11. *Naj bo za vsak $n \in \mathbb{N}$, (X_n, d_n) metrični prostor in $f_n : (X_{n+1}, d_{n+1}) \to (X_n, d_n)$ zvezna funkcija. Potem dvojnemu zaporedju $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ pravimo inverzno zaporedje. Metrične prostore X_n imenujemo faktorski prostori, funkcije f_n pa vezne funkcije.*

Definicija 2.12. *Naj bo $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ inverzno zaporedje. Potem je inverzna limita tega inverznega zaporedja podprostor topološkega produkta $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, ki je definiran kot*

$$\varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(x_1, x_2, \ldots) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \mid f_n(x_{n+1}) = x_n \ za\ vsak\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Definicija 2.13. *Naj bo $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ inverzno zaporedje. Potem za vsak $t \in \mathbb{N}$ definiramo $q_t(X_n, f_n) = \{(x_1, x_2, \ldots) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \mid f_n(x_{n+1}) = x_n\ za\ vsak\ n \leq t\}$.*

Izrek 2.14. *Naj bo $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ inverzno zaporedje. Potem je:*

(1) $q_n(X_k, f_k) \supseteq q_{n+1}(X_k, f_k)$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$,

(2) $q_n(X_k, f_k)$ *je homeomorfizem v* $\prod_{k=n+1}^{\infty} X_k$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$,

(3) $\varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} q_n(X_k, f_k)$

Dokaz. Točka (1) je očitna, saj po definiciji $q_{k+1}(X_i, f_i)$ izpolnjuje vse pogoje $q_k(X_i, f_i)$.
Točka (2): naj bo funkcija $\varphi : q_n(X_k, f_k) \to \prod_{k=n+1}^{\infty} X_k$ definirana s predpisom

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots) = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots).$$

Očitno je φ zvezna funkcija. Prav tako pa opazimo, da je tudi inverz zvezna funkcija. Torej je φ homeomorfizem.
Točka (3) sledi neposredno iz definicije 2.12. □

Izrek 2.15. *Naj bo $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ inverzno zaporedje nepraznih kompaktnih metričnih prostorov. Potem je inverzna limita tega zaporedja neprazen kompakten metrični prostor.*

Dokaz. Dokaz sledi neposredno iz tretje točke izreka 2.14 in izreka 1.55.

□

Naslednji zgled nam pokaže, da je lahko inverzna limita tudi prazna množica, če faktorski prostori niso kompaktni.

Zgled. Naj bo za vsak $n \in \mathbb{N}$, $X_n = (0, 1)$ opremljen z evklidsko metriko. Naj bo še za vsak $n \in \mathbb{N}$, $f_n : X_{n+1} \to X_n$ funkcija s predpisom $f_n(x) = \frac{1}{2} \cdot x$ za vsak $x \in X_{n+1}$. Potem je inverzna limita $\varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty} = \emptyset$.

Sedaj bomo podali nekaj zgledov znanih inverznih limit.

Zgled. Naj bo za vsak $n \in \mathbb{N}$, $X_n = [0, 1]$ opremljen z evklidsko metriko. Naj bo še za vsak $n \in \mathbb{N}$, $f_n : X_{n+1} \to X_n$ funkcija s predpisom $f_n(x) = x$ za vsak $x \in X_{n+1}$. Potem je inverzna limita $\varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(x, x, x, \ldots) \mid x \in [0, 1]\}$.
Če definiramo funkcijo $\varphi : \varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty} \to [0, 1]$ s predpisom $\varphi(x, x, x, \ldots) = x$, za vsak $(x, x, x, \ldots) \in \varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$, dobimo homeomorfizem. Torej je ta inverzna limita lok.

Zgled. Naj bo za vsak $n \in \mathbb{N}$, $X_n = [0, 1]$ opremljen z evklidsko metriko. Naj bo še za vsak $n \in \mathbb{N}$, $f_n : X_{n+1} \to X_n$ funkcija s predpisom $f_n(x) = c$, za nek $c \in X_n$ in za vsak $x \in X_{n+1}$. Potem je inverzna limita $\varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(c, c, c, \ldots)\}$.

Zgled. Naj bo za vsak $n \in \mathbb{N}$, $X_n = [0, 1]$ opremljen z evklidsko metriko. Naj bo še za vsak $n \in \mathbb{N}$, $f_n : X_{n+1} \to X_n$ funkcija s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 2x, \ x \leq \frac{1}{2} \\ -x + \frac{3}{2}, \ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} .$$

Potem je inverzna limita $\varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ sin $\frac{1}{x}$-kontinuum. Dokaz najdemo v [5].

Oznaka. V nadaljevanju bomo uporabljali naslednji oznaki:
$X^{\infty} = \varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ in $Y^{\infty} = \varprojlim\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Izrek 2.16. *Naj bosta $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ in $\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$ inverzni zaporedji nepraznih metričnih prostorov in naj bo za vsak $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : X_n \to Y_n$ takšna funkcija, da velja $\varphi_n \circ f_n = g_n \circ \varphi_{n+1}$. Potem za funkcijo $\varphi : X^{\infty} \to Y^{\infty}$, ki je definirana z naslednjim predpisom $\varphi(x_1, x_2, \ldots) = (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \ldots)$ za vsak $(x_1, x_2, \ldots) \in X^{\infty}$, veljajo naslednje lastnosti:*

1. *φ je dobro definirana (φ slika v Y^{∞}),*
2. *če je za vsak $n \in \mathbb{N}$, funkcija φ_n zvezna, je zvezna tudi φ,*
3. *če je za vsak $n \in \mathbb{N}$, funkcija φ_n injektivna, je injektivna tudi φ,*
4. *če je za vsak $n \in \mathbb{N}$, funkcija φ_n homeomorfizem, je tudi φ homeomorfizem.*

Dokaz. Dokaz najdemo v [9]. □

2.3 Večlične funkcije

V tem podpoglavju bomo definirali večlične funkcije.

Definicija 2.17. *Naj bosta (X, d_1) in (Y, d_2) kompaktna metrična prostora. Potem funkciji $f : X \to 2^Y$ pravimo večlična funkcija in pišemo $f : X \multimap Y$.*

Opomba 2.18. *Vsako enolično funkcijo lahko obravnavamo tudi kot večlično na naslednji način. Naj bosta (X, d_1) in (Y, d_2) metrična prostora in $f : X \to Y$ funkcija. Potem je $f' : X \multimap Y$, ki je podana s predpisom $f'(x) = \{f(x)\}$, večlična funkcija.*

Opomba 2.19. *Naj bosta (X, d_1) in (Y, d_2) metrična prostora in $f' : X \multimap Y$ takšna večlična funkcija, da je $|f'(x)| = 1$ za vsak $x \in X$. Potem lahko $f'(x)$ obravnavamo tudi kot enolično funkcijo $f : X \to Y$ s predpisom $f(x) = y$, kjer je $y \in f'(x)$.*

Definicija 2.20. *Naj bo $f : X \multimap Y$ večlična funkcija. Graf funkcije f, oznaka $\Gamma(f)$, je množica $\Gamma(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in f(x)\}$.*

Definicija 2.21. *Naj bo $f : X \multimap Y$ večlična funkcija. Pravimo, da je graf funkcije f surjektiven, če za vsak $y \in Y$ obstaja tak $x \in X$, da je $y \in f(x)$. Če je graf od f surjektiven, lahko definiramo $f^{-1} : Y \multimap X$, katere graf je $\Gamma(f^{-1}) = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in \Gamma(f)\}$.*

Definicija 2.22. *Naj bodo* (X_1, d_1), (X_2, d_2), (X_3, d_3) *metrični prostori in* $f : X_1 \multimap X_2$ *ter* $g : X_2 \multimap X_3$ *večlični funkciji. Potem za vsak* $x \in X_1$ *definiramo* $(g \circ f)(x) = \bigcup_{y \in f(x)} g(y)$.

Definicija 2.23. *Naj bosta* (X, d_1) *in* (Y, d_2) *kompaktna metrična prostora in* $f : X \multimap Y$ *večlična funkcija. Pravimo, da je* f *navzgor polzvezna, če je za vsako odprto množico* $A \subseteq Y$ *množica* $\{a \mid f(a) \subseteq A\}$ *odprta v* X .

Izrek 2.24. *Naj bosta* (X, d_1) *in* (Y, d_2) *kompaktna metrična prostora in* $f : X \multimap Y$ *večlična funkcija. Potem je* f *navzgor polzvezna natanko takrat, ko je* $\Gamma(f)$ *zaprt v* $X \times Y$.

Dokaz. Dokaz najdemo v [9]. □

2.4 Posplošene inverzne limite

V tem poglavju bomo posplošili navadne inverzne limite na posplošene inverzne limite ter podali nekaj pomembnih izrekov in zgledov. Na koncu poglavja bomo definirali še posplošene dvostrane inverzne limite.

Definicija 2.25. *Naj bo za vsak* $n \in \mathbb{N}$, (X_n, d_n) *kompakten metrični prostor in* $f_n : X_{n+1} \multimap X_n$ *navzgor polzvezna večlična funkcija. Potem dvojnemu zaporedju* $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *rečemo posplošeno inverzno zaporedje.*

Definicija 2.26. *Naj bo za vsak* $n \in \mathbb{N}$, (X_n, d_n) *kompakten metrični prostor in* $f_n : X_{n+1} \multimap X_n$ *navzgor polzvezna večlična funkcija. Posplošena inverzna limita posplošenega inverznega zaporedja* $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je podprostor topološkega produkta* $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$, *ki je definiran kot*

$$\underset{\circ\!\!-}{\lim}\{X_n, f_n\} = \{(x_1, x_2, \ldots) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \mid x_n \in f_n(x_{n+1}) \text{ za vsak } n \in \mathbb{N}\}$$

.

Zgled. Naj bo za vsak $n \in \mathbb{N}$, $X_n = [0, 1]$ in $f_n : [0, 1] \multimap [0, 1]$ večlična funkcija z grafom $\Gamma(f_n) = [0, 1] \times \{0, 1\}$. Potem je posplošena inverzna limita Cantorjeva množica $\underset{\circ\!\!-}{\lim}\{X_n, f_n\} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Zgled. Naj bo za vsak $n \in \mathbb{N}$, $X_n = [0, 1]$ in $f_n : [0, 1] \multimap [0, 1]$ navzgor polzvezna večlična funkcija, katere graf je $\Gamma(f_n) = ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{1\} \times [0, 1])$, (vsaka f_n je res navzgor polzvezna, saj je vsak graf $\Gamma(f_n)$ zaprt v $[0, 1] \times [0, 1]$). V posplošeni inverzni limiti $\underset{\circ\!\!-}{\lim}\{X_n, f_n\}$ so vse točke oblike $(\underbrace{0, 0, 0, \ldots, 0}_{t}, s, 1, 1, \ldots)$ za nek $t \geq 0$ in $s \in [0, 1]$ ter točka $(0, 0, 0, \ldots)$. Izkaže se, da je inverzna limita $\underset{\circ\!\!-}{\lim}\{X_n, f_n\}$ lok.

Izrek 2.27. *Naj bo za vsak $n \in \mathbb{N}$, (X_n, d_n) neprazen kompakten metrični prostor in $f_n : X_{n+1} \multimap X_n$ večlična navzgor polzvezna funkcija. Potem je posplošena inverzna limita $\varprojlim\{X_n, f_n\}$ neprazen kompakten metrični prostor.*

Dokaz. Dokaz najdemo v [7]. □

Izrek 2.28. *Naj bo za vsak $n \in \mathbb{N}$, X_n kontinuum in $f_n : X_{n+1} \multimap X_n$ navzgor polzvezna funkcija tako, da je $f_n(x)$ povezan za vsak $x \in X_{n+1}$. Potem je posplošena inverzna limita $\varprojlim\{X_n, f_n\}$ kontinuum.*

Dokaz. Dokaz najdemo v [7]. □

Definicija 2.29. *Naj bo za vsak $z \in \mathbb{Z}$, (X_z, d_z) kompakten metrični prostor in $f_z : X_{z+1} \multimap X_z$ navzgor polzvezna večlična funkcija. Dvojnemu zaporedju $\{X_z, f_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$ pravimo dvostrano posplošeno inverzno zaporedje.*

Definicija 2.30. *Naj bo za vsak $z \in \mathbb{Z}$, (X_z, d_z) kompakten metrični prostor in $f_z : X_{z+1} \multimap X_z$ navzgor polzvezna večlična funkcija. Posplošena dvostrana inverzna limita inverznega zaporedja $\{X_z, f_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$ je podprostor v topološkem produktu $\prod_{z\in\mathbb{Z}} X_z$, ki je definiran kot*

$$\varprojlim\{X_z, f_z\}_{z\in\mathbb{Z}} = \{(\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots) \in \prod_{z\in\mathbb{Z}} X_z \mid x_z \in f_z(x_{z+1}) \text{ za vsak } z \in \mathbb{Z}\}.$$

Poglavje 3

Veliki in debeli kontinuumi

V tem poglavju bomo predstavili posplošene inverzne limite inverznih sistemov nad usmerjenimi grafi. V teoriji inverznih limit je možno raziskovati veliko različnih lastnosti. Ena izmed teh je povezanost. V navadnih inverznih limitah, kjer so vezne funkcije enolične in zvezne, se zlahka opazi, da je tudi inverzna limita povezana, vendar v posplošenih limitah to v splošnem ne velja (tudi če so vsi grafi funkcij povezani, surjektivni in vse funkcije navzgor polzvezne).
Dokazali bomo, da vsaka taka inverzna limita vsebuje neko posebno komponento.

Izrek 3.1. *Za vsako naravno število n naj bo $I_n = [0,1]$ in $f_n : I_{n+1} \multimap I_n$ večlična navzgor polzvezna funkcija tako, da je $\Gamma(f_n)$ povezan in surjektiven. Potem obstaja tak kontinuum C v $\varprojlim\{I_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$, da je za vsako naravno število n, $\pi_{n+1,n}(C) = \Gamma(f_n)$, kjer $\pi_{n+1,n} : \prod_{k=1}^{\infty} I_k \to I_{n+1} \times I_n$ projekcija definirana s predpisom $\pi_{n+1,n}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_{n+1}, x_n)$.*

Dokaz. Glej izrek 4.11. □

Opazimo, če je inverzna limita povezana, lahko za kontinuum C vzamemo kar celo inverzno limito, če pa inverzna limita ni povezana, je dokaz o obstoju takšnega kontinuuma zelo netrivialen.

3.1 Grafi

Definicija 3.2. *Naj bo V poljubna množica in $E \subseteq \{\{u,v\} \mid u, v \in V,\ u \neq v\}$. Paru $G = (V, E)$ pravimo graf, množici V rečemo vozlišča grafa G in za vsak $v \in V$ je v vozlišče. Množica E predstavlja povezave grafa G in vsak element iz E je povezava.*

Definicija 3.3. *Naj bo $n \in \mathbb{N}$ poljuben in $G = (V, E)$ graf ter $u, v \in V$. Vsaki n-terici $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V^n$ pravimo pot v grafu G od u do v, če velja:*

1. $u = v_1$ *in* $v = v_n$,

2. $|\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}| = n$,

3. *za vsak* $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ *je* $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$.

Definicija 3.4. *Naj bo* $G = (V, E)$ *graf. Pravimo, da je graf* G *povezan, če za vsak par vozlišč* $u, v \in V$ *obstaja pot v grafu* G *od* u *do* v.

Definicija 3.5. *Naj bosta* $G = (V_G, E_G)$ *in* $H = (V_H, E_H)$ *grafa.* H *je podgraf grafa* G*, če velja:*

1. $V_H \subseteq V_G$,

2. $E_H \subseteq E_G$.

Definicija 3.6. *Pravimo, da je graf* $G = (V, E)$ *cikel, če lahko* V *zapišemo v obliki* $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, *kjer je* $|V| > 2$ *in je* $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}$.

3.2 Usmerjeni grafi

Definicija 3.7. *Naj bo* V *poljubna množica in* $\overrightarrow{E} \subseteq (V \times V) \setminus \{(v, v) \mid v \in V\}$*. Paru* $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ *pravimo usmerjen graf, množici* V *množica vozlišč grafa* $\overrightarrow{G}$ *in za vsak* $v \in V$ *je* v *vozlišče. Množica* $\overrightarrow{E}$ *predstavlja povezave grafa* G *in vsak element iz* $\overrightarrow{E}$ *je povezava.*

Definicija 3.8. *Naj bo* $\mathcal{G}$ *družina vseh grafov in naj bo* $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ *družina vseh usmerjenih grafov. S* $\psi : \overrightarrow{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ *bomo označevali funkcijo za katero je* $\psi(V, \overrightarrow{E}) = (V, E)$*, kjer je* $E = \{\{u, v\} \mid (u, v) \in \overrightarrow{E}\}$.

Definicija 3.9. *Naj bo* $\overrightarrow{G}$ *usmerjen graf. Pravimo, da je* $\overrightarrow{G}$ *povezan, če je* $\psi(\overrightarrow{G})$ *povezan. To povezanost ponavadi imenujemo tudi šibka povezanost.*

Definicija 3.10. *Naj bo* $\overrightarrow{G}$ *usmerjen graf. Pravimo, da je* $\overrightarrow{G}$ *cikel, če je* $\psi(\overrightarrow{G})$ *cikel ali pa je* $\overrightarrow{G} = (\{a, b\}, \{(a, b), (b, a)\})$*, kjer je* $a \neq b$.

Definicija 3.11. *Naj bosta* $\overrightarrow{G} = (V_{\overrightarrow{G}}, \overrightarrow{E}_{\overrightarrow{G}})$ *in* $\overrightarrow{H} = (V_{\overrightarrow{H}}, \overrightarrow{E}_{\overrightarrow{H}})$ *usmerjena grafa. Pravimo, da je* $\overrightarrow{H}$ *podgraf usmerjenega grafa* $\overrightarrow{G}$*, če velja:*

1. $V_{\overrightarrow{H}} \subseteq V_{\overrightarrow{G}}$;

2. $\overrightarrow{E}_{\overrightarrow{H}} \subseteq \overrightarrow{E}_{\overrightarrow{G}}$.

Definicija 3.12. *Naj bo* $\overrightarrow{G}$ *usmerjen graf. Pravimo, da je* $\overrightarrow{G}$ *drevo, če je* $\overrightarrow{G}$ *povezan in ne vsebuje nobenega cikla.*

Naslednji izrek je zelo znan, zato dokaz izpustimo.

Izrek 3.13. *Naj bo* $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ *povezan usmerjen graf. Potem obstaja tak* $\overrightarrow{F} \subseteq \overrightarrow{E}$*, da je* $\overrightarrow{T} = (V, \overrightarrow{F})$ *drevo.*

3.3 Inverzni sistemi in projekcije

Definicija 3.14. *S $p_1 : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ bomo označevali prvo projekcijo, $p_1(s,t) = s$, in s $p_2 : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ drugo, $p_2(s,t) = t$.*

Definicija 3.15. *Naj bo $f : [0,1] \multimap [0,1]$ večlična navzgor polzvezna funkcija tako, da je $\Gamma(f)$ surjektiven in povezan. Pravimo, da je f šibko c-ireducibilna, če za vsak kontinuum H v $\Gamma(f)$, kjer je $H \neq \Gamma(f)$, sledi, da je $p_1(H) \neq [0,1]$ ali $p_2(H) \neq [0,1]$.*

Definicija 3.16. *Naj bo $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ usmerjen graf. Za vsak $v \in V$ naj bo $I_v = [0,1]$ in za vsak par $(u,v) \in \overrightarrow{E}$ naj bo $f_{v,u} : I_u \multimap I_v$ navzgor polzvezna funkcija. Naj bo $\mathbf{I} = \{I_v \mid v \in V\}$ in $\mathbf{f} = \{f_{v,u} \mid (u,v) \in \overrightarrow{E}\}$. Potem trojico $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ imenujemo inverzni sistem na grafu $\overrightarrow{G}$.*

Funkcija $f_{u,v}$ v teoriji inverznih limit predstavlja večlično funkcijo $I_u \multimap I_v$. Če razumemo "puščico" kot smer množice $\{u,v\}$, dobimo urejeni par (u,v). Ravno zaradi tega je zamenjava indeksov v $\mathbf{f}$ smiselna.

Definicija 3.17. *Naj bo $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ inverzni sistem grafa $\overrightarrow{G}$.*
Inverzna limita inverznega sistema $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ je podprostor topološkega produkta $\prod_{v\in V} I_v$, ki je definiran kot:

$$\underset{\longleftarrow}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G}) = \{(t_v)_{v\in V} \in \prod_{v\in V} I_v \mid t_v \in f_{v,u}(t_u) \text{ za vse } (u,v) \in \overrightarrow{E}\}.$$

Naslednji zgled pokaže, da je to res posplošitev navadnih posplošenih inverznih limit.

Zgled. Naj bo $V = \mathbb{N}$, $\overrightarrow{E} = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ in $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ usmerjen graf. Potem je

$$\underset{\longleftarrow}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G}) = \underset{\longleftarrow}{\lim}\{I_n, f_{n,n+1}\}_{n=1}^{\infty}.$$

Te nove inverzne limite posplošijo tudi dvostrane inverzne limite.

Zgled. Naj bo množica V enaka množici vseh celih števil, $\overrightarrow{E} = \{(n, n+1) \mid n \in V\}$ in $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ usmerjen graf. Potem je $\underset{\longleftarrow}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ dvostrana posplošena inverzna limita.

Definicija 3.18. *Naj bo $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ usmerjen graf in naj bo $w \in V$. Potem definiramo:*

1. *$N(w) = \{v \in V \mid (w,v) \in \overrightarrow{E}$ ali $(v,w) \in \overrightarrow{E}\}$ množica vseh sosedov vozlišča w,*
2. *$\overrightarrow{E}(w) = \{(u,v) \in \overrightarrow{E} \mid u = w$ ali $v = w\}$ množica vseh povezav, ki imajo eno krajišče enako w,*
3. *$\overrightarrow{G}\backslash\{w\} = (V\backslash\{w\}, \overrightarrow{E}\backslash\overrightarrow{E}(w))$ usmerjen graf, kjer izvzamemo vozlišče w in vse povezave, ki imajo za eno izmed svojih krajišč w,*

4. $\overrightarrow{G}_w = (N(w) \cup \{w\}, \overrightarrow{E}(w))$ *usmerjen graf.*

Definicija 3.19. *Naj bo* $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ *usmerjen graf,* $w \in V$ *in* $I_v = [0,1]$ *za vsak* $v \in V$. *Potem bomo označili:*

1. $\pi_u : \prod_{v \in V} I_v \to I_u$ *je projekcija, za katero velja* $\pi_u((t_v)_{v \in V}) = t_u$ *za vsak* $u \in V$,
2. $p_u^w : \prod_{v \in V \setminus \{w\}} I_v \to I_u$ *je projekcija, za katero velja* $p_u^w((t_v)_{v \in V \setminus \{w\}}) = t_u$ *za vsak* $u \in V \setminus \{w\}$,
3. $q_u^w : \prod_{v \in N(w) \cup \{w\}} I_v \to I_u$ *je projekcija, za katero velja* $q_u^w((t_v)_{v \in N(w) \cup \{w\}}) = t_u$ *za vsak* $u \in N(w) \cup \{w\}$.

Prav tako definiramo tudi:

4. $\pi_U : \prod_{v \in V} I_v \to \prod_{v \in U} I_v$ *je projekcija, za katero velja* $\pi_U((t_v)_{v \in V}) = (t_v)_{v \in U}$ *za vsak* $U \subseteq V$,
5. $p_U^w : \prod_{v \in V \setminus \{w\}} I_v \to \prod_{v \in U} I_v$ *je projekcija, za katero velja* $p_U^w((t_v)_{v \in V \setminus \{w\}}) = (t_v)_{v \in U}$ *za vsak* $U \subseteq V \setminus \{w\}$,
6. $q_U^w : \prod_{v \in N(w) \cup \{w\}} I_v \to \prod_{v \in U} I_v$ *je projekcija, za katero velja* $q_U^w((t_v)_{v \in N(w) \cup \{w\}}) = (t_v)_{v \in U}$ *za vsak* $U \subseteq N(w) \cup \{w\}$.

Nazadnje definiramo še:

7. $\pi_{(r,s)} : \prod_{v \in V} I_v \to I_r \times I_s$ *je projekcija, za katero velja* $\pi_{(r,s)}((t_v)_{v \in V}) = (t_r, t_s)$ *za vsak* $(r,s) \in \overrightarrow{E}$,
8. $p_{(r,s)}^w : \prod_{v \in V \setminus \{w\}} I_v \to I_r \times I_s$ *je projekcija za katero velja* $p_{(r,s)}^w((t_v)_{v \in V \setminus \{w\}}) = (t_r, t_s)$ *za vsak* $(r,s) \in \overrightarrow{E} \setminus \overrightarrow{E}(w)$,
9. $q_{(r,s)}^w : \prod_{v \in N(w) \cup \{w\}} I_v \to I_r \times I_s$ *je projekcija za katero velja* $q_{(r,s)}^w((t_v)_{v \in N(w) \cup \{w\}}) = (t_r, t_s)$ *za vsak* $(r,s) \in \overrightarrow{E}(w)$.

Z uporabo zgornjih projekcij definiramo velik in debel kontinuum v inverznih limitah na inverznih sistemih usmerjenega grafa.

Definicija 3.20. *Naj bo* $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ *inverzni sistem nad usmerjenim grafom* $\overrightarrow{G}$ *in naj bo* C *komponenta v* $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$. *Pravimo, da je* C*:*

1. *debel kontinuum v* $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ *z ozirom na* $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$*, če velja:* $\pi_{u,v}(C) = \Gamma(f_{v,u})$ *za vsak par povezav* $(u, v) \in \overrightarrow{E}$*,*
2. *velik kontinuum v* $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ *z ozirom na* $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$*, če velja:* $\pi_u(C) = I_u$ *za vsako vozlišče* $u \in V$*.*

Opomba 3.21. *Očitno velja, če je* C *velik (debel) kontinuum v* $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$*, potem leži v eni od njenih komponent, ki je prav tako velik (debel) kontinuum.*
Če je komponenta od $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ *velik (debel) kontinuum v* $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$*, lahko vsebuje kakšen pravi podkontinuum, ki je prav tako velik (debel) kontinuum.*
Očiten zgled dobimo, če so vsi prostori v inverznem sistemu enaki intervalu $[0, 1]$ *in grafi vseh veznih funckij* $\Gamma(f) = [0, 1] \times [0, 1]$.

Opomba 3.22. *Množica* $A \subseteq \prod_{v \in V} I_v$ *je morda lahko dobljena kot inverzna limita dveh različnih inverznih sistemov* $(\mathbf{I}_1, \mathbf{f}_1, \overrightarrow{G_1})$ *in* $(\mathbf{I}_2, \mathbf{f}_2, \overrightarrow{G_2})$*. Torej je* $A = \varprojlim(\mathbf{I}_1, \mathbf{f}_1, \overrightarrow{G_1}) = \varprojlim(\mathbf{I}_2, \mathbf{f}_2, \overrightarrow{G_2})$*.*
Izkaže se, da obstajajo primeri množice A *tako, da obstaja velik (debel) kontinuum v* A *z ozirom na* $\varprojlim(\mathbf{I}_1, \mathbf{f}_1, \overrightarrow{G_1})$*, vendar ne obstaja velik (debel) kontinuum v* A *z ozirom na* $\varprojlim(\mathbf{I}_2, \mathbf{f}_2, \overrightarrow{G_2})$*.*

Naslednji izrek prevede izrek 3.1 v jezik inverznih limit na inverznih sistemih usmerjenega grafa.

Izrek 3.23. *Naj bo* $\overrightarrow{G} = (\mathbb{N}, \overrightarrow{E})$ *usmerjen graf, kjer je* $\overrightarrow{E} = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ *in naj bo* $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ *inverzni sistem na usmerjenem grafu* $\overrightarrow{G}$*. Če je* $\Gamma(f)$ *surjektiven in povezan za vsak* $f \in \mathbf{f}$*, potem obstaja debel kontinuum v* $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$*.*

Naslednji izrek lahko takoj izpeljemo iz izreka 3.23.

Izrek 3.24. *Naj bo* $\overrightarrow{G} = (\mathbb{N}, \overrightarrow{E})$ *usmerjen graf, kjer je* $\overrightarrow{E} = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$*, in naj bo* $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ *inverzni sistem na usmerjenem grafu* $\overrightarrow{G}$*. Če je* $\Gamma(f)$ *surjektiven in povezan za vsak* $f \in \mathbf{f}$*, potem obstaja velik kontinuum v* $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$*.*

Dokaz. Po izreku 3.23 obstaja debel kontinuum C v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$, torej velja:

$$\pi_n(C) = p_2(\pi_{(n+1,n)}(C)) = p_2(\Gamma(f_{(n,n+1)})) = I_n$$

za vsak $n \in \mathbb{N}$, saj je $\Gamma(f_{(n,n+1)})$ surjektiven. Iz tega sledi, da je C tudi velik kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$.
□

Izrek 3.25. *Naj bo* $\overrightarrow{G} = (\mathbb{N}, \overrightarrow{E})$ *usmerjen graf, kjer je* $\overrightarrow{E} = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ *in naj bo* $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ *inverzni sistem na usmerjenem grafu* $\overrightarrow{G}$*. Naslednji dve trditvi sta ekvivalentni.*

(1) Obstaja debel kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$*.*

(2) Za vsak $f_{n,n+1} \in \mathbf{f}$ obstaja tak kontinuum K_n v $\Gamma(f_{n,n+1})$, da je $p_1(K_n) = I_{n+1}$ in $p_2(K_n) = I_n$.

Dokaz. Predpostavimo, da drži (1), torej obstaja debel kontinuum C v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$.
Naj bo $K_n = \pi_{n+1,n}(C)$ (očitno je K_n kontinuum v $\Gamma(f_{n,n+1})$).
Velja, da je $p_1(K_n) = p_1(\pi_{n+1,n}(C)) = \pi_{n+1}(C) = I_{n+1}$, prav tako pa je $\pi_2(K_n) = \pi_2(\pi_{n+1,n}(C)) = \pi_n(C) = I_n$, saj je po predpostavki C debel kontinuum. Dokazali smo torej točko (2).
Sedaj pa predpostavimo, da drži (2).
Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo K_n kontinuum v $\Gamma(f_{n,n+1})$ tak, da velja $p_1(K_n) = I_{n+1}$ in $p_2(K_n) = I_n$. Naj bo še $g_{n,n+1} : I_{n+1} \multimap I_n$ navzgor polzvezna funkcija, da velja: $\Gamma(g_{n,n+1}) = K_n$. Naj bo $\mathbf{g}$ družina vseh takih funkcij $g_{n,n+1}$.
Po izreku 3.23 sledi, da obstaja tak kontinuum C v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{g}, \overrightarrow{G})$, da velja $\pi_{n+1,n}(C) = \Gamma(g_n)$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Sedaj fiksirajmo ta C. Ker je $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{g}, \overrightarrow{G}) \subseteq \varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$, je tudi C kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$.
Očitno je tudi $\pi_n(C) = I_n$, torej je C debel kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$. $\square$

Poglavje 4

Veliki proti debelim kontinuumom

V tem poglavju bomo predstavili glavni rezultat o velikih in debelih kontinuumih v posplošenih inverznih limitah inverznih sistemov nad usmerjenimi grafi. Navedli bomo tudi pogoje za povezavo med velikim in debelim kontinuumom.

Lema 4.1. *Naj bo $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ usmerjen graf, $w \in V$ in naj bo $I_v = [0, 1]$ za vsako vozlišče $v \in V$. Naj bosta še $f : [0, 1] \to \prod_{v \in V \setminus \{w\}} I_v$ in $g : [0, 1] \to \prod_{v \in N(w) \cup \{w\}} I_v$ zvezni funkciji tako, da velja:*

$$p^w_{N(w)}(f(t)) = q^w_{N(w)}(g(t))$$

za vsak $t \in [0, 1]$. Potem je

$$h : [0, 1] \to \prod_{v \in V} I_v,$$

definirana kot

$$\pi_{V \setminus \{w\}}(h(t)) = f(t) \quad \text{in} \quad \pi_{N(w) \cup \{w\}}(h(t)) = g(t),$$

dobro definirana zvezna funkcija.

Dokaz. Najprej bomo dokazali, da je h dobro definirana funkcija.
Za vsak $v \in V$ velja

$$\pi_v \circ h = \begin{cases} p^w_v \circ f; & v \in V \setminus \{w\}, \\ q^w_v \circ g; & v \in N(w) \cup \{w\}. \end{cases}$$

Potem je $h(t) = ((\pi_v \circ h)(t))_{v \in V}$ za vsak $t \in [0, 1]$. Ker je $p^w_{N(w)}(f(t)) = q^w_{N(w)}(g(t))$ za vsak $t \in [0, 1]$, velja $p^w_v \circ f = q^w_v \circ g$ za vsak $v \in N(w)$. Torej je h dobro definirana.
S tem smo tudi dokazali, da je h zvezna, saj je $\pi_v \circ h$ zvezna funkcija za vsak $v \in V$. □

Lema 4.2. *Naj bo V števna množica, $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ usmerjen povezan graf in $w, w_0 \in V$ takšni, da je $N(w) = \{w_0\}$ in $|\overrightarrow{E}(w)| = 1$.*

Naj bo še $(I, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ inverzni sistem na usmerjenem grafu $\overrightarrow{G}$ takšen, da je $\Gamma(f)$ povezan in surjektiven za vsak $f \in \mathbf{f}$. Naj velja še:

1. *P naj bo kontinuum v $\underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}', \mathbf{f}', \overrightarrow{G} \setminus \{w\})$, kjer je $\mathbf{I}' = \{I_v \mid v \in V \setminus \{w\}\}$ in $\mathbf{f}' = \{f_{v,u} \mid (u,v) \in \overrightarrow{E} \setminus \overrightarrow{E}(w)\}$ tako, da je*
$$p^w_{w_0}(P) = I_{w_0},$$
2. *Q naj bo kontinuum v $\underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}'', \mathbf{f}'', \overrightarrow{G}_w)$, kjer je $\mathbf{I}'' = \{I_v \mid v \in N(w) \cup \{w\}\}$ in $\mathbf{f}'' = \{f_{v,u} \mid (u,v) \in \overrightarrow{E}(w)\}$ tako, da je*
$$q^w_{w_0}(Q) = I_{w_0}.$$

Potem obstaja tak kontinuum C v $\underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$, da velja

$$\pi_{V \setminus \{w\}}(C) = P \quad \text{in} \quad \pi_{N(w) \cup \{w\}}(C) = Q.$$

Dokaz. Naj bodo $x_1, y_1 \in P$ in $x_2, y_2 \in Q$ takšne točke, da velja: $p^w_{w_0}(x_1) = 0$, $p^w_{w_0}(y_1) = 1$, $q^w_{w_0}(x_2) = 0$, in $q^w_{w_0}(y_2) = 1$.
Naj bo (P_n) zaporedje kosoma linearnih lokov v $\prod_{v \in V \setminus \{w\}} I_v$ tako, da je:

1. vsak P_n je lok od x_1 do y_1,
2. $\lim\limits_{n \to \infty} P_n = P$ glede na Hausdorffovo metriko.

Naj bo še (Q_n) zaporedje kosoma linearnih lokov v $\prod_{v \in \{w_0, w\}} I_v$ tako, da je:

1. vsak Q_n je lok od x_2 do y_2,
2. $\lim\limits_{n \to \infty} Q_n = Q$ glede na Hausdorffovo metriko.

Nato za vsak $n \in \mathbb{N}$ definirajmo $f_n : [0,1] \to P_n$ kosoma linearni homeomorfizem tako, da je $f_n(0) = x_1$ in $f_n(1) = y_1$ ter $g_n : [0,1] \to Q_n$ kosoma linearni homeomorfizem, da velja $g_n(0) = x_2$ in $g_n(1) = y_2$.
Sedaj opazimo, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja naslednje:

$$(p^w_{w_0} \circ f_n)(0) = p^w_{w_0}(f_n(0)) = p^w_{w_0}(x_1) = 0,$$

$$(p^w_{w_0} \circ f_n)(1) = p^w_{w_0}(f_n(1)) = p^w_{w_0}(y_1) = 1,$$

$$(q^w_{w_0} \circ g_n)(0) = q^w_{w_0}(g_n(0)) = q^w_{w_0}(x_2) = 0,$$

$$(q^w_{w_0} \circ g_n)(1) = q^w_{w_0}(g_n(1)) = q^w_{w_0}(y_2) = 1.$$

Iz članka [6] (tako imenovan ”Mountain climbing theorem”) sledi, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstajta takšni dve funkciji $\alpha_n, \beta_n : [0,1] \to [0,1]$ tako, da je $\alpha_n(0) = \beta_n(0) = 0$ in $\alpha_n(1) = \beta_n(1) = 1$ ter velja

$$p_{w_0}^{w} \circ f_n \circ \alpha_n = q_{w_0}^{w} \circ g_n \circ \beta_n.$$

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo $h_n : [0,1] \to \prod_{v \in V} I_v$ funkcija definirana kot

$$\pi_{V \setminus \{w\}}(h_n(t)) = f_n(\alpha_n(t)) \quad \text{in} \quad \pi_{N(w) \cup \{w\}}(h_n(t)) = g_n(\beta_n(t))$$

za vsak $t \in [0,1]$. Potem nam lema 4.1 pove, da je h_n dobro definirana zvezna funkcija.
Naj bo še $C_n = h_n([0,1])$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Očitno je, da je C_n kontinuum v $\prod_{v \in V} I_v$, saj je zvezna slika kontinuuma. Prav tako za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\pi_{V \setminus \{w\}}(C_n) = \pi_{V \setminus \{w\}}(h_n([0,1])) = f_n(\alpha_n([0,1])) = P_n$$

in

$$\pi_{N(w) \cup \{w\}}(C_n) = \pi_{N(w) \cup \{w\}}(h_n([0,1])) = g_n(\beta_n([0,1])) = Q_n,$$

saj so vse funkcije $f_n, q_n, \alpha_n, \beta_n$ surjektivne.
Brez izgube za splošnost lahko predpostavimo, da zaporedje (C_n) konvergira v hiperprostoru $2^{\prod_{v \in V} I_v}$. Naj bo $C = \lim\limits_{n \to \infty} C_n$ glede na Hausdorffovo metriko. Očitno je, da je C podkontinuum v Hilbertovem prostoru $\prod_{v \in V} I_v$. Opazimo naslednje

$$\pi_{V \setminus \{w\}}(C) = \pi_{V \setminus \{w\}}(\lim_{n \to \infty} C_n) = \lim_{n \to \infty}(\pi_{V \setminus \{w\}}(C_n)) = \lim_{n \to \infty} P_n = P$$

in

$$\pi_{N(w) \cup \{w\}}(C) = \pi_{N(w) \cup \{w\}}(\lim_{n \to \infty} C_n) = \lim_{n \to \infty}(\pi_{N(w) \cup \{w\}}(C_n)) = \lim_{n \to \infty} Q_n = Q.$$

(to sledi iz rezultatov iz [9].
Sedaj bomo dokazali, da velja $C \subseteq \underset{\longleftarrow\!\circ}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$.
Naj bo $t = (t_v)_{v \in V} \in C$ in $(u, v) \in \overrightarrow{E}$. Pokazali bomo, da je $t_v \in f_{v,u}(t_u)$. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo $\mathbf{t}_n \in C_n$ tak, da je $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{t}_n = \mathbf{t}$. Ločimo naslednji dve možnosti.

1. Naj bo $(u, v) \in \overrightarrow{E} \setminus \overrightarrow{E}(w)$. Očitno je $\pi_v(\mathbf{t}_n) \in p_v^w(P_n)$ in $\pi_u(\mathbf{t}_n) \in p_u^w(P_n)$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, saj je v tem primeru $u, v \in V \setminus \{w\}$. Torej,

$$t_v = \pi_v(\mathbf{t}) = \pi_v(\lim_{n \to \infty} \mathbf{t}_n) = \lim_{n \to \infty} \pi_v(\mathbf{t}_n) \in \lim_{n \to \infty} p_v^w(P_n) = p_v^w(\lim_{n \to \infty} P_n) = p_v^w(P)$$

in

$$t_u = \pi_u(\mathbf{t}) = \pi_u(\lim_{n \to \infty} \mathbf{t}_n) = \lim_{n \to \infty} \pi_u(\mathbf{t}_n) \in \lim_{n \to \infty} p_u^w(P_n) = p_u^w(\lim_{n \to \infty} P_n) = p_u^w(P).$$

Ker je $\pi_{V\setminus\{w\}}(C) = P$, sledi $\pi_{V\setminus\{w\}}(\mathbf{t}) \in P$. Torej je $t_v \in f_{v,u}(t_u)$, saj je $P \subseteq \varprojlim(\mathbf{I}', \mathbf{f}', \overline{G} \setminus \{w\})$.

2. Naj bo $(u, v) \in \overrightarrow{E}(w)$. Očitno je $\pi_v(\mathbf{t}_n) \in q_v^w(Q_n)$ in $\pi_u(\mathbf{t}_n) \in q_u^w(Q_n)$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, saj je v tem primeru $u, v \in N(w) \cup \{w\}$. Torej je

$$t_v = \lim_{n\to\infty} \pi_v(\mathbf{t}_n) \in \lim_{n\to\infty} q_v^w(Q_n) = q_v^w(\lim_{n\to\infty} Q_n) = q_v^w(Q)$$

in

$$t_u = \lim_{n\to\infty} \pi_u(\mathbf{t}_n) \in \lim_{n\to\infty} q_u^w(Q_n) = q_u^w(\lim_{n\to\infty} Q_n) = q_u^w(Q).$$

Ker je $\pi_{N(w)\cup\{w\}}(C) = Q$, sledi $\pi_{N(w)\cup\{w\}}(\mathbf{t}) \in Q$. Torej je $t_v \in f_{v,u}(t_u)$, saj je $Q \subseteq \varprojlim(\mathbf{I}'', \mathbf{f}'', \overline{G}_w)$ $= \Gamma(f_{v,u})$.

$\square$

Lema 4.3. *Naj bo V končna množica, $|V| > 1$, $\overrightarrow{T} = (V, \overrightarrow{E})$ drevo in naj bo še $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{T})$ inverzni sistem na usmerjenem grafu $\overrightarrow{T}$ tako, da je $\Gamma(f)$ povezan in surjektiven za vsak $f \in \mathbf{f}$. Potem obstaja velik kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{T})$.*

Dokaz. Lemo bomo dokazali s pomočjo indukcije po številu elementov (vozlišč) množice V.
Baza indukcije:
$|V| = 2$. Potem je $\mathbf{f} = \{f\}$ za neko funkcijo f za katero velja, da je $\Gamma(f)$ povezan in surjektiven. Naj bo $C = \varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{T})$. Ker je $C = \Gamma(f^{-1})$, sledi, da je C velik kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{T})$.
Korak indukcije:
Naj bo $n \in \mathbb{N}$ poljuben in predpostavimo, da za vsako drevo $\overrightarrow{T} = (V, \overrightarrow{E})$ obstaja velik kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{T})$, če je $|V| \leq n$.
Naj bo $\overrightarrow{T} = (V, \overrightarrow{E})$, kjer je $|V| = n + 1$ in naj bo $w \in V$ tak, da je $|N(w)| = 1$. Naj bo $N(w) = \{w_0\}$. Potem po indukcijski predpostavki sledita naslednji dve trditvi.

1. Obstaja velik kontinuum P v $\varprojlim(\mathbf{I}', \mathbf{f}', \overrightarrow{T} \setminus \{w\})$, kjer je $\mathbf{I}' = \{I_v \mid v \in V \setminus \{w\}\}$ in $\mathbf{f}' = \{f_{v,u} \mid (u, v) \in \overrightarrow{E} \setminus \overrightarrow{E}(w)\}$.

2. Obstaja velik kontinuum Q v $\varprojlim(\mathbf{I}'', \mathbf{f}'', \overrightarrow{T}_w)$, kjer je $\mathbf{I}'' = \{I_v \mid v \in N(w) \cup \{w\}\}$ in $\mathbf{f}'' = \{f_{v,u} \mid (u, v) \in \overrightarrow{E}(w)\}$.

Ker je P velik kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}', \mathbf{f}', \overrightarrow{T} \setminus \{w\})$ in Q velik kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}'', \mathbf{f}'', \overrightarrow{T}_w)$, je $p_{w_0}^w(P) = I_{w_0}$ in $q_{w_0}^w(Q) = I_{w_0}$. Po lemi 4.2 obstaja tak kontinuum C v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{T})$, da velja

$$\pi_{V\setminus\{w\}}(C) = P \quad \text{in} \quad \pi_{N(w)\cup\{w\}}(C) = Q.$$

Sedaj fiksiramo tak C. Pokazali bomo, da je ta C velik kontinuum v $\underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{T})$.

Naj bo $(u, v) \in \overrightarrow{E}$. Ločimo dve možnosti.

1. Če je $(u, v) \in \overrightarrow{E} \setminus \overrightarrow{E}(w)$, tedaj je

$$\pi_{(u,v)}(C) = p^{w}_{(u,v)}(\pi_{V\setminus\{w\}}(C)) = p^{w}_{(u,v)}(P) = \Gamma(f_{v,u}),$$

   saj je P velik kontinuum v $\underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}', \mathbf{f}', \overrightarrow{T} \setminus \{w\})$.

2. Če je $(u, v) \in \overrightarrow{E}(w)$, potem je

$$\pi_{(u,v)}(C) = q^{w}_{(u,v)}(\pi_{N(w)\cup\{w\}}(C)) = q^{w}_{(u,v)}(Q) = \Gamma(f_{v,u}),$$

   saj je Q velik kontinuum $\underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}'', \mathbf{f}'', \overrightarrow{T}_w)$.

□

Lema 4.4. *Naj bo $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ usmerjen graf, $\overrightarrow{F} \subseteq \overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{F}^{-1} = \{(v, u) \mid (u, v) \in \overrightarrow{F}\}$ in naj bo $\overrightarrow{H} = (V, \overrightarrow{F}^{-1} \cup (\overrightarrow{E} \setminus \overrightarrow{F}))$. Naj bo $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ inverzni sistem na usmerjenem grafu $\overrightarrow{G}$, $g_{u,v} = f^{-1}_{v,u}$ za vsak $(u, v) \in \overrightarrow{F}$ in naj bo še $\mathbf{g} = \{g_{u,v} \mid (u, v) \in \overrightarrow{F}\} \cup \{f_{v,u} \mid (u, v) \in \overrightarrow{E} \setminus \overrightarrow{F}\}$. Potem je*

$$\underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{g}, \overrightarrow{H}) = \underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G}).$$

Dokaz. Naj bo $(t_v)_{v\in V} \in \underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ in naj bo $(u, v) \in \overrightarrow{F}^{-1} \cup (\overrightarrow{E} \setminus \overrightarrow{F})$. Ločimo naslednji dve situaciji

(1) če je $(u, v) \in \overrightarrow{E} \setminus \overrightarrow{F}$, potem je $(u, v) \in \overrightarrow{E}$ in zato $t_v \in f_{v,u}(t_u)$,

(2) če je $(u, v) \in \overrightarrow{F}^{-1}$ in ker je

$$s \in f_{u,v}(t) \iff t \in f^{-1}_{u,v}(s)$$

za vsak $s, t \in [0, 1]$. Sledi, da je $t_v \in f^{-1}_{u,v}(t_u) = g_{v,u}(t_u)$.

Torej smo dokazali, da je $\underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G}) \subseteq \underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{g}, \overrightarrow{H})$. Z analognim razmislekom dobimo tudi obratno inkluzijo $\underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G}) \supseteq \underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{g}, \overrightarrow{H})$. □

Nadaljujmo z zanimivim primerom inverznega sistema $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$, kjer $\overrightarrow{G}$ ni usmerjeno drevo.

Zgled. Naj bo $V = \{1, 2, 3\}$, $\overrightarrow{E} = \{(2, 1), (3, 2), (3, 1)\}$ in $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ usmerjen graf.
Za vsak $v \in V$ je $I_v = [0, 1]$. Naj bo še $f_{1,2}(t) = \{t\}$, $f_{2,3}(t) = \{t\}$ in $f_{1,3}(t) = \{1 - t\}$ za vsak $t \in [0, 1]$.
Sedaj opazimo, da je:

$$\underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G}) = \{(t_1, t_2, t_3) \in I_1 \times I_2 \times I_3 \mid t_1 = t_2 = t_3 = \frac{1}{2}\}$$

Torej vidimo, da v inverznem sistemu $\underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ ne obstaja ne velik in ne debel kontinuum, čeprav so vsi grafi vseh funkcij povezani in surjektivni.

Opazimo, da v zgornjem primeru $f_{1,3} \neq f_{1,2} \circ f_{2,3}$. Zato ta zgled služi kot motivacija za definiranje naslednje lastnosti τ.

Definicija 4.5. *Naj bo $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ usmerjen graf in naj bo $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ inverzni sistem na usmerjenem grafu $\overrightarrow{G}$. Pravimo, da ima $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ lastnost τ, če za vsak podgraf $\overrightarrow{C} = (V_C, \overrightarrow{E}_C)$ grafa $\overrightarrow{G}$ velja naslednje:*

če je $\psi(\overrightarrow{C})$ cikel z množico vozlišč $V_C = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\}$ in množico povezav

$$E_C = \{\{w_1, w_2\}, \{w_2, w_3\}, \{w_3, w_4\}, \dots, \{w_{n-1}, w_n\}, \{w_n, w_1\}\}$$

, potem:

1. *če je $(w_1, w_n) \in \overrightarrow{E}$, potem je*

$$\Gamma(g_{w_n,w_{n-1}} \circ g_{w_{n-1},w_{n-2}} \circ \dots \circ g_{w_4,w_3} \circ g_{w_3,w_2} \circ g_{w_2,w_1}) = \Gamma(f_{w_n,w_1}),$$

   kjer je $g_{w_{i+1},w_i} = f_{w_{i+1},w_i}$, če je $(w_i, w_{i+1}) \in \overrightarrow{E}_C$ ali $g_{w_{i+1},w_i} = f^{-1}_{w_i,w_{i+1}}$, če je $(w_{i+1}, w_i) \in \overrightarrow{E}_C$, za vsak $i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$,

2. *če je $(w_n, w_1) \in \overrightarrow{E}$, potem je*

$$\Gamma(g_{w_1,w_2} \circ g_{w_2,w_3} \circ \dots \circ g_{w_{n-3},w_{n-2}} \circ g_{w_{n-2},w_{n-1}} \circ g_{w_{n-1},w_n}) = \Gamma(f_{w_1,w_n}),$$

   kjer je $g_{w_i,w_{i+1}} = f_{w_i,w_{i+1}}$, če je $(w_{i+1}, w_i) \in \overrightarrow{E}_C$ ali $g_{w_i,w_{i+1}} = f^{-1}_{w_{i+1},w_i}$, če je $(w_i, w_{i+1}) \in \overrightarrow{E}_C$, za vsak $i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$.

Lastnost τ za $n = 2$ pomeni $f_{u,v} = f^{-1}_{v,u}$.

Lema 4.6. *Naj bo $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ usmerjen graf in $\overrightarrow{H} = (V, \overrightarrow{F})$ poljuben povezan podgraf grafa $\overrightarrow{G}$. Naj bo $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ inverzni sistem na usmerjenem grafu $\overrightarrow{G}$ z lastnostjo τ in naj bo $\mathbf{f}' = \{f_{v,u} \mid (u, v) \in \overrightarrow{F}\}$. Potem je $\underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}', \overrightarrow{H}) = \underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$.*

Dokaz. Očitno je, da je $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}', \overrightarrow{F}) \subseteq \varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$. Naj bo $t \in \varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$. Ker ima inverzni sistem $(\mathbf{I}, \mathbf{f}', \overrightarrow{F})$ lastnost τ in ker je $\overrightarrow{H}$ povezan sledi, da je $\pi_v(\mathbf{t}) \in f_{v,u}(\pi_u(\mathbf{t}))$ za vsak $(u, v) \in \overrightarrow{E}$. Torej je $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}', \overrightarrow{F}) \supseteq \varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$. □

Naslednji izrek je prvi glavni rezultat v tem poglavju.

Izrek 4.7. *Naj bo V števna množica, $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ povezan usmerjen graf in $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ inverzni sistem na usmerjenem grafu $\overrightarrow{G}$ z lastnostjo τ tako, da je $\Gamma(f)$ povezan in surjektiven za vsak $f \in \mathbf{f}$. Potem obstaja velik kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$.*

Dokaz. Naj bo $\overrightarrow{F} \subseteq \overrightarrow{E}$ taka množica povezav, da je $\overrightarrow{T} = (V, \overrightarrow{F})$ drevo v grafu $\overrightarrow{G}$. Naj bo še $\mathbf{f}' = \{f_{v,u} \mid (u, v) \in \overrightarrow{F}\}$. Po lemi 4.2 sledi, da obstaja velik kontinuum C v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}', \overrightarrow{T})$.
Po lemi 4.6 sledi, da je $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}', \overrightarrow{T}) = \varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$, torej je $C \subseteq \varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$.
Naj bo $u \in V$ poljuben in $v \in V$ takšen, da je $(u, v) \in \overrightarrow{F}$ ali $(v, u) \in \overrightarrow{F}$. Če je $(u, v) \in \overrightarrow{F}$, potem je,

$$\pi_u(C) = p_1(\pi_{(u,v)}(C)) = p_1(\Gamma(f_{v,u})) = I_u.$$

Če pa je $(v, u) \in \overrightarrow{F}$, potem je

$$\pi_u(C) = p_2(\pi_{(v,u)}(C)) = p_2(\Gamma(f_{u,v})) = I_u.$$

Sledi, da je $\pi_u(C) = I_u$ za vsak $u \in V$. Torej je C velik kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$. □

V naslednjem zgledu bomo predstavili, da predpostavke prejšnjega izreka nujno ne zagotavljajo obstoja debele komponente, kar pa bo tudi motivacija za vpeljavo lastnosti σ.

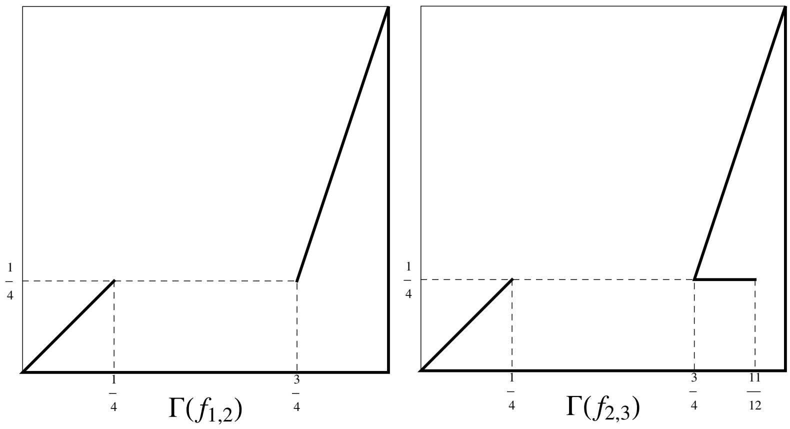
Zgled. Naj bo $V = \{1, 2, 3\}$, $\overrightarrow{E} = \{(3, 2), (2, 1), (1, 3)\}$, $\overrightarrow{F} = \{(3, 2), (2, 1)\}$ in $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ ter $\overrightarrow{T} = (V, \overrightarrow{F})$. Za vsak $v \in V$ naj bo $I_v = [0, 1]$. Naj bosta še $\Gamma(f_{1,2})$ in $\Gamma(f_{2,3})$ funkciji z grafoma predstavljenima na Sliki (4.1) in $\Gamma(f_{1,3})$ funkcija z grafom na Sliki (4.2).

Sledi, da je $f_{1,3} = f_{1,2} \circ f_{2,3}$, grafi vseh funkcij $\Gamma(f_{1,2})$, $\Gamma(f_{2,3})$, $\Gamma(f_{1,3})$ pa so povezani in surjektivni. Naj bo $\mathbf{f} = \{f_{1,2}, f_{2,3}, f_{1,3}\}$ in $\mathbf{g} = \{f_{1,2}, f_{2,3}\}$. Naj še bo

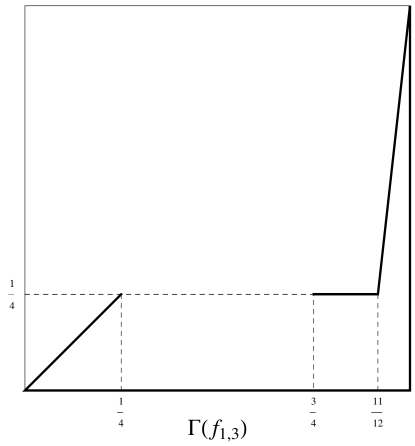
$$C_1 = \left\{(x, y, z) \in I_1 \times I_2 \times I_3 \mid x = y = \frac{1}{4}, z \in \left[\frac{3}{4}, \frac{11}{12}\right]\right\}$$

in

$$C_2 = \varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{g}, \overrightarrow{T}) \setminus C_1.$$



Slika 4.1: Grafa $\Gamma(f_{1,2})$ in $\Gamma(f_{2,3})$



Slika 4.2: Graf $\Gamma(f_{1,3})$

Očitno je C_1 lok in da ni debel kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{g}, \overrightarrow{T})$. Zlahka tudi vidimo, da je C_2 debel kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{g}, \overrightarrow{T})$. Očtno je $C_2 \subseteq \varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$. Ker pa je $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) \in \Gamma(f_{1,3})$ in $\left(\frac{1}{4}, y, \frac{3}{4}\right) \notin C_2$ za vsak $y \in I_2$, sledi, da C_2 ni debel kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$.

Torej v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ ne obstaja debel kontinuum, čeprav so grafi vseh funkcij povezani in surjektivni, inverzni sistem $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ pa ima lastnost τ.

Opomba 4.8. *V prejšnjem zgledu opazimo, da ima inverzni sistem $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ lastnost τ in obstaja debel kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{g}, \overrightarrow{T})$, vendar inverzna limita $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ ne vsebuje debele komponente. Opazimo tudi, da funkcija $f_{1,3}$ ni šibko c-ireducibilna. To je tudi motivacija za definicijo lastnosti σ.*

Definicija 4.9. *Naj bo $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ usmerjen graf in $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ inverzni sistem na usmerjenem grafu $\overrightarrow{G}$. Pravimo, da ima inverzni sistem $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ lastnost σ, če obstaja drevo $\overrightarrow{T} = (V, \overrightarrow{F})$, $\overrightarrow{F} \subseteq \overrightarrow{E}$, da za* *vsako povezavo* $(u,v) \in \overrightarrow{E}$ *velja*

$$(u,v) \notin \overrightarrow{F} \quad \Longrightarrow \quad f_{v,u} \text{ je šibko c-ireducibilna.}$$

Lema 4.10. *Naj bo* V *končna množica in* $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ *povezan usmerjen graf. Naj bo še* $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ *inverzni sistem na usmerjenem grafu* $\overrightarrow{G}$ *z lastnostjo* τ *in* σ *tako, da je* $\Gamma(f)$ *povezan in surjektiven za vsak* $f \in \mathbf{f}$. *Potem obstaja debel kontinuum v* $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$.

Dokaz. Naj bo $\overrightarrow{F} \subseteq \overrightarrow{E}$ in $\overrightarrow{T} = (V, \overrightarrow{F})$ takšno drevo, da za vsako povezavo $(u,v) \in \overrightarrow{E}$ velja

$$(u,v) \notin \overrightarrow{F} \quad \Longrightarrow \quad f_{v,u} \text{ je šibko c-ireducibilna.}$$

Takšno drevo obstaja, saj ima $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ lastnost σ. Po lemi 4.3 obstaja debel kontinuum C v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}', \overrightarrow{T})$, kjer je $\mathbf{f}' = \{f_{v,u} \in \mathbf{f} \mid (u,v) \in \overrightarrow{F}\}$. Vzamimo to debelo komponento C. Po Lemi 4.6 sledi $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}', \overrightarrow{T}) = \varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$, torej je $C \subseteq \varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$. Pokazali bomo, da je C debel kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$.

Naj bo $(u,v) \in \overrightarrow{E}$. Če je $(u,v) \in \overrightarrow{F}$, potem je $\pi_{(u,v)}(C) = \Gamma(f_{v,u})$, ker je C debel kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}', \overrightarrow{T})$.

Predpostavimo, da je $(u,v) \in \overrightarrow{E} \setminus \overrightarrow{F}$. Naj bo $\overrightarrow{C} = (V', \overrightarrow{E}')$ cikel v $\overrightarrow{G}$, da velja:

1. $(u,v) \in \overrightarrow{E}'$,
2. za vsak $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}'$ velja
$$\overrightarrow{e} \neq (u,v) \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{e} \in \overrightarrow{F}.$$

   Naj bo $V' = \{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_{n-1}, w_n\}$, $w_1 = u$, $w_n = v$ in naj bo

$$\{\{w_1, w_2\}, \{w_2, w_3\}, \{w_3, w_4\}, \ldots, \{w_{n-1}, w_n\}, \{w_n, w_1\}\}$$

   množica vseh povezav $\psi(\overrightarrow{C})$, da je

$$\Gamma(g_{w_n, w_{n-1}} \circ g_{w_{n-1}, w_{n-2}} \circ \ldots \circ g_{w_4, w_3} \circ g_{w_3, w_2} \circ g_{w_2, w_1}) = \Gamma(f_{w_n, w_1}),$$

   kjer je $g_{w_{i+1}, w_i} = f_{w_{i+1}, w_i}$, če je $(w_i, w_{i+1}) \in \overrightarrow{E}'$ ali $g_{w_{i+1}, w_i} = f_{w_i, w_{i+1}}$ če je $(w_{i+1}, w_i) \in \overrightarrow{E}'$ za vsak $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$.

Naj bo $K = \pi_{(u,v)}(C)$. Potem je K tak podkontinuum v $\Gamma(f_{v,u})$, da velja $p_1(K) = I_u$ in $p_1(K) = I_v$. Ker je $f_{v,u}$ šibko c-ireducibilna, sledi $K = \Gamma(f_{v,u})$. □

Naslednji izrek je drugi glavni rezultat tega poglavja.

Izrek 4.11. *Naj bo V števna množica, $|V| > 1$, naj bo $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ povezan usmerjen graf in naj bo $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ inverzni sistem na usmerjenem grafu $\overrightarrow{G}$ z lastnostjo τ in σ tako, da je $\Gamma(f)$ povezan in surjektiven za vsak $f \in \mathbf{f}$. Potem obstaja debel kontinuum v $\underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$.*

Dokaz. Upoštevajoč lastnost σ, naj bo $\overrightarrow{T} = (V, \overrightarrow{F})$ takšno drevo, da je $\overrightarrow{F} \subseteq \overrightarrow{E}$ in za vsako povezavo $(u, v) \in \overrightarrow{E}$ velja:

$$(u, v) \notin \overrightarrow{F} \quad \Longrightarrow \quad f_{v,u} \text{ je šibko c-ireducibilna.}$$

Za vsako število $n \in \mathbb{N}$ naj bo $\overrightarrow{T}_n = (V_n, \overrightarrow{F}_n)$ takšno drevo, da velja:

1. V_n je končna za vsak $n \in \mathbb{N}$,
2. $\overrightarrow{T}_n$ je podgraf grafa $\overrightarrow{T}_{n+1}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$,
3. $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ in $\overrightarrow{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overrightarrow{F}_n$.

Za vsako število $n \in \mathbb{N}$ naj bo $\overrightarrow{G}_n = (V_n, \overrightarrow{E}_n)$ podgraf grafa $\overrightarrow{G}$, da velja

1. $\overrightarrow{F}_n \subseteq \overrightarrow{E}_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$,
2. za vsako povezavo $(u, v) \in \overrightarrow{E}_n \setminus \overrightarrow{F}_n$ je $f_{v,u}$ šibko c-ireducibilna za vsak $n \in \mathbb{N}$,
3. $\overrightarrow{G}_n$ je podgraf grafa $\overrightarrow{G}_{n+1}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$,
4. $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ in $\overrightarrow{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overrightarrow{E}_n$.

Očitno je, da ima inverzni sistem $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G}_n)$ lastnost σ. Po lemi 4.10 obstaja debel kontinuum C_n v $\underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G}_n)$. Fiksirajmo ta C_n za vsak $n \in \mathbb{N}$. Naj bo $K_n = C_n \times \prod_{v \in V \setminus V_n} I_v$ za vsako število $n \in \mathbb{N}$. Potem je vsak K_n kontinuum v $\prod_{v \in V} I_v$. Brez izgube za splošnost lahko predpostavimo, da zaporedje (K_n) konvergira v $2^{\prod_{v \in V} I_v}$. Naj bo

$$C = \lim_{n \to \infty} K_n \quad \text{v} \quad 2^{\prod_{v \in V} I_v}.$$

Očitno je, da je C kontinuum. Naj bo $\mathbf{t} \in C$ in $(u, v) \in \overrightarrow{E}$. Potem obstaja takšno število n, da je $(u, v) \in \overrightarrow{E}_n$. Torej je $\pi_v(\mathbf{t}) \in f_{v,u}(\pi_u(\mathbf{t}))$, iz česar pa sledi $C \subseteq \underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$. Sedaj bomo pokazali še, da je C res debel kontinuum v $\underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$.

Naj bo $(u, v) \in \overrightarrow{E}$. Sledi

$$\pi_{(u,v)}(C) = \pi_{(u,v)}(\lim_{n \to \infty} K_n) = \lim_{n \to \infty} \pi_{(u,v)}(K_n) = \Gamma(f_{v,u}).$$

$\square$

Naslednja posledica nam pove, da se glede na obstoj debelih komponent inverzne limite inverznih sistemov nad drevesi obnašajo enako, kot navadne posplošene limite nad zaprtimi intervali.

Posledica 4.12. *Naj bo V števna množica tako, da je $|V| > 1$, naj bo $\overrightarrow{T} = (V, \overrightarrow{E})$ drevo in naj bo $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{T})$ takšen inverzni sistem na grafu $\overrightarrow{T}$, da je $\Gamma(f)$ povezan in surjektiven za vsak $f \in \mathbf{f}$. Potem obstaja debel kontinuum v $\underset{\longleftarrow}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{T})$.*

Dokaz. Drevo $\overrightarrow{T}$ ima obe lastnosti τ in σ. Po Izreku 4.11 sledi, da v $\underset{\longleftarrow}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{T})$ obstaja debel kontinuum. □

Naslednja dva izreka nam bosta podala zvezo med velikimi in debelimi kontinuumi.

Izrek 4.13. *Naj bo V števna množica, $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ usmerjen graf, kjer je $\overrightarrow{E} \neq \emptyset$ in naj bo $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ inverzni sistem nad grafom $\overrightarrow{G}$, ki ima lastnosti τ in σ ter $\Gamma(f)$ je povezan in surjektiven za vsak $f \in \mathbf{f}$. Potem sta naslednji trditvi ekvivalentni.*

(1) Vsak debel kontinuum v $\underset{\longleftarrow}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ je tudi velik kontinuum v $\underset{\longleftarrow}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$.

(2) Za vsako vozlišče $u \in V$ je $N(u) \neq \emptyset$.

Dokaz. Naj bo $\mathcal{K}$ družina vseh povezanih komponent $\overrightarrow{K} = (V_{\overrightarrow{K}}, \overrightarrow{E}_{\overrightarrow{K}})$ grafa $\overrightarrow{G}$ tako, da je $\overrightarrow{E}_{\overrightarrow{K}} \neq \emptyset$ in naj bo $\mathcal{H}$ družina vseh povezanih komponent $\overrightarrow{K} = (V_{\overrightarrow{K}}, \overrightarrow{E}_{\overrightarrow{K}})$ grafa $\overrightarrow{G}$ tako, da je $\overrightarrow{E}_{\overrightarrow{K}} = \emptyset$.
Za vsako povezano komponento $\overrightarrow{K} \in \mathcal{K}$ naj bo $C_{\overrightarrow{K}}$ debel kontinuum v $\underset{\longleftarrow}{\lim}(\mathbf{I}_{\overrightarrow{K}}, \mathbf{f}_{\overrightarrow{K}}, \overrightarrow{K})$ (kjer $\mathbf{I}_{\overrightarrow{K}} \subseteq \mathbf{I}$ označuje $\{I_v \mid v \in V_{\overrightarrow{K}}\}$ in $\mathbf{f}_{\overrightarrow{K}} \subseteq \mathbf{f}$ označuje $\{f_{v,u} \mid (u, v) \in \overrightarrow{E}_{\overrightarrow{K}}\}$). Po izreku 4.11 taka komponenta obstaja. Če obstaja takšno vozliše $u \in V$, da je $N(u) = \emptyset$, potem $\mathcal{H} \neq \emptyset$. Iz tega sledi, da je

$$C = \left(\prod_{\overrightarrow{K} \in \mathcal{K}} C_{\overrightarrow{K}}\right) \times \left(\prod_{\overrightarrow{K} \in \mathcal{H}} \{0\}\right)$$

debel kontinuum v $\underset{\longleftarrow}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$, vendar ni velik kontinuum v $\underset{\longleftarrow}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$.
Sedaj predpostavimo, da drži (2) in da obstaja debel kontinuum C v $\underset{\longleftarrow}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$.
Naj bo $u \in V$ poljubno vozlišče in $v \in V$ takšno vozlišče, da je $(u, v) \in \overrightarrow{E}$ ali $(v, u) \in \overrightarrow{E}$. Če je $(u, v) \in \overrightarrow{E}$, potem je

$$\pi_u(C) = p_1(\pi_{(u,v)}(C)) = p_1(\Gamma(f_{v,u})) = I_u,$$

saj je $\Gamma(f_{v,u})$ surjektivna. Če pa je $(v, u) \in \overrightarrow{E}$, potem je

$$\pi_u(C) = p_2(\pi_{(v,u)}(C)) = p_2(\Gamma(f_{u,v})) = I_u,$$

saj je $\Gamma(f_{u,v})$ surjektivna. Torej je C tudi velik kontinuum v $\underset{\longleftarrow}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$. □

Naslednji zgled nam predstavi obstoj inverznih sistemov, kjer debel kontinuum ni nujno velik.

Zgled. Naj bo $V = \{1,2,3\}$, $\overrightarrow{E} = \{(2,1)\}$ in $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ usmerjen graf. Za vsak $n \in V$ naj bo $I_n = [0,1]$ in $f_{1,2} : I_2 \multimap I_1$ poljubna navzgor polzvezna funkcija tako, da je $\Gamma(f_{1,2})$ povezan in surjektiven. Potem je

$$C = \{(s,t,0) \in I_1 \times I_2 \times I_3 \mid t \in [0,1], (t,s) \in \Gamma(f_{1,2})\}$$

debel kontinuum v $\underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$, vendar ni velik kontinuum v $\underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$, saj je $\pi_3(x,y,z) = 0$ za vsak $(x,y,z) \in C$.

Izrek 4.14. *Naj bo V števna množica, $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ usmerjen graf, da velja $\overrightarrow{E} \neq \emptyset$ in naj bo $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ inverzni sistem na usmerjenem grafu $\overrightarrow{G}$ z lastostjo τ tak, da je $\Gamma(f)$ povezan in surjektiven za vsak $f \in \mathbf{f}$. Naslednji dve trditvi sta ekvivalentni.*

1. *Vsak velik kontinuum v $\underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ je tudi debel kontinuum v $\underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$.*

2. *Za vsak $f \in \mathbf{f}$ je f šibko c-ireducibilna.*

Dokaz. Recimo, da obstaja $f_{v,u}$, ki ni šibko c-ireducibilna za nek $(u,v) \in \overrightarrow{E}$. Naj bo H kontinuum v $\Gamma(f_{v,u})$ tako, da je $H \neq \Gamma(f_{v,u})$, $p_1(H) = [0,1]$ in $p_2(H) = [0,1]$. Naj bo $g_{v,u} : I_u \multimap I_v$ navzgor polzvezna funkcija, da je $\Gamma(g_{v,u}) = H$. Naj bo še za vsak $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E} \setminus \{(u,v)\}$, $g_{\overrightarrow{e}} = f_{\overrightarrow{e}}$ ter naj bo $\mathbf{g} = \{g_{v,u}\} \cup \{g_{\overrightarrow{e}} \mid \overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E} \setminus \{(u,v)\}\}$. Nadalje, naj bo $\mathcal{K}$ množica vseh povezanih komponent grafa $\overrightarrow{G}$. Za vsak $\overrightarrow{K} = (V_{\overrightarrow{K}}, \overrightarrow{E}_{\overrightarrow{K}}) \in \mathcal{K}$ naj bo $C_{\overrightarrow{K}}$ velik kontinuum v $\underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}_{\overrightarrow{K}}, \mathbf{g}_{\overrightarrow{K}}, \overrightarrow{K})$, kjer $\mathbf{I}_{\overrightarrow{K}} \subseteq \mathbf{I}$ predstavlja $\{I_v \mid v \in V_{\overrightarrow{K}}\}$ in $\mathbf{g}_{\overrightarrow{K}} \subseteq \mathbf{g}$ pa predstavlja množico $\{g_{v,u} \mid (u,v) \in \overrightarrow{E}_{\overrightarrow{K}}\}$. Po izreku 4.7 taka komponenta obstaja. Očitno je, da je

$$C = \prod_{\overrightarrow{K} \in \mathcal{K}} C_{\overrightarrow{K}}$$

velik kontinuum v $\underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}_{\overrightarrow{K}}, \mathbf{g}_{\overrightarrow{K}}, \overrightarrow{K})$, saj je $\underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{g}, \overrightarrow{G}) \subseteq \underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ in C ni debela komponeta v $\underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$, ker je $\pi_{(u,v)}(C) \subseteq \Gamma(g_{v,u}) = H \neq \Gamma(f_{v,u})$. Torej smo dokazali, da iz (1) sledi (2).
Sedaj še dokažimo, da iz (2) sledi (1).
Recimo, da (1) ne drži. Potem obstaja velik kontinuum C v $\underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$, ki pa ni debel kontinuum v $\underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$.

Torej obstaja $(u,v) \in \overrightarrow{E}$ takšna, da je $\pi_{(u,v)}(C) \neq \Gamma(f_{v,u})$. Naj bo $H = \pi_{(u,v)}(C)$. Očitno je, da je H podkontinuum v $\Gamma(f_{v,u})$ takšen, da velja:

1. $H \neq \Gamma(f)$,

2. $p_1(H) = [0,1]$ in $p_2(H) = [0,1]$.

Torej $\Gamma(f_{v,u})$ ni šibko c-ireducibilna, kar pa pomeni, da (2) ne drži. $\square$

Naslednji zgled nam poda primer inverznega sistema, kjer velik kontinuum ni debel.

Zgled. Naj bo $V = \{1, 2\}$, $\overrightarrow{E} = \{(2, 1)\}$ in $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$. Naj bo še $I_1 = I_2 = [0, 1]$ in $f_{1,2}(t) = \{t, 1 - t\}$ za vsak $t \in I_2$. Potem je $C = \{(t, t) \mid t \in [0, 1]\}$ velik kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$, vednar ni debel kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$.

Poglavje 5

Odprti problemi

V zadnjem poglavju bomo predstavili še par odprtih problemov (v zvezi z inverznimi sistemi na usmerjenem grafu), ki omogočajo še nadaljno raziskovanje v tej smeri ter odpirajo še mnogo drugih zanimivih poti.

Problem 5.1. *Ali je posplošena inverzna limita vsakega inverznega sistema na usmerjenem grafu neprazen kompakten prostor?*

Problem 5.2. *Karakteriziraj (poišči zadostne pogoje), da bo posplošena inverzna limita inverznega sistema na usmerjenem grafu povezana.*

Problem 5.3. *Ali lahko vsak kontinuum predstavimo kot posplošeno inverzno limito inverznega sistema na usmerjenem grafu?*

Problem 5.4. *Ali lahko vsak kontinuum predstavimo kot posplošeno inverzno limito inverznega sistema na usmerjenem grafu z eno vezno funkcijo?*

Literatura

[1] I. Banič, M. Črepnjak, P. Goričan, T. Kac, M. Merhar, U. Milutinović, *Big and large continua in inverse limits of inverse systems over directed graphs*, Topology Appl. (2020).

[2] I. Banič, M. Črepnjak, M. Merhar, U. Milutinović, *The (weak) full projection property for inverse limits with upper semicontinuous bonding functions*, Mediterr. J. Math. (2018).

[3] I. Banič, M. Črepnjak, M. Merhar, U. Milutinović, T. Sovič, *The Closed Subset Theorem for Inverse Limits with Upper Semicontinuous Bonding Functions*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2019).

[4] I. Banič, J. Kenndy, *Inverse limits with bonding functions whose graphs are arcs*, Topology Appl. (2015).

[5] M. Črepnjak , *Klasifikacija inverznih limit s poševnimi šotorskimi veznimi funkcijami*, doktorska disertacija, (2013).

[6] J. P. Huneke, *Mountain climbing*, Trans. Am. Math. Soc. (1969).

[7] W.T. Ingram, W.S. Mahavier, *Inverse limits of upper semi-continuous set valued functions*, Houston J. Math 2006.

[8] J.R. Munkres, *Topology of first course*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1975).

[9] S. B. Nadler, *Continuum theory. An introduction*, Marcel Dekker, Inc., New York, (1992).