UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Oddelek za matematiko in računalništvo

MAGISTRSKO DELO

Katarina Domjan

Maribor, 2020

UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Oddelek za matematiko in računalništvo

Magistrsko delo

Razširjanje veznih funkcij posplošenih inverznih zaporedij

na študijskem programu 2. stopnje Matematika

Mentor: Kandidatka:

prof. dr. Iztok Banič Katarina Domjan

Maribor, 2020

ZAHVALA

Prišel sem do spoznanja, da je celoten svet enigma, neškodljiva enigma, ki jo naredi strašno naše prepričanje, da ima nekakšno skrito resnico. - Umberto Eco

Zahvala gre mentorju prof. dr. Iztoku Baniču, ki mi je s svojimi predavanji in povabili na delavnice predstavil svet topologije in teoretične matematike. Prav tako se mu zahvaljujem za vso pomoč, čas in priložnosti.

Posebna hvala še družini za vso podporo ob študiju.

Vsem iskreno hvala.

DOMJAN, K. : Razširjanje veznih funkcij posplošenih inverznih zaporedij. Magistrsko delo, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Oddelek za matematiko in računalništvo, 2020.

IZVLEČEK

V članku [1] avtorji karakterizirajo zaprte množice A prostora $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$, kjer so (X_n, d_n) neprazni kompaktni metrični prostori za poljubno naravno število n, za katere obstajajo zaprte podmnožice Y_n množic X_n in navzgor polzvezne večlične funkcije $f_n : (Y_{n+1}, d_{n+1}) \multimap (Y_n, d_n)$ tako, da je A posplošena inverzna limita posplošenega inverznega zaporedja $(Y_n, f_n)_{n=1}^{\infty}$. Na koncu so podali odprt problem:
Naj bo (X_n, d_n) kompaktni metrični prostor za vsako naravno število n in naj bo A neprazna zaprta podmnožica $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Ali sta naslednji trditvi ekvivalentni?

1. Obstajajo zaprte podmnožice Y_n množic X_n in navzgor polzvezne večlične funkcije $g_n : (Y_{n+1}, d_{n+1}|_{Y_{n+1}}) \multimap (Y_n, d_n|_{Y_n})$ tako, da je A inverzna limita posplošenega inverznega zaporedja $(Y_n, g_n)_{n=1}^{\infty}$.
2. Obstajajo navzgor polzvezne večlične funkcije $f_n : (X_{n+1}, d_{n+1}) \multimap (X_n, d_n)$ tako, da je A inverzna limita posplošenega inverznega zaporedja $(X_n, f_n)_{n=1}^{\infty}$.

V uvodnem poglavju magistrskega dela se definirajo osnovni pojmi metričnih prostorov, topoloških prostorov, povezanosti in kompaktnosti le-teh ter kontinuumov. Dokažejo se osnovne lastnosti.

V drugem poglavju se spozna pojem inverznih zaporedij in inverznih limit enoličnih ter večličnih funkcij.

V tretjem poglavju se dokažejo glavni rezultati, ki rešijo odprt problem v pozitivno.

V četrtem poglavju se spozna krepka in šibka $\mathcal{L}$-razširitvena lastnost posplošenih inverznih zaporedij kot posledica glavnih rezultatov tretjega poglavja in se podrobneje dokaže lastnost krepke in šibke surjektivne razširitvene lastnosti.

Ključne besede: metrični prostor, topološki prostor, kontinuum, kompaktnost, posplošeno inverzno zaporedje, posplošena inverzna limita, razširitvene funkcije, šibka surjektivna razširitvena lastnost, krepka surjektivna razširitvena lastnost.

DOMJAN, K. : Extending bonding functions in generalized inverse sequences.
Master Thesis, University of Maribor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Department of Mathematics and Computer Science, 2020.

ABSTRACT

In [1] authors characterize closed sets A of $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$, where (X_n, d_n) is a non-empty compact metric space for each positive integer n, for which there are closed subsets Y_n of X_n and upper semicontinuous functions $f_n : (Y_{n+1}, d_{n+1}) \multimap (Y_n, d_n)$ such that A is the inverse limit of inverse sequence $(Y_n, f_n)_{n=1}^{\infty}$. At the end of their paper, an open problem is given:
Let (X_n, d_n) be a compact metric space for each positive integer n and A be a non-empty closed subset of $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Are the following statements equivalent?

1. There are closed subsets Y_n of X_n and upper semicontinuous functions $g_n : (Y_{n+1}, d_{n+1}|_{Y_{n+1}}) \multimap (Y_n, d_n|_{Y_n})$ such that A is the inverse limit of inverse sequence $(Y_n, g_n)_{n=1}^{\infty}$.
2. There are upper semicontinuous functions $f_n : (X_{n+1}, d_{n+1}) \multimap (X_n, d_n)$ such that A is the inverse limit of inverse sequence $(X_n, f_n)_{n=1}^{\infty}$.

In the introductory chapter basics definitions of metric spaces, topological spaces, connectedness, compactness and continua are given. Basic properties are proven as well.

In the second chapter we define the notion of inverse sequences and inverse limits of single-valued and set-valued functions.

In the third chapter we proof the main results that give the answer to the above mentioned problem in positive.

In the fourth chapter we introduce the notions of strong and weak $\mathcal{L}$-extension property of an inverse sequence as a corollary of main results of chapter three. We also discuss the strong and weak surjective extension properties of an inverse sequence.

Key words: metric space, topological space, continuum, compact, generalized inverse sequence, generalized inverse limit, extending bonding functions, weak surjective extension property, strong surjective extension property.

Kazalo

Poglavje 1

Uvod

1.1 Metrični prostori

V tem poglavju spoznamo pojem metričnih prostorov, odprtih krogel in odprtih množic metričnih prostorov. Ogledamo si metrike na podprostorih in kartezičnem produktu metričnih prostorov. Sledi definicija zaprtih množic, defincija notranjosti, zaprtja in roba množice. Na koncu poglavja je dana definicija zaporedja, konvergentnosti zaporedja in zveznosti funkcije. Dokažeta se povezavi med zaprtostjo množice, zaporedjem in zveznostjo funkcije.

1.1.1 Metrika in odprte množice

V tem podpoglavju definiramo metrične prostore in si ogledamo nekaj primerov metrik. Nadalje definiramo odprte krogle in odprte množice metričnih prostorov ter dokažemo njihove glavne lastnosti.

Definicija 1.1. *Naj bo X množica. Funkcija $d : X \times X \to \mathbb{R}$ je metrika na X, če veljajo naslednje lastnosti:*

1. *za vsaka $x, y \in X : d(x, y) \geq 0$,*
2. *za vsaka $x, y \in X : d(x, y) = 0 \iff x = y$,*
3. *za vsaka $x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$,*
4. *za vsake $x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.*

Paru (X, d) pravimo metrični prostor.

Primer. *Poglejmo si nekaj primerov metrik.*

1. *Naj bo $X = \mathbb{R}$ in x ter y poljubna elementa iz X. Dokažimo, da je funkcija $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s predpisom $d(x, y) = |x - y|$ metrika na $\mathbb{R}$. Naj bodo $x, y, z \in \mathbb{R}$ poljubni.*

   (a) *Prva točka definicije je očitna zaradi absolutne vrednosti.*

   (b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$.

   (c) $d(x, y) = |x - y| = |(-1) \cdot (y - x)| = |(-1)| \cdot |y - x| = |y - x| = d(y, x)$.

   (d) $d(x, z) = |x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$.

2. *Naj bo $X = \mathbb{R}^2$ in točki (x_1, y_1), (x_2, y_2) poljubni točki iz X. Funkcija $d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom*

$$d_2(\,(x_1, y_1), (x_2, y_2)\,) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

   je metrika na $\mathbb{R}^2$.

3. *Naj bo $X = \mathbb{R}^2$ in (x_1, y_1), (x_2, y_2) poljubni točki iz X. Funkcija $d_p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom*

$$d_p(\,(x_1, y_1), (x_2, y_2)\,) = (|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p)^{\frac{1}{p}}$$

   je metrika na $\mathbb{R}^2$ za vsak $p \geq 1$. Za $p < 1$ nastanejo težave pri četrti točki definicije.

4. *Naj bo X poljubna neprazna množica in x, y poljubna elementa množice X. Naj bo funkcija $d : X \times X \to \mathbb{R}$, podana s predpisom*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0; & x = y, \\ 1; & x \neq y. \end{cases}$$

   Preslikava d je metrika na X in jo imenujemo diskretna metrika.

Definicija 1.2. *Naj bo (X, d) metrični prostor, $x \in X$ in $r > 0$. Naslednjo množico*

$$K(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

imenujemo odprta krogla s središčem v točki x in radijem r.

Definicija 1.3. *Naj bo (X, d) metrični prostor in $U \subseteq X$. Podmnožica U je odprta v X, če za vsak $x \in U$ obstaja $r_x > 0$ tako, da je $K(x, r_x) \subseteq U$.*

Izrek 1.4. *Naj bo (X, d) metrični prostor, $a \in X$ in $r > 0$. Potem je $K(a, r)$ odprta v X.*

Dokaz. Očitno je $K(a,r) \subseteq X$. Za vsak $x \in K(a,r)$ naj bo $r_x = \frac{r-d(x,a)}{2}$. Naj bo $y \in K(x,r_x)$ poljuben. Potem je $d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a) \leq r_x + d(x,a) = \frac{r-d(x,a)}{2} + d(x,a) = \frac{r}{2} + \frac{d(x,a)}{2} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$. Odprta krogla $K(x,r_x) \subseteq K(a,r)$ za vsak $x \in K(a,r)$. Sledi, da je $K(a,r)$ odprta množica v X. □

Izrek 1.5. *Naj bo (X,d) metrični prostor in naj bo $U \subseteq X$. Množica U je odprta v X natanko tedaj, ko lahko U zapišemo kot unijo odprtih krogel v X.*

Dokaz. Najprej pokažimo implikacijo v desno. Množica U je odprta, zato lahko za vsak $x \in U$ najdemo $r_x > 0$ tako, da je $K(x,r_x) \subseteq U$. Očitno je $U = \bigcup_{x \in U} K(x,r_x)$. Sedaj pokažimo implikacijo v levo. Vemo, da je $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} K(x_\lambda, r_\lambda)$, kjer je $r_\lambda > 0$ za vsak $\lambda \in \Lambda$. Naj bo $x \in U$ poljuben. Potem obstaja $\lambda_0 \in \Lambda$, tako da je $x \in K(x_{\lambda_0}, r_{\lambda_0})$. Ker je $K(x_{\lambda_0}, r_{\lambda_0})$ odprta, obstaja $r_x > 0$ tako, da je $K(x,r_x) \subseteq K(x_{\lambda_0}, r_{\lambda_0}) \subseteq U$. □

Definicija 1.6. *Naj bo (X,d) metrični prostor. Potem družini vseh odprtih množic v (X,d)*

$$\mathcal{T}_d = \{U \subseteq X \mid U \text{ odprta v } X\}$$

pravimo topologija na X.

Izrek 1.7. *Naj bo (X,d) metrični prostor. Veljajo naslednje trditve:*

1. $\emptyset,\ X \in \mathcal{T}_d$,
2. *za vsak* $\alpha \in I,\ U_\alpha \in \mathcal{T}_d$ *sledi, da je* $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathcal{T}_d$,
3. *za vsak* $U, V \in \mathcal{T}_d$ *sledi, da je* $U \cap V \in \mathcal{T}_d$.

Dokaz. Najprej dokažimo 1. Za vsak $x \in \emptyset$ je $K(x,r) \subseteq \emptyset$, kjer je $r > 0$ poljuben. Za vsak $x \in X$ je odprta krogla $K(x,r_x) \subseteq X$, kjer je $r_x > 0$ poljuben. Sedaj dokažimo 2. Naj bo $x \in \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Obstaja $\alpha_0 \in I$ tako, da je $x \in U_{\alpha_0}$. Ker je U_{α_0} odprta množica, obstaja $r > 0$ tako, da je $K(x,r) \subseteq U_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Nazadnje pokažimo 3. Naj bosta U in V odprti množici v X. Dokažimo, da je $U \cap V$ odprta v X. Naj bo $x \in U \cap V$ poljuben. Potem je $x \in U$ in $x \in V$. Ker sta U in V odprti, obstajata $r_1 > 0$ in $r_2 > 0$ tako, da je $K(x,r_1) \subseteq U$ *in* $K(x,r_2) \subseteq V$. Vzemimo za $r_0 = \min\{r_1, r_2\}$. Potem je $K(x,r_0) \subseteq K(x,r_1) \subseteq U$ in $K(x,r_0) \subseteq K(x,r_2) \subseteq V$. Sledi, da je $K(x,r_0) \subseteq U \cap V$.

□

1.1.2 Metrika podprostorov in kartezičnih produktov

V tem podpoglavju spoznamo pojem metrike na podprostorih metričnih prostorov in kartezičnem produktu dveh metričnih prostorov ter kartezičnem produktu neskončno mnogo metričnih prostorov.

Izrek 1.8. *Naj bo (X, d) metrični prostor, Y podmnožica množice X in x, y poljubna elementa iz Y. Potem je funkcija $d|_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$ s predpisom*

$$d|_Y(x, y) = d(x, y)$$

metrika na Y. Metričnemu prostoru $(Y, d|_Y)$ pravimo metrični podprostor metričnega prostora (X, d).

$$(X, d) \longrightarrow (Y, d_Y)$$

Slika 1.1: Shema podprostora

Dokaz. Rezultat sledi iz dejstva, da je d metrika na X in $Y \subseteq X$. □

Izrek 1.9. *Naj bosta (X, d_1) in (Y, d_2) metrična prostora ter (x_1, y_1), (x_2, y_2) poljubna elementa iz kartezičnega produkta $X \times Y$. Tedaj je $D : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}$ s predpisom*

$$D(\,(x_1, y_1), (x_2, y_2)\,) = \max\{d_1(x_1, x_2),\ d_2(y_1, y_2)\}$$

metrika na $X \times Y$. Metriki D pravimo produktna metrika na $X \times Y$ dobljena iz metrik d_1 in d_2.

$$(X, d_1),\ (Y, d_2) \longrightarrow (X \times Y, D)$$

Slika 1.2: Shema kartezičnega produkta dveh prostorov

Dokaz. Dokažimo po definiciji metrike. Točka 1. in 3. definicije 1.1 sledita iz dejstva, da sta d_1 in d_2 metriki. Pokažimo točko 2. Dokazujemo, da je $D(\,(x_1, y_1), (x_2, y_2)\,) = 0 \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

$$D(\,(x_1, y_1), (x_2, y_2)\,) = \max\{d_1(x_1, x_2),\ d_2(y_1, y_2)\} = 0$$

$$\Leftrightarrow d_1(x_1, x_2) = 0 \text{ in } d_2(y_1, y_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ in } y_1 = y_2$$

$$\Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2).$$

Sedaj pokažimo točko 4. Naj bodo točke (x_1, y_1), (x_2, y_2) in (x_3, y_3) iz $X \times Y$ poljubne. Dokažimo, da je $D(\,(x_1, y_1), (x_2, y_2)\,) \leq D(\,(x_1, y_1), (x_3, y_3)\,) + D(\,(x_2, y_2), (x_3, y_3)\,)$.

$$D(\,(x_1, y_1), (x_3, y_3)\,) + D(\,(x_2, y_2), (x_3, y_3)\,) =$$

$$= \max\{d_1(x_1, x_3)),\ d_2(y_1, y_3)\} + \max\{d_1(x_3, x_2)),\ d_2(y_3, y_2)\} \geq$$

$$\geq \max\{d_1(x_1,x_3)) + d_1(x_3,x_2),\ d_2(y_1,y_3) + d_2(y_3,y_2)\} \geq$$

$$\geq \max\{d_1(x_1,x_2), d_2(y_1,y_2)\} = D(\,(x_1,y_1),(x_2,y_2)\,).$$

□

Izrek 1.10. *Naj bo (X,d) metrični prostor in x, y poljubna elementa iz X. Definiramo funkcijo $\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ s predpisom*

$$\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}.$$

Veljata naslednji trditvi.

1. *Funkcija δ je metrika na X.*
2. *Za vsak x, $y \in X$ je $\delta(x,y) \in [0,1)$.*

Dokaz. Prvo pokažimo, da je preslikava $\delta(x,y)$ metrika. Naj bodo $x,y,z \in X$ poljubni.

1. $\delta(x,y) \geq 0$, saj je števec $d(x,y)$ nenegativno število in imenovalec $1+d(x,y)$ pozitivno število.
2. $\delta(x,y) = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
3. $\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = \delta(y,x)$.
4. $\delta(x,z) = \frac{-1+1+d(x,z)}{1+d(x,z)} = 1 - \frac{1}{1+d(x,z)} \leq 1 - \frac{1}{1+d(x,y)+d(y,z)} = \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} = \delta(x,y) + \delta(y,z)$.

Dokažimo drugo točko izreka. Ker je $1 + d(x,y) > d(x,y)$ za vsak $x,y \in X$, sledi, da je $\delta(x,y) < 1$. Da je $\delta(x,y) \geq 0$, smo dokazali že v prvi točki definicije metrike. □

Izrek 1.11. *Naj bo za vsako naravno število n par (X_n, d_n) metrični prostor, kjer za vsako naravno število n in za poljubna $x,y \in X_n$ velja, da je $d_n(x,y) < 1$. Tedaj je funkcija $D : (\prod_{n=1}^{\infty} X_n) \times (\prod_{n=1}^{\infty} X_n) \to \mathbb{R}$ definirana s predpisom $D(\underline{x},\underline{y}) = \max\left\{\frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$, kjer sta $\underline{x} = (x_1,x_2,x_3,...)$ in $\underline{y} = (y_1,y_2,y_3,...)$ poljubna elementa iz $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$, metrika na $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Paru $(\prod_{n=1}^{\infty} X_n, D)$ pravimo produkt metričnih prostorov, metriki D pa produktna metrika.*

$$(X_1,d_1), (X_2,d_2), (X_3,d_3), ... \longrightarrow (\textstyle\prod_{n=1}^{\infty} X_n, D)$$

Slika 1.3: Shema kartezičnega produkta števno mnogo prostorov

Dokaz. Prvo pokažimo, da je preslikava D dobro definirana oziroma, da zares obstaja maksimum množice $\left\{\frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} = A$. Ker je množica A navzgor omejena z 1 in navzdol z 0, obstaja

$\sup(A)$. Dokažimo, da je ta $\sup(A) = \max(A)$. Če je $x = y$, potem je $A = \{0\}$, torej $\max(A) = 0$. Predpostavimo, da je $x \neq y$. Torej obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$ tako, da je $x_{n_0} \neq y_{n_0}$. Posledično je $r_0 = \frac{d_{n_0}(x_{n_0}, y_{n_0})}{2^{n_0}} > 0$. Ker velja, da je za vsako naravno število n

$$0 \leq \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} \text{ in } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

sledi, da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} = 0.$$

Naj bo n_1 tako naravno število, da za vsak $n \geq n_1$ velja, da je $\frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} < r_0$. Potem je

$$\sup(A) = \max\left\{\frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} \mid n \in \{1, 2, ..., n_1\}\right\} = \max(A).$$

Sedaj pokažimo, da je preslikava D zares metrika na $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Naj bodo $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, ...)$, $\underline{y} = (y_1, y_2, y_3, ...)$ in $\underline{z} = (z_1, z_2, z_3, ...) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ poljubni.

1. $D(\underline{x}, \underline{y}) = \max\left\{\frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \geq 0$, saj je za vsako naravno število n, $\frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} \geq 0$.
2. $D(\underline{x}, \underline{y}) = \max\left\{\frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $d_n(x_n, y_n) = 0$ $\Leftrightarrow$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, $x_n = y_n \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{y}$.
3. $D(\underline{x}, \underline{y}) = \max\left\{\frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} = \max\left\{\frac{d_n(y_n, x_n)}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} = D(\underline{y}, \underline{x})$, saj so za vsak $n \in \mathbb{N}$ preslikave d_n metrike na X_n.
4. Naj bo množica $B = \max\left\{\frac{d_n(x_n, y_n) + d_n(y_n, z_n)}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$. Ker je B omejena, obstaja $\sup(B)$. Še več, $\sup(B) = \max(B)$ po podobnem argumentu kot za množico A. Torej obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $\max(B) = \frac{d_{n_0}(x_{n_0}, y_{n_0}) + d_{n_0}(y_{n_0}, z_{n_0})}{2^{n_0}}$. Velja naslednje,

$$\begin{aligned}
D(\underline{x}, \underline{z}) = \max\left\{\frac{d_n(x_n, z_n)}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} &\leq \max\left\{\frac{d_n(x_n, y_n) + d_n(y_n, z_n)}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \\
&= \max(B) = \frac{d_{n_0}(x_{n_0}, y_{n_0})}{2^{n_0}} + \frac{d_{n_0}(y_{n_0}, z_{n_0})}{2^{n_0}} \\
&\leq \max\left\{\frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} + \max\left\{\frac{d_n(y_n, z_n)}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \\
&= D(\underline{x}, \underline{y}) + D(\underline{y}, \underline{z})
\end{aligned}$$

.

□

1.1.3 Zaprte množice

Spoznamo pojem zaprtih množic, družine zaprtih množic in njene lastnosti.

Definicija 1.12. *Naj bo (X, d) metrični prostor in $V \subseteq X$. Podmožica V je zaprta v X, če je $X \backslash V = V^C$ odprta v X.*

Definicija 1.13. *Naj bo (X, d) metrični prostor. Potem z*

$$\mathcal{Z}_d = \{V \subseteq X | \, V \text{ je zaprta v } X\}$$

označujemo družino vseh zaprtih množic v (X, d).

Izrek 1.14. *Naj bo (X, d) metrični prostor. Tedaj velja:*

1. $\emptyset,\ X \in \mathcal{Z}_d$,
2. *za vsak* $\alpha \in I,\ V_\alpha \in \mathcal{Z}_d$ *sledi, da je* $\bigcap_{\alpha \in I} V_\alpha \in \mathcal{Z}_d$,
3. *za vsak* $U, V \in \mathcal{Z}_d$ *sledi, da je* $U \cup V \in \mathcal{Z}_d$.

Dokaz. [5, str. 94]. □

1.1.4 Notranjost, meja in zaprtje množice

Definiramo notranjost, zaprtje in rob množice ter njihove lastnosti. Dokažemo, kako prepoznati odprte oziroma zaprte množice s pomočjo le-teh.

Definicija 1.15. *Naj bo (X, d) metrični prostor in $A \subseteq X$. Tedaj množici*

1. $\mathrm{Int}(A) = \{x \in X \mid \exists r > 0 : K(x, r) \subseteq A\}$ *pravimo notranjost množice A,*
2. $\mathrm{Bd}(A) = \{x \in X \mid \forall r > 0 : K(x, r) \cap A \neq \emptyset \text{ in } K(x, r) \cap A^C \neq \emptyset\}$ *pravimo meja množice A,*
3. $\mathrm{Cl}(A) = \{x \in X \mid \forall r > 0 : K(x, r) \cap A \neq \emptyset\}$ *pravimo zaprtje množice A.*

Opomba 1.16. *Oznaka:* $\mathrm{Cl}(A) = \overline{A}$.

Izrek 1.17. *Množica* $\mathrm{Int}(A)$ *je največja odprta množica vsebovana v A kot podmnožica.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{T}_d \mid U \subseteq A\}$. Dokazujemo, da je $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = \mathrm{Int}(A)$. Naj bo $x \in \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ poljuben. Potem obstaja $U_0 \in \mathcal{U}$ tako, da je $x \in U_0$. Ker je U_0 odprta množica, obstaja $r > 0$ tako, da je $K(x, r) \subseteq U \subseteq A$. Sledi $x \in \mathrm{Int}(A)$. Naj bo sedaj $y \in \mathrm{Int}(A)$ poljuben. Torej obstaja $r > 0$ tako,

da je $K(y,r) \subseteq A$. Sledi, da je $K(y,r) \in \mathcal{U}$ oziroma, da je $K(y,r) \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$.
Ker je po izreku 1.7 unija odprtih množic odprta množica, smo dokazali, da je $\mathrm{Int}(A)$ res odprta. Dokažimo še, da je največja taka. Vzemimo poljubno odprto množico V, za katero velja, da je $V \subseteq A$. Potem je $V \in \mathcal{U}$ oziroma $V \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = \mathrm{Int}(A)$. □

Izrek 1.18. *Množica* $\mathrm{Cl}(A)$ *je najmanjša zaprta množica, ki vsebuje množico* A *kot podmnožico.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{V} = \{V \in \mathcal{Z}_d \mid A \subseteq V\}$. Dokažimo, da je $\bigcap_{V \in \mathcal{V}} V = \mathrm{Cl}(A)$. Naj bo $x \in \bigcap_{V \in \mathcal{V}} V$ poljuben. Izberimo $r > 0$ poljuben. Dokazujemo, da $K(x,r) \cap A \neq \emptyset$. Recimo, da $K(x,r) \cap A = \emptyset$. Potem je $K(x,r) \subseteq A^C$ oziroma $x \in A^C$. Po drugi strani je $K(x,r)^C$ zaprta množica, ki vsebuje A, torej $K(x,r)^C \in \mathcal{V}$ in $x \in K(x,r)^C$, kar pa je protislovje. Presek $K(x,r) \cap A$ je res neprazen. Naj bo sedaj $x \in \mathrm{Cl}(A)$ in $V \in \mathcal{V}$ poljuben. Recimo, da $x \notin V$. Potem je V^C odprta množica in obstaja taki $r > 0$ tako, da je $K(x,r) \subseteq V^C$ oziroma $K(x,r) \cap A = \emptyset$, kar je protislovje, saj je $x \in \mathrm{Cl}(A)$. Dokazali smo, da je $\bigcap_{V \in \mathcal{V}} V = \mathrm{Cl}(A)$.
Po izreku 1.14 je presek zaprtih množic zaprta množica. Dokažimo še, da je $\mathrm{Cl}(A)$ najmanjša taka. Naj bo V_0 zaprta množica množice X in $A \subseteq V_0$. Torej $V_0 \in \mathcal{V}$ in $\mathrm{Cl}(A) = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} V \subseteq V_0$. □

Izrek 1.19. *Naj bo* (X,d) *metrični prostor in* $A \subseteq X$. *Množica* A *je odprta natanko tedaj, ko je* $A = \mathrm{Int}(A)$.

Dokaz. Prvo dokažimo implikacijo v desno. Vemo, da je A odprta množica. Naj bo $x \in A$ poljuben. Po predpostavki, obstaja $r_x > 0$ tako, da je $K(x, r_x) \subseteq A$. Torej je $x \in \mathrm{Int}(A)$ oziroma $A \subseteq \mathrm{Int}(A)$. Vedno velja, da je $\mathrm{Int}(A) \subseteq A$.
Dokažimo še implikacijo v levo. Predpostavimo, da je $A = \mathrm{Int}(A)$. Vemo, da je $\mathrm{Int}(A)$ odprta množica, zato je tudi A odprta. □

Izrek 1.20. *Naj bo* (X,d) *metrični prostor in* $B \subseteq X$. *Množica* B *je zaprta natanko tedaj, ko* $B = \mathrm{Cl}(B)$.

Dokaz. Prvo pokažimo implikacijo v desno. Množica B je zaprta in $B \subseteq B$. Torej $\mathrm{Cl}(B) \subseteq B$ in zmeraj velja, da je $B \subseteq \mathrm{Cl}(B)$. Sledi, da je $B = \mathrm{Cl}(B)$.
Dokažimo še implikacijo v levo. Predpostavimo, da je $B = \mathrm{Cl}(B)$. Množica B je zaprta, saj je $\mathrm{Cl}(B)$ zaprta množica. □

1.1.5 Zaporedja

Podamo definicijo zaporedja in konvergentnosti zaporedja. Dokažemo povezavo med zaprtimi množicami in zaporedji.

Definicija 1.21. *Naj bo X poljubna neprazna množica. Preslikavi $a : \mathbb{N} \to X$ pravimo zaporedje v X. Zaporedje bomo označili z $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Definicija 1.22. *Naj bo (X, d) metrični prostor. Zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, konvergira k $x_0 \in X$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$ tako, da za vsak $n \geq n_0$ velja, da je $d(x_n, x_0) < \varepsilon$. Pravimo, da je zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno z limito x_0, kar označimo z $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.*

Opomba 1.23. *Definicija pove, da je zaporedje konvergentno, če so od nekega člena dalje vsi členi zaporedja znotraj odprte krogle $K(x_0, \varepsilon)$, za nek $\varepsilon > 0$.*

Izrek 1.24. *Naj bo (X, d) metrični prostor in $V \subseteq X$. Množica V je zaprta v X natanko tedaj, ko za vsak $x \in X$ in za vsako konvergentno zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, x_n v V, kjer je*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

velja, da je x v V.

Dokaz. [5, str. 98] □

1.1.6 Zveznost funkcije

Definiramo zveznost funkcije in dokažemo povezavo med zveznostjo funkcij in zaporedji.

Definicija 1.25. *Naj bosta (X, d_1) in (Y, d_2) metrična prostora. Funkcija $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ je zvezna v točki $x_0 \in X$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$ tako, da za poljuben $x \in X$, za katerega velja, da je $d_1(x_0, x) < \delta$, sledi, da je $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Funkcija f je zvezna, če je zvezna v vsaki točki iz X.*

Opomba 1.26. *Implikacijo definicije lahko zapišemo tudi kot: $f(K(x_0, \delta)) \subseteq K(f(x_0), \varepsilon)$.*

Izrek 1.27. *Funkcija $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ je zvezna v $x_0 \in X$ natanko tedaj, ko za vsako konvergentno zaporedje iz X, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, z limito x_0 velja, da je $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno zaporedje v Y z limito $f(x_0) \in Y$.*

Dokaz. Prvo pokažimo implikacijo v desno. Dokazujemo, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_1 \in \mathbb{N}$ tako, da za vsak $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, sledi, da je $d_2(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Ker je f zvezna v x_0, obstaja $\delta > 0$ tako, da za vsak $x \in X$, za katerega velja, da je $d_1(x_0, x) < \delta$, sledi, da je $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Ker je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno zaporedje z limito x_0, obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$ tako, da za vsak $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, sledi, da je $d_1(x_n, x_0) < \delta$. Za iskani n_1 vzamemo kar n_0. Sedaj pokažimo implikacijo v levo. Iz konvergentnosti zaporedja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ z limito x_0 dobimo n_0 in iz konvergentnosti zaporedja $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ z limito $f(x_0)$ dobimo n_1. Dokazujemo, da je f zvezna v x_0. Naj bo $\varepsilon > 0$. Naj bo $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Potem velja, da je $d_1(x_n, x_0) < \varepsilon$ in $d_2(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ za vsak $n \geq n_2$. Za δ izberemo kar ε. □

1.2 Topološki prostori

Na začetku poglavja definiramo topološki prostor, navedemo nekaj primerov in ustvarimo povezavo z metričnimi prostori. Spoznamo bazo in podbazo topoloških prostorov ter definiramo kdaj sta dve topologiji ekvivalentni. Ogledamo si topologijo podprostorov in topologijo kartezičnih produktov dveh in števno mnogo topoloških prostorov. Dokažemo, da je topologija metričnih podprostorov ekvivalentna topologiji dobljeni iz metrike podprostorov in analogno za oba kartezična produkta. Nazadnje sledijo lastnosti zveznosti funkcij topoloških prostorov in projekcij.

1.2.1 Topologija

V tem podpoglavju definiramo topološke prostore in si ogledamo nekaj primerov topologij. Vzpostavi se povezava z metričnimi prostori.

Definicija 1.28. *Naj bo X množica in $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Pravimo, da je $\mathcal{T}$ topologija na X, če veljajo naslednje lastnosti:*

1. $\emptyset,\ X \in \mathcal{T}$,
2. *če je za vsak $\alpha \in I$ množica U_α v $\mathcal{T}$, sledi, da je $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \in \mathcal{T}$,*
3. *za vsak $U, V \in \mathcal{T}$ je $U \cap V \in \mathcal{T}$.*

Paru $(X, \mathcal{T})$ pravimo topološki prostor.

Primer. *Poglejmo si nekaj primerov topologij. Naj bo X množica.*

1. *Topologiji $\mathcal{T}_D = P(X)$ pravimo diskretna topologija na X.*
2. *Topologiji $\mathcal{T}_I = \{\emptyset, X\}$ pravimo indiskretna topologija na X.*
3. *Topologiji $\mathcal{T} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ je končna}\} \cup \{\emptyset\}$ pravimo topologija končnih komplementov.*
4. *Topologiji $\mathcal{T} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ je števna}\} \cup \{\emptyset\}$ pravimo topologija števnih komplementov.*

Definicija 1.29. *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Pravimo, da je topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ metrizabilen, če obstaja taka metrika d, da je $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$.*

Opomba 1.30.

1. *Po izreku 1.7 sledi, da je družina $\mathcal{T}_d$ topologija na X in zato je $(X, \mathcal{T}_d)$ topološki prostor. Iz vsakega metričnega prostora (X, d) lahko torej tvorimo topološki prostor $(X, \mathcal{T}_d)$. Še več, vse lastnosti, ki bodo veljale za topološke prostore, bodo veljale tudi za metrične prostore (X, d) s topologijo $\mathcal{T}_d$.*

2. *Zmotno je verjeti, da je vsak topološki prostor* $(X, \mathcal{T})$ *tudi metrični prostor. Zato lastnosti, ki veljajo za metrične prostore, ne veljajo nujno za topološke prostore. Iz dane topologije* $\mathcal{T}$ *ni nujno moč dobiti metriko. Poglejmo naslednji primer.*

Primer. *Naj bo* $X = \{a, b\}$, $a \neq b$, *in* $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. *Naj bo* d *poljubna metrika na* X. *Velja naslednje:*

$$d(a, a) = 0, \quad d(b, b) = 0, \quad d(a, b) = r > 0.$$

Ker je $K(a, \frac{r}{3}) = \{a\}$ *in* $K(b, \frac{r}{3}) = \{b\}$, *je družina vseh odprtih množic množice* X *enaka* $\mathcal{T}_d = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\} \neq \mathcal{T}$. *Torej ne glede na izbiro metrike* d, *se bosta množici* $\mathcal{T}_d$ *in* $\mathcal{T}$ *razlikovali. Iz topološkega prostora* $(X, \mathcal{T})$ *torej ni mogoče tvoriti metričnega prostora* (X, d).

1.2.2 Baze, podbaze in ekvivalenca topologij

V tem podpoglavju definiramo bazo topologije in dokažemo izrek o karakterizaciji baze. Sledi definicija in karakterizacija podbaze topologije. Definira se pojem finejše oziroma grobejše topologije, dokaže se lastnost topologij v omenjenem odnosu in navede primer.

Definicija 1.31. *Naj bo* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor in naj bo* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. *Pravimo, da je* $\mathcal{B}$ *baza topologije* $\mathcal{T}$, *če za vsak* $U \in \mathcal{T}$ *obstaja* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ *tako, da je* $U = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$.

Izrek 1.32. *Naj bo* X *poljubna množica in naj bo* $\mathcal{B}$ *poljubna družina podmnožic množice* X. *Naslednji trditvi sta ekvivalentni.*

1. *Obstaja topologija* $\mathcal{T}$ *na* X, *za katero je* $\mathcal{B}$ *baza.*
2. (a) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$.
   (b) *Za poljubni množici* B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$ *in za poljubni* $x \in B_1 \cap B_2$, *obstaja* $B \in \mathcal{B}$ *tako, da je* $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

Dokaz. [5, str. 80]. □

Definicija 1.33. *Naj bo* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor,* $\mathcal{B}$ *baza topologije* $\mathcal{T}$ *in naj bo* $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(X)$. *Pravimo, da je* $\mathcal{P}$ *podbaza topologije* $\mathcal{T}$, *če za vsak* $B \in \mathcal{B}$ *obstajajo* $P_1, P_2, ..., P_n \in \mathcal{P}$ *tako, da je*

$$B = \bigcap_{i=1}^{n} P_i.$$

Izrek 1.34. *Naj bo* X *množica in* $\mathcal{P}$ *poljubna družina podmnožic* X. *Naslednji trditvi sta ekvivalentni.*

1. *Obstaja topologija* $\mathcal{T}$ *na* X, *za katero je* $\mathcal{P}$ *podbaza.*

2. $\bigcup_{P\in\mathcal{P}} P = X$.

Dokaz. Pokažimo implikacijo iz 1 v 2. Ker je $\mathcal{P}$ podbaza, za vsak $B \in \mathcal{B}$ obstaja $P \in \mathcal{P}$ tako, da je $B \subseteq P$. Vemo, da je $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \subseteq \bigcup_{P\in\mathcal{P}} P \subseteq X$. Torej je $\bigcup_{P\in\mathcal{P}} P = X$. Sedaj pokažimo implikacijo iz 2 v 1. Vemo, da velja $\bigcup_{P\in\mathcal{P}} P = X$. Definirajmo $\mathcal{B} = \{P_1 \cap P_2 \cap ... \cap P_n \mid n \in \mathbb{N}, P_i \in \mathcal{P}, \text{ za vsak } i\}$. Dokazujemo, da obstaja topologija na X, za katero je $\mathcal{B}$ baza. Pomagamo si z izrekom 1.32. Prvo dokažimo, da je $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$. Vemo, da je $X = \bigcup_{P\in\mathcal{P}} P \subseteq \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \subseteq X$. Sedaj dokažimo drugo točko. Naj bosta B_1 in B_2 elementa $\mathcal{B}$ in element $x \in B_1 \cap B_2$ poljubni. Iščemo taki $B \in \mathcal{B}$, da bo $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$. Ker je $B_1 = P_1^1 \cap P_2^1 \cap ... \cap P_n^1$ in $B_2 = P_1^2 \cap P_2^2 \cap ... \cap P_m^2$, je $B_1 \cap B_2 = P_1^1 \cap P_2^1 \cap ... \cap P_n^1 \cap P_1^2 \cap P_2^2 \cap ... \cap P_m^2 \in \mathcal{B}$. Za B izberimo kar $B_1 \cap B_2$. □

Definicija 1.35. *Naj bo X množica, $\mathcal{T}$ in $\mathcal{S}$ topologiji na X ter $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$. Pravimo, da je topologija $\mathcal{T}$ grobejša od $\mathcal{S}$ oziroma, da je $\mathcal{S}$ finejša od $\mathcal{T}$. Če je še $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ pravimo, da sta topologiji ekvivalentni in to označimo s $\mathcal{S} = \mathcal{T}$.*

Izrek 1.36. *Naj bo X množica in naj bosta $\mathcal{T}_1$ in $\mathcal{T}_2$ topologiji na X. Naj bo še $\mathcal{B}_1$ baza topologije $\mathcal{T}_1$. Naslednji trditvi sta ekvivalentni.*

1. $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.
2. $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.

Dokaz. Dokažimo implikacijo iz 1 v 2. Množica $\mathcal{B}_1$ je baza za $\mathcal{T}_1$, zato je $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Sledi, da je $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Sedaj pokažimo implikacijo iz 2 v 1. Dokazujemo, da je $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Naj bo $U \in \mathcal{T}_1$. Dokazujemo, da je $U \in \mathcal{T}_2$. Vemo, da obstaja $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}_1$ tako, da je $U = \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C$. Pomeni, da za vsak $C \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}_1$ velja, da je $C \in \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Zato je vsak $C \in \mathcal{C}$ element $\mathcal{T}_2$. Pomeni, da je $U = \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C \in \mathcal{T}_2$, upoštevajoč, da je $\mathcal{T}_2$ topologija. □

Primer.

1. *Topologija $\mathcal{T}_D = \mathcal{P}(X)$ je finejša od $\mathcal{T}_I = \{\emptyset, X\}$.*
2. *Topologiji $\mathcal{T}_\delta$ in $\mathcal{T}_d$ iz izreka 1.10 sta ekvivalentni.*

   Dokaz. Dokažemo s pomočja izreka 1.36. Prvo pokažimo, da je $\mathcal{T}_\delta \subseteq \mathcal{T}_d$. Po prej omenjenem izreku zadošča dokazati, da je $\mathcal{B}_\delta \subseteq \mathcal{T}_d$ oziroma, da je $K_\delta(x,r) \in \mathcal{T}_d$, kjer sta $x \in X$ in $r > 0$ poljubna. Velja opozoriti, da če je $r \geq 1$, potem je $K_\delta(x,r) = X$ in $X \in \mathcal{T}_d$. Recimo, da je $r < 1$. Naj bo $y \in K_\delta(x,r)$ poljuben. Potem velja:

   $$\delta(x,y) < r \Leftrightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} < r \Leftrightarrow d(x,y) < \frac{r}{1-r}.$$

   Potem je $K_\delta(x,r) = K_d(x, \frac{r}{1-r}) \in \mathcal{T}_d$. Sedaj pokažimo, da je $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}_\delta$. Naj bosta $x \in X$ in $r > 0$ poljubna. Pokažimo, da je $K_d(x,r) \in \mathcal{T}_d$. Naj bo $y \in K_d(x,r)$ poljuben. Potem velja:

   $$d(x,y) < r \Leftrightarrow \frac{\delta(x,y)}{1-\delta(x,y)} < r \Leftrightarrow \delta(x,y) < \frac{r}{1+r}.$$

Potem je $K_d(x,y) = K_\delta(x, \frac{r}{1+r}) \in \mathcal{T}_\delta$. □

1.2.3 Topologija podprostorov in kartezičnih produktov topoloških prostorov

V tem podpoglavju se definira pojem topološkega podprostora, relativne topologije in baze relativne topologije. Dokaže se ekvivalenca relativne topologije in topologije dobljene iz metrike podprostorov. Nadalje se definira pojem produktne topologije dveh in števno mnogo topoloških prostorov ter se dokaže ekvivalenca produktnih topologij s topologijama dobljenima iz produktne metrike dveh oziroma števno mnogo metričnih prostorov.

Definicija 1.37. *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in naj bo $Y \subseteq X$. Tedaj je*

$$\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}$$

relativna topologija na Y. Paru $(Y, \mathcal{T}_Y)$ pravimo topološki podprostor topološkega prostora $(X, \mathcal{T})$.

Opomba 1.38. *Preveriti moramo ali je relativna topologija $\mathcal{T}_Y$ iz definicije 1.37 dobro definirana. Dokaz najdemo v [5, str. 89].*

Izrek 1.39. *Naj bo $\mathcal{B}$ baza topologije na X in $Y \subseteq X$. Potem je*

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

baza relativne topologije na Y.

Dokaz. [5, str. 89] □

Izrek 1.40. *Naj bo (X, d) metrični prostor in $Y \subseteq X$. Potem sta topologija dobljena iz metrike podprostorov $\mathcal{T}_{d|_Y}$ in relativna topologija $(\mathcal{T}_d)_Y$ enaki.*

$$\begin{tikzcd}
(X,d) \arrow[rr] \arrow[d] & & (Y, d|_Y) \arrow[d] \\
(X, \mathcal{T}_d) \arrow[d] & & (Y, \mathcal{T}_{d|_Y}) \\
(Y, (\mathcal{T}_d)_Y) & &
\end{tikzcd}$$

Slika 1.4: Shema postopka tvorjenja topologij za podprostore

Dokaz. Najprej dokažimo, da za vsak $y \in Y$ in $r > 0$ velja:

$$K_{d|_Y}(y, r) = K_d(y, r) \cap Y.$$

Množica $K_d(y, r) \cap Y = \{x \in X \mid d(x, y) < r\} \cap Y = \{x \in Y \mid d(x, y) < r\} = \{x \in Y \mid d|_Y(x, y) < r\} = K_{d|_Y}(y, r)$.

Sedaj dokažimo, da je $\mathcal{T}_{d|_Y} \subseteq (\mathcal{T}_d)_Y$. Po izreku 1.36 je dovolj pokazati, da je $K_{d|_Y}(y, r) \in (\mathcal{T}_d)_Y$. Naj bosta $y \in Y$ in $r > 0$ poljubna. Ker je $K_{d|_Y}(y, r) = K_d(y, r) \cap Y$, sledi želeno.

Pokažimo še obratno inkluzijo, $(\mathcal{T}_d)_Y \subseteq \mathcal{T}_{d|_Y}$. Baza topologije $(\mathcal{T}_d)_Y$ je $(\mathcal{B}_d)_Y = \{K_d(x, r) \cap Y \mid x \in X,\ r > 0\}$. Naj bo $x \in X$ poljuben in $r > 0$. Dokazujemo, da je $K_d(x, r) \cap Y \subseteq \mathcal{T}_{d|_Y}$. Če je $x \in Y$, potem je $K_d(y, r) \cap Y = K_{d|_Y}(y, r)$ in dokaz je končan. Če je $x \in X \setminus Y$, imamo dve različni situaciji:

1. $K_d(x, r) \cap Y = \emptyset$ in $\emptyset \in \mathcal{T}_{d|_Y}$.

2. $K_d(x, r) \cap Y \neq \emptyset$. Izberimo poljuben $y \in K_d(x, r) \cap Y$. Naj bo $r_0 >$ tak, da je $K_d(y, r_0) \subseteq K_d(x, r)$. Krogla $K_d(y, r_0) \cap Y = K_{d|_Y}(y, r_0) \subseteq K_d(x, r) \cap Y$.

□

Definicija 1.41. *Naj bosta $(X, \mathcal{T})$ in $(Y, \mathcal{S})$ topološka prostora. Topologiji $\mathcal{U}$ na $X \times Y$, ki ima bazo $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T},\ V \in \mathcal{S}\}$, pravimo produktna topologija na $X \times Y$.*

Opomba 1.42. *Preveriti moramo ali je množica $\mathcal{B}$ iz prejšnega izreka zares baza. Dokaz najdemo v [5, str. 86].*

Izrek 1.43. *Naj bosta (X, d_1) in (Y, d_2) metrična prostora. Potem je $\mathcal{T}_D = \mathcal{U}$, kjer je $\mathcal{T}_D$ produktna topologija dobljena iz produktne metrike D, ki jo dobimo po postopku iz 1.9, in $\mathcal{U}$ produktna topologija prostorov $(X, \mathcal{T}_{d_1})$ in $(Y, \mathcal{T}_{d_2})$ dobljena po postopku iz definicije 1.41.*

$$\begin{tikzcd}
(X, d_1),\ (Y, d_2) \arrow[r] \arrow[d] & (X \times Y, D) \arrow[d] \\
(X, \mathcal{T}_{d_1}),\ (Y, \mathcal{T}_{d_2}) \arrow[d] & (X \times Y, \mathcal{T}_D) \\
(X \times Y,\ \mathcal{U}) &
\end{tikzcd}$$

Slika 1.5: Shema tvorjenja topologij kartezičnega produkta dveh prostorov

Dokaz. Prvo dokažimo, da je $\mathcal{T}_D \subseteq \mathcal{U}$. Baza B_D topologije $\mathcal{T}_D$ je družina vseh odprtih krogel v $X \times Y$ glede na metriko D. Zadošča dokazati, da je $B_D \subseteq \mathcal{U}$. Naj bosta $(x_0, y_0) \in X \times Y$ in $r > 0$ poljubna. Dokazujemo, da je $K_D((x_0, y_0), r) \in \mathcal{U}$. To bo veljalo, če bo $K_D((x_0, y_0), r) = K_{d_1}(x_0, r) \times$

$K_{d_2}(y_0, r)$. Izberimo poljuben $(x, y) \in K_D((x_0, y_0), r)$. Dokazujemo, da je $(x, y) \in K_{d_1}(x_0, r) \times K_{d_2}(y_0, r)$ oziroma $x \in K_{d_1}(x_0, r)$ in $y \in K_{d_2}(y_0, r)$.

$$d_1(x, x_0) \leq \max\{d_1(x, x_0), d_2(y, y_0)\} = D((x, y), (x_0, y_0)) < r,$$

$$d_2(y, y_0) \leq \max\{d_1(x, x_0), d_2(y, y_0)\} = D((x, y), (x_0, y_0)) < r.$$

Sedaj dokažimo, da je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}_D$. Topologija $\mathcal{U}$ ima za bazo $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_{d_1},\ V \in \mathcal{T}_{d_2}\}$. Zadošča dokazati, da je $\{B_1 \times B_2 \mid B_1 \in \mathcal{B}_{d_1},\ B_2 \in \mathcal{B}_{d_2}\} \subseteq \mathcal{T}_D$. Naj bosta $K_{d_1}(x_0, r_1) \in \mathcal{B}_{d_1}$ in $K_{d_2}(y_0, r_2) \in \mathcal{B}_{d_2}$. Dokazujemo, da je $K_{d_1}(x_0, r_1) \times K_{d_2}(y_0, r_2) \in \mathcal{T}_D$. Naj bo $(x, y) \in K_{d_1}(x_0, r_1) \times K_{d_2}(y_0, r_2)$ poljuben. Ker $x \in K_{d_1}(x_0, r_1)$, obstaja $r_x > 0$ tako, da je $K_{d_1}(x, r_x) \subseteq K_{d_1}(x_0, r_1)$ in ker je $y \in K_{d_2}(y_0, r_2)$, obstaja $r_y > 0$ tako, da je $K_{d_2}(y, r_y) \subseteq K_{d_2}(y_0, r_2)$. Naj bo $r = \min\{r_x, r_y\}$. Tedaj je $K_D((x, y), r) \subseteq K_{d_1}(x_0, r_1) \times K_{d_2}(y_0, r_2)$. □

Izrek 1.44. *Naj bo za vsako naravno število n prostor $(X_n, \mathcal{T}_n)$ topološki prostor. Topologiji $\mathcal{U}$, ki ima za bazo $\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 \times ...U_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times ... \mid U_k \in \mathcal{T}_k,\ \text{za vsak } k \in \{1, 2, ..., n\}, n \in \mathbb{N}\}$, pravimo produktna topologija na $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$.*

Dokaz. Dokazujemo, da je $\mathcal{B}$ zares baza. Naj bo $U = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Potem je $U \in \mathcal{B}$ in zato $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Torej $\mathcal{B}$ pokrije $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Naj bosta sedaj

$$B_1 = \left(\prod_{i=1}^{n_1} U_i\right) \times \left(\prod_{i=n_1+1}^{\infty} X_i\right) \in \mathcal{B}$$

in

$$B_2 = \left(\prod_{i=1}^{n_2} V_i\right) \times \left(\prod_{i=n_2+1}^{\infty} X_i\right) \in \mathcal{B}.$$

Če je $n_1 = n_2$, potem za B vzamemo kar B_1. Recimo, da je $n_1 < n_2$. Potem za B vzamemo

$$B = \left(\prod_{i=1}^{n_1} (U_i \cap V_i)\right) \times \left(\prod_{i=n_1+1}^{n_2} V_i\right) \times \left(\prod_{i=n_2+1}^{\infty} X_i\right) \in \mathcal{B}.$$

Velja, da je $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$ za vsak $x \in B_1 \cap B_2$. □

Izrek 1.45. *Naj bo za vsako naravno število n par (X_n, d_n) metrični prostor in preslikava $d_n : X_n \times X_n \to [0, 1]$. Naj bo D produktna metrika na $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ in $\mathcal{U}$ produktna topologija na $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ dobljena iz $(X_n, \mathcal{T}_{d_n})$. Potem je $\mathcal{T}_D = \mathcal{U}$.*

Dokaz. Prvo dokažimo, da je $\mathcal{T}_D \subseteq \mathcal{U}$. Naj bosta $x \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ in $r > 0$ poljubna. Dokažimo, da je $K_D(x, r) \in \mathcal{U}$. Naj bo $y \in K_D(x, r)$ poljuben. Naj bo n_0 tako naravno število, da je $\frac{1}{2^n} < \frac{r - D(x,y)}{2}$ za

$$\begin{tikzcd}
(X_1,d_1),\ (X_2,d_2),\ (X_3,d_3),\ldots \arrow[r] \arrow[d] & (\prod_{n=1}^{\infty} X_n, D) \arrow[d] \\
(X_1,\mathcal{T}_{d_1}),\ (X_2,\mathcal{T}_{d_2}),\ (X_3,\mathcal{T}_{d_3}),\ldots \arrow[d] & (\prod_{n=1}^{\infty} X_n, \mathcal{T}_D) \\
(\prod_{n=1}^{\infty} X_n,\ \mathcal{U}) &
\end{tikzcd}$$

Slika 1.6: Shema tvorjenja topologij kartezičnega produkta števno mnogo prostorov

vsak $n \geq n_0$. Označimo z $r_0 = \frac{r-D(x,y)}{2}$. Sedaj vpeljimo

$$U = K_{d_1}(y_1, \frac{r_0}{2}) \times K_{d_2}(y_2, \frac{r_0}{2^2}) \times \ldots \times K_{d_{n_0}}(y_{n_0}, \frac{r_0}{2^{n_0}}) \times \Big(\prod_{i=n_0+1}^{\infty} X_i \Big).$$

Pokažimo, da je $U \subseteq K_D(x,r)$. Naj bo $z \in U$ poljuben. Naslednje očitno drži:

1. če je $n < n_0$, potem je $d_n(z_n, y_n) < \frac{r_0}{2^n}$,
2. če je $n \geq n_0$, potem je $\frac{d_n(z_n,y_n)}{2^n} < \frac{1}{2^n} < r_0$.

Naj bo k_0 tako naravno število, da je $\max\left\{\frac{d_n(z_n,y_n)}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} = \frac{d_{k_0}(z_{k_0},y_{k_0})}{2^{k_0}}$. Zato velja, da je

$$D(z,x) \leq D(z,y)+D(y,x) = \max\Big\{\frac{d_n(z_n,y_n)}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\Big\}+D(y,x) \leq \frac{d_{k_0}(z_{k_0},y_{k_0})}{2^{k_0}}+D(y,x) \leq r_0+D(y,x)$$

$$= \frac{r-D(x,y)}{2} + D(y,x) = \frac{r}{2} + \frac{D(y,x)}{2} \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Zato velja, da je $z \in K_D(x,r)$.
Sedaj dokažimo, da je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}_D$. Naj bo $B = \Big(\prod_{i=1}^{n} U_i\Big) \times \Big(\prod_{i=n+1}^{\infty} X_i\Big)$ in $x \in B$. Naj bo $r_i > 0$ tak, da bo $K_{d_i}(x_i, r_i) \subseteq U_i$ za vsak $i \in \{1,2,3,\ldots,n\}$ in naj bo $r = \min\left\{\frac{r_1}{2}, \frac{r_2}{2^2}, \ldots, \frac{r_n}{2^n}\right\}$. Pokažimo, da je $K_D(x,r) \subseteq B$. Naj bo $y \in K_D(x,r)$. Očitno drži naslednje:

1. za vsako naravno število $i \leq n$ velja $\frac{d_i(y_i,x_i)}{2^i} \leq D(y,x) < r < \frac{r_i}{2^i}$ in zato je $d_i(y_i,x_i) < r_i$ za vsako naravno število $i \leq n$. Sledi, da je $y_i \in K_{d_i}(x_i,r_i)$ za vsako naravno število $i \leq n$ in ker je $K_{d_i}(x_i,r_i) \subseteq U_i$ za vsak $i \in \{1,2,3,\ldots,n\}$, velja, da je $y_i \in U_i$ za vsak tak i.
2. Element $y_i \in X_i$ za vsako naravno število $i > n$.

Pravkar smo dokazali, da je $y \in B$ in zato $B_D(x,r) \subseteq B$. $\square$

1.2.4 Zveznost funkcij

V tem poglavju se posvetimo zveznosti funkcij topoloških prostorov in dokažemo pet izrekov o njenih lastnostih. Zaključimo z definicijo homeomorfizma.

Definicija 1.46. *Naj bosta $(X, \mathcal{T})$ in $(Y, \mathcal{S})$ topološka prostora. Funkcija $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ je zvezna, če je za vsako odprto podmnožico U množice Y množica $f^{-1}(U)$ odprta v X.*

Opomba 1.47. *Množica $f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$ je praslika množice U.*

Izrek 1.48. *Naj bosta $(X, \mathcal{T})$ in $(Y, \mathcal{S})$ topološka prostora, $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ funkcija in $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{S}$. Naslednji trditvi sta ekvivalentni.*

1. *Funkcija f je zvezna.*
2. *Za vsak $B \in \mathcal{B}$ velja, da je $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.*

Dokaz. Prvo pokažimo implikacijo iz 1 v 2. Naj bo $B \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}$ poljuben. Torej je $B \in \mathcal{S}$. Ker je f zvezna sledi, da je $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$. Sedaj pokažimo implikacijo iz 2 v 1. Naj bo $U \in \mathcal{S}$ poljuben. Potem obstaja $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ tako, da je $U = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$. Za vsak $C \in \mathcal{C}$ velja, da je $f^{-1}(C) \in \mathcal{T}$. Potem je $f^{-1}(U) = f^{-1}(\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C) \subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{C}} f^{-1}(C) \in \mathcal{T}$, upoštevajoč, da je $\mathcal{T}$ topologija. □

Izrek 1.49. *Naj bosta $(X, \mathcal{T})$ in $(Y, \mathcal{S})$ topološka prostora in naj bo dana funkcija $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$. Naslednje trditve so ekvivalentne.*

1. *Funkcija f je zvezna.*
2. *Za vsako podmnožico A množice X velja, da je $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*
3. *Za vsako zaprto podmnožico V množice Y je $f^{-1}(V)$ zaprta podmnožica X.*
4. *Za vsak $x \in X$ in za vsako okolico V točke $f(x)$ obstaja okolica U točke x tako, da je $f(U) \subset V$.*

Dokaz. [5, str. 104] □

Izrek 1.50. *Naj bodo $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ in $(Z, \mathcal{M})$ topološki prostori. Veljajo naslednje trditve.*

1. *Funkcija $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ s predpisom $f(x) = y_0$, za vsak $x \in X$, kjer je $y_0 \in Y$, je zvezna funkcija.*
2. *Če je A podmnožica X, potem je inkluzija $j : (A, \mathcal{T}_A) \to (X, \mathcal{T})$ zvezna.*

3. *Če sta* $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ *in* $g : (Y, \mathcal{S}) \to (Z, \mathcal{M})$ *zvezni, potem je* $g \circ f : (X, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{M})$ *zvezna funkcija.*

4. *Če je* $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ *zvezna in* A *podmnožica* X*, potem je zožana funkcija* $f|_A : (A, \mathcal{T}_A) \to (Y, \mathcal{S})$ *zvezna.*

Dokaz. [5, str. 108] □

Izrek 1.51. *Naj bo* $X = A \cup B$*, kjer sta* A *in* B *zaprti podmnožici* X*. Naj bosta funkciji* $f : A \to Y$ *in* $g : B \to Y$ *zvezni. Če je* $f(x) = g(x)$ *za vsak* $x \in A \cap B$*, potem je funkcija* $h : X \to Y$ *s predpisom*

$$h(x) = \begin{cases} f(x); & x \in A, \\ g(x); & x \in B. \end{cases}$$

zvezna funkcija.

Dokaz. [5, str. 109] □

Opomba 1.52. *Zgornji izrek imenujemo lema o lepljenju.*

Izrek 1.53. *Naj bodo* $(A, \mathcal{W})$*,* $(X, \mathcal{T})$*,* $(Y, \mathcal{S})$ *in* $(X \times Y, \mathcal{U})$ *topološki prostori, kjer je* $\mathcal{U}$ *produktna topologija dobljena iz topologij* $\mathcal{T}$ *in* $\mathcal{S}$*. Naj bo še* $f : (A, \mathcal{W}) \to (X \times Y, \mathcal{U})$ *funkcija s predpisom* $f(a) = (f_1(a), f_2(a))$*, kjer sta* $f_1 : (A, \mathcal{U}) \to (X, \mathcal{T})$ *in* $f_2 : (A, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{S})$*. Če sta funkciji* f_1 *in* f_2 *zvezni, potem je* f *zvezna funkcija. Funkcijama* f_1 *in* f_2 *pravimo koordinatni funkciji funkcije* f*.*

Dokaz. [5, str. 110] □

Definicija 1.54. *Naj bosta* $(X, \mathcal{T})$ *in* $(Y, \mathcal{S})$ *topološka prostora in* $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ *bijekcija. Če sta* f *in* f^{-1} *zvezni, funkcijo* f *imenujemo homeomorfizem. Pravimo tudi, da sta prostora* $(X, \mathcal{T})$ *in* $(Y, \mathcal{S})$ *homeomorfna, če obstaja homeomorfizem iz* $(X, \mathcal{T})$ *v* $(Y, \mathcal{S})$*.*

1.2.5 Projekcije

Definiramo pojem projekcije na $i-$ti faktor in dokažemo, da so projekcije zvezne surjektivne funkcije. Dokažemo povezavo med projekcijami in funkcijami.

Definicija 1.55. *Naj bo* $\pi_1 : (X \times Y, \mathcal{U}) \to (X, \mathcal{T})$ *funkcija s predpisom* $\pi_1(x, y) = x$ *in* $\pi_2 : (X \times Y, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{S})$ *funkcija s predpisom* $\pi_2(x, y) = y$*, kjer je* $(x, y) \in X \times Y$ *poljuben. Funkcijo* π_1 *imenujemo projekcija na prvi faktor in* π_2 *imenujemo projekcija na drugi faktor.*

Opomba 1.56. *Projekcije so surjektivne, zvezne funkcije. Če je* U *odprta podmnožica* X*, potem je* $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$ *odprta množica v* $X \times Y$*. Podobno velja za* V *odprto podmnožico* Y *in projekcijo* π_2*.*

Definicija 1.57. *Naj bo $(\prod_{n=1}^{\infty} X_n, D)$ metrični prostor. Potem za vsako naravno število n funkcijo $\pi_n : (\prod_{n=1}^{\infty} X_n, D) \to (X_n, d_n)$ s predpisom $\pi_n(\underline{x}) = x_n$, kjer je $\underline{x} = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, ...)$ poljuben element $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$, imenujemo projekcija na n-ti faktor.*

Izrek 1.58. *Za vsak $n \in \mathbb{N}$ je projekcija π_n zvezna funkcija.*

Dokaz. Naj bo $U \in \mathcal{T}_{d_n}$. Potem je $\pi_n^{-1}(U) = X_1 \times X_2 \times ... \times X_{n-1} \times U \times X_{n+1} \times ... \in \mathcal{U}$. □

Izrek 1.59. *Naj bodo $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ in $(Z, \mathcal{W})$ topološki prostori, $(X \times Y, \mathcal{U})$ topološki produkt in $f : (Z, \mathcal{W}) \to (X \times Y, \mathcal{U})$ funkcija. Naslednji trditvi sta ekvivalentni.*

1. *Funkciji $\pi_1 \circ f$ in $\pi_2 \circ f$ sta zvezni.*

2. *Funcija f je zvezna.*

Dokaz. Prvo pokažimo implikacijo iz 1 v 2. Zadošča pokazati, da je za vsak $B \in \mathcal{B}$, kjer je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{U}$, množica $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$. Imamo dve možnosti. Če je $B = U \times Y$, potem je $f^{-1}(B) = f^{-1}(U \times Y) = f^{-1}(\pi_1^{-1}(U)) = (\pi_1 \circ f)^{-1}(U) \in \mathcal{W}$. Če je $B = X \times V$, potem je $f^{-1}(B) = f^{-1}(X \times V) = f^{-1}(\pi_2^{-1}(V)) = (\pi_2 \circ f)^{-1}(V) \in \mathcal{W}$. Za dokaz implikacije iz 2 v 1 uporabimo tretjo točko izreka 1.50, ki pove, da je kompozitum zveznih funkcij zvezna funkcija. □

1.3 Povezanost v topoloških prostorih

V tem poglavju definiramo povezanost topološkega prostora, povezanost s potmi topološkega prostora in nekaj njunih lastnosti. Vzpostavi se povezava med definiranima pojmoma.

Definicija 1.60. *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Separacija prostora $(X, \mathcal{T})$ sta disjunktni, odprti, neprazni podmnožici U in V množice X, katerih unija je množica X. Prostor $(X, \mathcal{T})$ je povezan, če ne obstaja separacija $(X, \mathcal{T})$.*

Opomba 1.61. *Množici A in B sta disjunktni, če je $A \cap B = \emptyset$.*

Primer. *Naj bo $X = \mathbb{R}$ in naj bo $Y = (-1, 0) \cup (0, 2]$ podmnožica množice X. Naj bo $A = (-1, 0)$ in $B = (0, 2]$. Množici A in B sta neprazni, disjuktni in odprti v Y, zato sta separacija za Y.*

Izrek 1.62. *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Naslednji trditvi sta ekvivalentni.*

1. *Topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ je povezan.*

2. *Množici $\emptyset$ in X sta edini podmnožici X, ki sta hkrati odprti in zaprti.*

Dokaz. Dokažimo implikacijo iz 1 v 2. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ povezan. Recimo, da je $U \neq \emptyset$ in $U \neq X$ hkrati odprta in zaprta podmnožica X. Vpeljimo množico $V = X \setminus U$. Množici U in V sta separacija množice X, kar je protislovje s povezanostjo prostora X. Sedaj dokažimo implikacijo iz 2 v 1. Recimo, da $(X, \mathcal{T})$ ni povezan. Obstajata U in V separacija za X. Množica U je hkrati odprta in zaprta, kar je v protislovju z našo predpostavko. □

Izrek 1.63. *Naj bo $A \subseteq X$ in $(A, \mathcal{T}_A)$ povezan prostor. Potem je prostor $(B, \mathcal{T}_B)$, za katerega velja $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, povezan.*

Dokaz. [5, str. 150]. □

Posledica 1.64. *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $A \subseteq X$. Če je $(A, \mathcal{T}_A)$ povezan, tedaj je tudi $(\mathrm{Cl}(A), \mathcal{T}_{\mathrm{Cl}(A)})$ povezan.*

Dokaz. Posledica sledi direktno iz izreka 1.63; $A \subseteq \mathrm{Cl}(A) \subseteq \overline{A} = \mathrm{Cl}(A)$. □

Izrek 1.65. *Naj bosta množici A in B separacija za $(X, \mathcal{T})$ in naj bo $(Y, \mathcal{T}_Y)$ povezan podprostor prostora X. Potem Y v celoti leži ali v A ali v B.*

Dokaz. [5, str. 149]. □

Izrek 1.66. *Naj bodo $\{(Y_\alpha, \mathcal{T}_{Y_\alpha})\}_{\alpha \in I}$ povezani podprostori prostora $(X, \mathcal{T})$, ki imajo skupno točko. Potem je $(\bigcup_{\alpha \in I} Y_\alpha, \mathcal{T}_{\bigcup_{\alpha \in I} Y_\alpha})$ povezan prostor.*

Dokaz. [5, str. 150]. □

Izrek 1.67. *Slika povezanega prostora zvezne funkcije je povezan prostor.*

Dokaz. [5, str. 150] □

Izrek 1.68. *Kartezični produkt poljubno mnogo povezanih prostorov je povezan prostor.*

Dokaz. [5, str. 150]. □

Definicija 1.69. *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in x, y, $z \in X$.*

1. *Naj bo še $f : [0, 1] \to X$ funkcija, za katero velja:*

   (a) f je zvezna,

   (b) $f(0) = x$ in $f(1) = y$.

   Tedaj funkciji f pravimo pot v X od točke x do y.

2. *Naj bo $f : [0,1] \to X$ pot v X od točke x do y. Definirajmo funkcijo $\overline{f} : [0,1] \to X$ s predpisom*

$$\text{za vsak } t \in [0,1] : \overline{f}(t) = f(1-t).$$

Velja

   (a) *$\overline{f}$ je zvezna,*

   (b) *$\overline{f}(0) = y$ in $\overline{f}(1) = x$.*

Funkcija $\overline{f}$ je pot v X od točke y do x in jo imenujemo obratna ali nasprotna pot od poti f.

Dokaz. Preverimo ali je $\overline{f}$ zares pot v X od točke y do x. Funkcija $\overline{f} = f \circ h$, kjer je $h(t) = 1-t$, je zvezna fukcija, saj je kompozitum dveh zveznih funkcij. Nadalje, $\overline{f}(0) = f(1-0) = f(1) = y$ in $\overline{f}(1) = f(1-1) = f(0) = x$. □

3. *Naj bodo $f : [0,1] \to X$ pot v X od x do y in $g : [0,1] \to X$ pot v X od y do z. Definirajmo funkcijo $f * g : [0,1] \to X$ s predpisom*

$$\text{za vsak } t \in [0,1] : (f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & , t \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t-1) & , t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Velja:

   (a) *$f * g$ je zvezna,*

   (b) *$(f * g)(0) = x$ in $(f * g)(1) = z$.*

Funkcija $(f * g)$ je pot v X od x do z in jo imenujemo sklop poti f in g.

Dokaz. Preverimo ali je $(f * g)$ zares pot v X od x do z. Funkcija $(f * g)$ je zvezna funkcija, saj zadošča vsem pogojem leme 1.51. Nadalje, $(f * g)(0) = f(2 \cdot 0) = f(0) = x$ in $(f * g)(1) = g(2 \cdot 1 - 1) = g(1) = z$. □

Definicija 1.70. *Prostor $(X, \mathcal{T})$ je povezan s potmi, če za poljubni točki x in y v X obstaja pot v X od x do y.*

Izrek 1.71. *Vsak s potmi povezan prostor je tudi povezan.*

Dokaz. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ povezan s potmi. Recimo, da $(X, \mathcal{T})$ ni povezan. Naj bo U in V separacija za $(X, \mathcal{T})$. Naj bo $x \in U$ in $y \in V$. Funkcija $f : [0,1] \to X$ pot v X od x do y. Funkcija f je zvezna in $f^{-1}(U)$ ter $f^{-1}(V)$ sta odprti v $[0,1]$. Množici $f^{-1}(U)$ in $f^{-1}(V)$ sta separacija za $[0,1]$, kar pa je protislovje s povezanostjo prostora $[0,1]$. □

Primer. *Vsak povezan prostor ni nujno povezan s potmi. Množica* $A = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x \in (0,1]\} \cup \{0\} \times [-1,1]$ *je povezan prostor, vendar ni povezan s potmi.*

Izrek 1.72. *Naj bodo* $\{(Y_\alpha, \mathcal{T}_{Y_\alpha})\}_{\alpha\in I}$ *s potmi povezani podprostori prostora* $(X, \mathcal{T})$*, ki imajo vsaj eno skupno točko. Potem je prostor* $(\bigcup_{\alpha\in I} Y_\alpha, \mathcal{T}_{\bigcup_{\alpha\in I} Y_\alpha})$ *povezan s potmi.*

Dokaz. Vemo, da obstaja $z \in X$ tako, da je $z \in \bigcap_{\alpha\in I} Y_\alpha$. Naj bosta x in $y \in \bigcup_{\alpha\in I} Y_\alpha$ poljubna. Iščemo pot med x in y. Obstaja α_x in α_y tako, da je $x \in Y_{\alpha_x}$ in $y \in Y_{\alpha_y}$. Če $\alpha_x = \alpha_y$, potem sta $x, y \in Y_{\alpha_x}$, ki je povezan s potmi in zato obstaja pot med x in y. Če $\alpha_x \neq \alpha_y$, potem obstaja pot f v Y_{α_x} od x do z in obstaja pot g v Y_{α_y} med z in y. Potem je funkcija h s predpisom

$$\text{za vsak } t \in [0,1] : h(t) = \begin{cases} f(2t) & , t \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t-1) & , t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

pot od x do y v $\bigcup_{\alpha\in I} Y_\alpha$. □

Izrek 1.73. *Naj bo* $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ *surjektivna funkcija. Tedaj velja:*

1. *Če je* $(X, \mathcal{T})$ *povezan in je* f *zvezna, tedaj je* $(Y, \mathcal{S})$ *povezan.*
2. *Če je* $(X, \mathcal{T})$ *povezan s potmi in je* f *zvezna, tedaj je* $(Y, \mathcal{S})$ *povezan s potmi.*

Dokaz. Prvo dokažimo 1. Recimo, da $(Y, \mathcal{S})$ ni povezan. Naj bosta U in V separacija za $(Y, \mathcal{S})$. Potem sta $f^{-1}(U)$ in $f^{-1}(V)$ separacija za $(X, \mathcal{T})$, kar je v protislovju s predpostavko. Sedaj dokažimo 2. Naj bosta w in z poljubni točki v Y. Označimo z $x = f^{-1}(w)$ in $y = f^{-1}(z)$. Ker je $(X, \mathcal{T})$ povezan s potmi, obstaja pot g v X od x do y. Dokažimo, da je $f \circ g : [0,1] \to Y$ pot v Y od w do z. Funkcija $f \circ g$ je zvezna, saj je kompozitum dveh zveznih funkcij. Slika $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(x) = w$ in $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(y) = z$. □

1.4 Kompaktnost topoloških in metričnih prostorov

Na začetku definiramo pokritje, podpokritje, končno in odprto podpokritje ter kompaktnost topološkega prostora. Sledi kompaktnost podprostora in nekaj lastnosti kompaktnosti. V nadaljevanju definiramo razdaljo med elementom in množico, omejenost množice, diameter množice in dokažemo Lebesgueovo lemo. Sledi še definicija stekališča zaporedja, podzaporedja, kompaktnosti v metričnih prostorih in razdalje med elementom in zaprto podmnožico kompaktnega metričnega prostora.

Definicija 1.74. *Naj bo* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor in* $\mathcal{U} \subseteq P(X)$*. Pravimo, da je* $\mathcal{U}$ *pokritje za* X*, če je* $X = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$*.*

Definicija 1.75. *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $\mathcal{U}$ pokritje za X in $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Če je $\mathcal{V}$ tudi pokritje za X, pravimo, da je $\mathcal{V}$ podpokritje pokritja $\mathcal{U}$.*

Definicija 1.76. *Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Pokritje $\mathcal{U}$ je končno, če je $|\mathcal{U}| < \infty$. Pokritje $\mathcal{U}$ je odprto, če za vsak $U \in \mathcal{U}$ velja, da je $U \in \mathcal{T}$.*

Definicija 1.77. *Topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ je kompakten, če ima vsako odprto pokritje za X kakšno končno podpokritje.*

Lema 1.78. *Naj bo Y podprostor X. Potem je Y kompakten natanko tedaj, ko vsako pokritje za Y z odprtimi množicami iz X vsebuje končno podpokritje za Y.*

Dokaz. [5, str. 165]. □

Izrek 1.79. *Zaprta podmnožica kompaktnega prostora je kompaktna.*

Dokaz. [5, str. 165]. □

Izrek 1.80. *Slika kompaktnega prostora zvezne funkcije je kompaktna.*

Dokaz. [5, str. 166]. □

Izrek 1.81. *Produkt poljubno mnogo kompaktnih prostorov je kompakten prostor.*

Dokaz. [5, str. 167]. □

Definicija 1.82. *Naj bo (X, d) metrični prostor in naj bo A neprazna podmnožica X. Za poljuben $x \in X$ definiramo razdaljo med x in A na naslednji način*

$$d(x, A) = \inf\{\, d(x, a) \mid a \in A\}.$$

Opomba 1.83. *Funkcija d je zvezna funkcija. Dokaz najdemo v [5, str. 175].*

Definicija 1.84. *Naj bo (X, d) metrični prostor in naj bo $A \subseteq X$. Pravimo, da je A omejena, če obstaja število $M \in \mathbb{R}$ tako, da za vsaka a_1, $a_2 \in A$ velja, da je $d(a_1, a_2) \leq M$.*

Definicija 1.85. *Naj bo (X, d) metrični prostor in naj bo A omejena, neprazna podmnožica X. Diameter množice A je število*

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{\, d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}.$$

Izrek 1.86. *Naj bo $\mathcal{A}$ odprto pokritje metričnega prostora (X, d). Če je X kompakten, obstaja $\delta > 0$ tako, da za vsako podmnožico $U \subseteq X$, katere $\operatorname{diam}(U) < \delta$, obstaja $A \in \mathcal{A}$ tako, da je $U \subseteq A$.*

Dokaz. [5, str. 175]. □

Opomba 1.87. *Izrek 1.86 imenujemo Lebesgueova lema in število δ iz izreka imenujemo Lebesgueovo število.*

Definicija 1.88. *Naj bo (X, d) metrični prostor. Element $x_0 \in X$ je stekališče zaporedja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, če za vsak $\varepsilon > 0$ velja, da v $K(x_0, \varepsilon)$ leži neskončno členov zaporedja.*

Definicija 1.89. *Naj bo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje v metričnem prostoru (X, d) in $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ naraščajoče zaporedje naravnih števil. Potem zaporedje $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ imenujemo podzaporedje zaporedja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Opomba 1.90. *Metrični prostor (X, d) je kompakten natanko tedaj, ko za vsako zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v X obstaja konvergetno podzaporedje $(x_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ z limito v X. Z drugimi besedami, metrični prostor je kompakten natanko tedaj, ko ima vsako zaporedje stekališče.*

Izrek 1.91. *Naj bo (X, d) metrični prostor in za vsako naravno število n naj bo X_n kompakten metrični prostor. Če je za vsak $n \in \mathbb{N} : X_{n+1} \subseteq X_n$, tedaj je tudi $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ neprazen kompakten metrični prostor.*

Dokaz. Prvo pokažimo, da je $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ neprazen. Naj bo za vsak $n \in \mathbb{N}$ element $x_n \in X_n$. Dobili smo zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v kompaktnem metričnem prostoru X_1. Po prejšnjem izreku ima to zaporedje stekališče. Torej obstaja podzaporedje $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ tako, da je $s = \lim\limits_{i\to\infty} x_{n_i}$. Dokažimo, da je $s \in \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$. Ker je $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_{n_i}$, zadošča dokazati, da je $s \in \bigcap_{i=1}^{\infty} X_{n_i}$. Ker je za vsak $i \in \mathbb{N}$ prostor X_{n_i} kompakten in $s = \lim\limits_{i\to\infty} x_{n_i} \in X_{n_i}$, sledi, da je $s \in \bigcap_{i=1}^{\infty} X_{n_i}$. Sedaj pokažimo, da je $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ kompakten prostor. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ je X_n zaprta množica, saj je kompaktna v metričnem prostoru X. Po izreku 1.14 je tudi $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ zaprta množica v X. Želimo dokazati, da je $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ zaprta množica v X_1, saj bo po izreku 1.79 sledilo, da je presek kompakten. Pokazati moramo, da obstaja Z zaprta podmnožica X tako, da bo $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = X_1 \cap Z$. Za Z zadošča vzeti kar $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$. □

Opomba 1.92. *Naj bo (X, d) kompakten metrični prostor, $x \in X$ in Y neprazna, zaprta podmnožica X. Definicija razdalje med točko in množico je podana v 1.82. Zaradi zaprtosti množice Y in kompaktnosti prostora (X, d) bo* min *zamenjal* inf.

1.5 Kontinuumi

V začetku definiramo pojem kontinuuma, dokažemo, da je homeomorfna slika kontinuuma prav tako kontinuum in navedemo nekaj najbolj znanih primerov kontinuumov. Sledi definicija gostosti množice, separabilnosti, dokaz, da je vsak kontinuum separabilen in dokaz moči Hilbertovega kuba. Nadalje definiramo vložitev in dokažemo izrek o moči nedegeneriranih kontinuumov. Nazadnje pokažemo, da je vgnezden presek kontinuumov prav tako kontinuum.

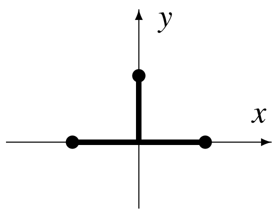
Definicija 1.93. *Neprazen povezan kompakten metrični prostor X imenujemo kontinuum.*

Izrek 1.94. *Naj bosta X in Y metrična prostora in naj bo $f : X \to Y$ homeomorfizem. Če je X kontinuum, je tudi Y kontinuum.*

Dokaz. Prostor Y je neprazen, saj je slika nepraznega prostora. Ker je Y zvezna slika povezanega in kompaktnega prostora, je po izrekih 1.67 in 1.80 povezan in kompakten. □

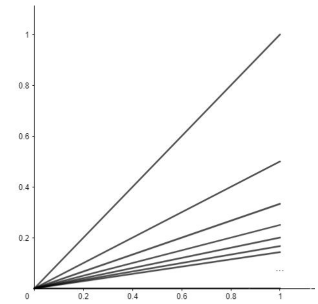
Primer. *Poglejmo si par primerov kontinuumov.*

1. *Lok je kontinuum, ki je homeomorfen zaprtemu intervalu* $[0, 1]$.
2. *Enostavno sklenjena krivulja je kontinuum, ki je homeomorfen* $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$.
3. *Za vsako naravno število n je* $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ *kontinuum in n-sfera je kontinuum, ki je homeomorfen S^n.*
4. *Za vsako naravno število n je* $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ *kontinuum in n-celica ali n-disk je kontinuum, ki je homeomorfen B^n.*
5. *Naj bo* $T = ([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1]) \subseteq \mathbb{R}^2$. *$T$ je kontinuum. Enostavna trioda ali trioda je vsak kontinuum, ki je homeomorfen T.*

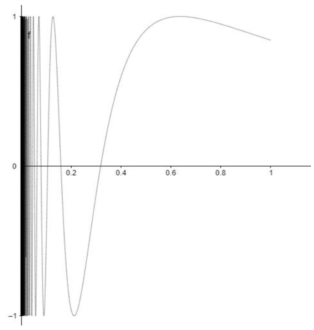


Slika 1.7: Trioda

6. *Naj bo* $X = ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n)$, *kjer je za vsak* $n \in \mathbb{N}$, $T_n \subseteq \mathbb{R}^2$ *daljica s krajiščema* $(0, 0)$ *in* $(1, \frac{1}{n})$. *Harmonična pahljača je vsak kontinuum, ki je homeomorfen X.*
7. *Hilbertov kub je vsak kontinuum, ki je homeomorfen kartezičnemu produktu števno mnogo intervalov* $[0, 1]$, $\prod_{n=1}^{\infty}[0, 1]$.
8. *Naj bo* $A = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x \in (0, 1]\}$. *Varšavski lok imenujemo množico* $V = \overline{A}$.
   $\sin\frac{1}{x}$*-kontinuum je vsak kontinuum, ki je homeomorfen Varšavskemu loku.*
9. *Naj bo* $C_0 = [0, 1]$ *in naj bo za vsako naravno število n množica* $C_n = \frac{C_{n-1}}{3} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{C_{n-1}}{3}\right)$.
   $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$, ... *Naj bo* $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. *Množico C*



Slika 1.8: Harmonična pahljača



Slika 1.9: Varšavski lok

imenujemo Cantorjeva srednje tretjinska množica.
Nadalje, naj bo R_n množica vseh robnih točk množice C_n.

$$R_0 = \{0, 1\},\ R_1 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\},\ R_2 = \{0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, 1\} \ldots$$

Definirajmo množici

$$K_n^+ = \bigcup_{x \in R_n,\, x < \frac{1}{2}} K\Big(\big(\frac{1}{2}, 0\big), \frac{1}{2} - x\Big) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\},$$

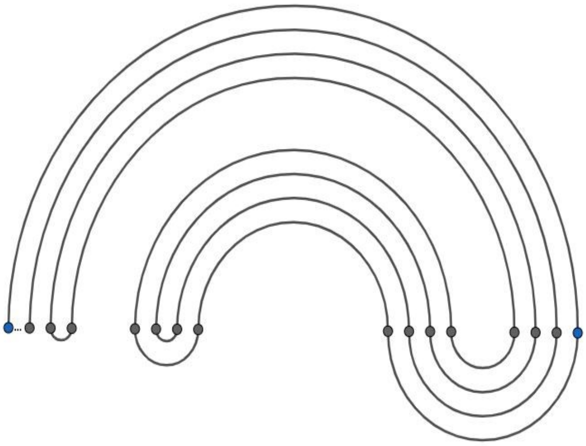
in

$$K_n^- = \bigcup_{k=1}^{n} \Bigg(\bigcup_{x \in R_n,\, \frac{1}{2^k} < x < \frac{5}{2 \cdot 3^k}} K\Big(\big(\frac{5}{2 \cdot 3^k}, 0\big), \frac{5}{2 \cdot 3^k} - x\Big) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}\Bigg).$$

Označimo s $K_n = K_n^+ \cup K_n^-$. Podprostor $Cl(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n)$ prostora $\mathbb{R}^2$ imenujemo ročaj vedra, ki je kontinuum. Vsak kontinuum, ki je homeomorfen ročaju vedra imenujemo Knasterjev kontinuum.

Opomba 1.95. *Na sliki 1.10 so prikazani le prvi trije koraki.*

Definicija 1.96. *Naj bo (X, d) metrični prostor in $A \subseteq X$. Pravimo, da je A gosta v X, če za vsako*



Slika 1.10: Ročaj vedra

neprazno množico $U \in \mathcal{T}_d$ velja, da je $U \cap A \neq \emptyset$.

Definicija 1.97. *Prostor (X, d) je separabilen, če premore kako števno gosto podmnožico.*

Izrek 1.98. *Vsak kompakten metrični prostor je separabilen.*

Dokaz. Naj bo (X, d) poljuben metrični prostor. Iščemo števno gosto podmnožico A v X. Naj bo

$$\mathcal{U}_1 = \{K(x_1^1, 1), K(x_2^1, 1), ..., K(x_{m_1}^1, 1)\}$$

končno odprto pokritje za X, kjer je m_1 naravno število. Naj bo

$$\mathcal{U}_2 = \{K(x_1^2, \frac{1}{2}), K(x_2^2, \frac{1}{2}), ..., K(x_{m_2}^2, \frac{1}{2})\}$$

prav tako končno odprto pokritje X, kjer je m_2 naravno število. Za vsako naravno število n torej definiramo odprto, končno pokritje za X, kjer je m_n naravno število,

$$\mathcal{U}_n = \{K(x_1^n, \frac{1}{n}), K(x_2^n, \frac{1}{n}), ..., K(x_{m_n}^n, \frac{1}{n})\}.$$

Naj bo $A = \{x_k^l \mid l \in \mathbb{N},\ k \in \{1, 2, ..., m_l\}\}$ množica vseh središč odprtih krogel iz pokritij. Potem je $|A| \leq \aleph_0$. Dokažimo še, da je A gosta v X. Naj bosta $x \in X$ in $r > 0$ poljubna. Dokazujemo, da je $K(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ takšen, da je $\frac{1}{n} < \frac{r}{2}$. Ker je $\mathcal{U}_n$ pokritje od X, obstaja $K(x_v^n, \frac{1}{n})$ tako, da je $x \in K(x_v^n, \frac{1}{n})$. Dokazujemo, da je $K(x_v^n, \frac{1}{n}) \subseteq K(x, r)$. Naj bo $y \in K(x_v^n, \frac{1}{n})$ poljuben. Potem je $d(y, x) \leq d(y, x_v^n) + d(x_v^n, x) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$. Dokazali smo, da je $y \in K(x, r)$. □

Izrek 1.99. *Naj bo H Hilbertov kub. Tedaj je moč H enaka $c = |\mathbb{R}|$.*

Dokaz. $|H| = |[0, 1] \times [0, 1] \times ...| = c^{\aleph_0} = c$, kjer je $\aleph_0 = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$. □

Definicija 1.100. *Naj bosta X in Y metrična prostora in $f : X \to Y$ funkcija. Pravimo, da je f vložitev X v Y, če je preslikava $F : X \to f(X)$ definirana s predpisom $F(x) = f(x)$ homeomorfizem. Vložitev označimo z $f : X \hookrightarrow Y$.*

Opomba 1.101. *Definicija pove, da je $f(X) \subseteq Y$ in, da je $f(X)$ homeomorfna X.*

Izrek 1.102. *Vsak kontinuum lahko vložimo v Hilbertov kub.*

Dokaz. Naj bo X poljuben kontinuum in $H = \prod_{n=1}^{\infty}[0,1]$ Hilbertov kub. Naj bo še brez izgube za splošnost metrika d omejena navzgor z 1. Iščemo vložitev $f : X \hookrightarrow H$. Naj bo še $A = \{a_1, a_2, a_3 ...\}$ števna gosta podmnožica X. Za poljuben $x \in X$ definiramo funkcijo f kot $f(x) = (d(x, a_1), d(x, a_2), d(x, a_3), ...)$. Dokažimo, da je f zvezna. Ker so vse koordinatne funkcije zvezne, nam izrek 1.53 zagotovi zveznost. Dokažimo še, da je f injektivna. Naj bosta $x, y \in X$ poljubna in $f(x) = f(y)$. Torej za vsak $n \in \mathbb{N}$ je $d(x, a_n) = d(y, a_n)$. Naj bo $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje v A, ki konvergira k x, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = x$. Tedaj za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja enakost $d(x, b_n) = d(y, b_n)$. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ je torej $d(x, y) \leq d(x, b_n) + d(b_n, y) = 2 \cdot d(x, b_n)$. Velja, da je $\lim\limits_{n\to\infty} d(x, y) \leq 2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} d(x, b_n) = 0$. Sledi, da je $d(x, y) = 0$, kar je ekvivalentno, da je $x = y$. Torej funkcija f je zares injektivna. □

Izrek 1.103. *Naj bo X kontinuum in $|X| > 1$. Tedaj je $|X| = c$.*

Dokaz. Prejšni izrek pove, da je $|X| \leq c$. Dokažimo, da je $|X| \geq c$. Naj bo d metrika na X in naj bosta $x, y \in X$ poljubna in $x \neq y$. Označimo z $r = d(x, y)$. Iščemo injektivno funkcijo $f : [0, r] \to X$. Dokazati želimo, da za vsak $t \in [0, r]$ obstaja nek $x_t \in X$ tako, da je $d(x, x_t) = t$. Ko je $t = 0$, vzamemo za $x_0 = x$ in ko je $t = r$, vzamemo za $x_r = y$. Recimo, da obstaja $t \in (0, r)$ tako, da za vsak $z \in X$ velja, da je $d(x, z) \neq t$. Naj bo $U = \{z \in X \mid d(x, z) < t\}$ in $V = \{z \in X \mid d(x, z) > t\}$. Množici U in V sta neprazni, odprti, disjunktni množici, katerih unija je X. Z drugimi besedami, množici U in V sta separacija za kontinuum X, kar je protislovje, saj je kontinuum povezan metrični prostor. Dokazali smo torej, da je f injektivna, kar pomeni, da je $c \leq |X|$. □

Izrek 1.104. *Naj bo za vsako naravno število n množica X_n kontinuum. Če je za vsak $n \in \mathbb{N}$: $X_{n+1} \subseteq X_n$, tedaj je tudi $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ kontinuum.*

Dokaz. Po izreku 1.91 je presek neprazen in kompakten. Dokažimo še, da je povezan. Recimo, da $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ ni povezan. Vpeljimo oznako $P = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$. Naj bosta U in V separacija za P. Ker je $U \cap V = \emptyset$, je $d(U, V) = r > 0$. Naj bo $W_1 = \bigcup_{x\in U} K(x, \frac{r}{3})$ in $W_2 = \bigcup_{x\in V} K(x, \frac{r}{3})$. Velja, da je $P \subseteq W_1 \cup W_2$. Presek $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, saj je radij krožnic manjši kot r. Preseka $W_1 \cap P$ in $W_2 \cap P$ sta neprazna, saj sta U in V neprazni in $U \cup V = P$. Množici W_1 in W_2 sta odprti, saj sta uniji odprtih množic. Dokažimo, da obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$ tako, da za vsak $n \geq n_0$ velja, da je $X_n \subseteq W_1 \cup W_2$. Recimo, da to ni res. Tedaj za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja x_{i_n} v $X_{i_n} \setminus (W_1 \cup W_2)$. Zaporedje $(x_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ je zaporedje v $X_1 \setminus (W_1 \cup W_2)$, ki je zaprta podmnožica X_1 in je zato kompaktna. Naj bo s stekališče tega zaporedja.

Tedaj je $s \in X_1 \setminus (W_1 \cup W_2)$. Sledi, da $s \notin P$, saj je $P \subseteq W_1 \cap W_2$, kar je protislovje z dokazanim v izreku 1.91. Pomeni, da zares obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je za vsak $n \geq n_0$ prostor X_n podmnožica $W_1 \cup W_2$. Ker so vsi ti prostori povezani, je $X_n \subseteq W_1$ bodisi $X_n \subseteq W_2$. Posledično bo tudi $P \subseteq W_1$ bodisi $P \subseteq W_2$, kar je v protislovju z dejstvom, da sta W_1 in W_2 separacija za P. Sledi, da je P povezan prostor. □

Poglavje 2

Inverzna zaporedja in inverzne limite

V tem poglavju definiramo inverzna zaporedja in inverzne limite enoličnih in večličnih funkcij.

2.1 Inverzna zaporedja in inverzne limite enoličnih funkcij

Na začetku podpoglavja definiramo inverzno zaporedje, inverzno limito inverznega zaporedja in si ogledamo nekaj primerov. Podamo povezavo med zveznostjo funkcije in njenim grafom. Vpeljemo nove množice $q_k(X_n, f_n)$ in dokažemo nekaj njihovih lastnosti ter dokažemo povezavo z inverznimi limitami. Sledita dokaza dveh izrekov, da se lastnosti faktorskih prostorov inverznih zaporedij prenesejo na inverzno limito. V nadaljevanju se spomnimo pojma projekcij in dokažemo nekaj povezav, ki veljajo med projekcijami in veznimi funkcijami inverznih zaporedij. Sledi še dokaz o funkcijah med dvema inverznima zaporedjema.

Definicija 2.1. *Naj bo za vsako naravno število n par (X_n, d_n) metrični prostor in $f_n : (X_{n+1}, d_{n+1}) \to (X_n, d_n)$ enolična funkcija. Dvojnemu zaporedju $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ pravimo inverzno zaporedje. Funkcijam f_n pravimo vezne funkcije, prostorom X_n pa faktorski prostori.*

$$X_1 \xleftarrow{f_1} X_2 \xleftarrow{f_2} X_3 \;\cdots\; \xleftarrow{f_{n-1}} X_n \xleftarrow{f_n} X_{n+1} \;\cdots$$

Slika 2.1: Shema inverznega zaporedja enoličnih funkcij

Definicija 2.2. *Inverzna limita inverznega zaporedja $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je podprostor topološkega produkta $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$, definiran kot*

$$\varprojlim\{X_n, f_n\} = \Big\{(x_1, x_2, ...) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n \mid \textit{za vsak } n \in \mathbb{N},\ f_n(x_{n+1}) = x_n\Big\}.$$

Primer. *Poglejmo si nekaj primerov inverznih zaporedij in njihovih inverznih limit.*

1. *Naj bo za vsak* $n \in \mathbb{N}$ *prostor* $X_n = [0,1]$ *in* $f_n : X_{n+1} \to X_n$ *vezna funkcija s predpisom, za vsak* $t \in [0,1] : f(t) = t$. *Potem je* $\varprojlim\{X_n, f_n\} = \{(t,t,t,...) \in \prod_{n=1}^{\infty}[0,1] \mid t \in [0,1]\}$. *Naj bo* $\varphi : [0,1] \to \varprojlim\{X_n, f_n\}$ *funkcija s predpisom* $\varphi(t) = (t,t,t,...)$, *kjer je* $t \in [0,1]$ *poljuben. Funkcija* φ *je homeomorfizem, kar posledično pomeni, da je* $\varprojlim\{X_n, f_n\}$ *lok.*

2. *Naj bo za vsak* $n \in \mathbb{N}$ *prostor* $Y_n = [0,1]$ *in* $g_n : Y_{n+1} \to Y_n$ *vezna funkcija s predpisom, za vsak* $t \in [0,1] : g(t) = 1 - t$. *Potem je* $\varprojlim\{Y_n, g_n\} = \{(t, 1-t, t, 1-t, t, ...) \in \prod_{n=1}^{\infty}[0,1] \mid t \in [0,1]\}$. *Naj bo* $\varphi : [0,1] \to \varprojlim\{Y_n, g_n\}$ *funkcija s predpisom* $\varphi(t) = (t, 1-t, t, 1-t, t, ...)$, *kjer je* $t \in [0,1]$ *poljuben. Funkcija* φ *je homeomorfizem, kar posledično pomeni, da je* $\varprojlim\{Y_n, g_n\}$ *lok.*

3. *Naj bo za vsak* $n \in \mathbb{N}$ *prostor* $W_n = [0,1]$ *in* $h_n : W_{n+1} \to W_n$ *vezna funkcija s predpisom, za vsak* $t \in [0,1] : h(t) = \frac{1}{2} \cdot t$. *Potem so točke v inverzni limiti oblike* $x = (t, 2t, 4t, 6t, ...)$. *Vsaka koordinata točke* x_i *je element* $[0,1]$ *in za vsak* $t \in (0,1]$ *obstaja takšen* $n \in \mathbb{N}$, *da bo* $x_n > 1$. *Zato lahko* t *zavzame le vrednost* 0. *Tako je* $\varprojlim\{W_n, h_n\} = \{(0,0,0,...)\}$.

4. *Lahko se zgodi, da je inverzna limita inverznega zaporedja prazna množica. Naj bo za vsak* $n \in \mathbb{N}$ *prostor* $X_n = (0,1)$ *in* $f_n : X_{n+1} \to X_n$ *vezna funkcija s predpisom, za vsak* $t \in (0,1)$: $f(t) = \frac{1}{2} \cdot t$. *Potem je* $\varprojlim\{X_n, f_n\} = \emptyset$.

Opomba 2.3. *Naj bo* $f : X \to Y$ *funkcija. Potem je graf funkcije množica* $\Gamma(f) = \{(x,y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$.

Izrek 2.4. *Naj bosta* X *in* Y *kompaktna metrična prostora in* $f : X \to Y$ *funkcija. Tedaj sta naslednji trditvi ekvivalentni.*

1. *Funkcija* f *je zvezna.*

2. $\Gamma(f)$ *je zaprta množica v* $X \times Y$.

Dokaz. Najprej pokažimo implikacijo iz 1 v 2. Dokazujemo, da je $\Gamma(f)$ zaprta množica v $X \times Y$. Naj bo $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje v $\Gamma(f)$ takšno, da je $(x_0, y_0) \in X \times Y$ limita tega zaporedja. Po izreku 1.24 zadošča dokazati, da je $(x_0, y_0) \in \Gamma(f)$ oziroma, da je $y_0 = f(x_0)$. Velja naslednje:

$$f(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) \overset{f \text{ zvezna}}{=} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Sedaj pokažimo implikacijo iz 2 v 1. Naj bo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje v X in $x_0 \in X$ takšen, da je $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Po izreku 1.27 zadošča dokazati, da je $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Vemo, da je za vsak $n \in \mathbb{N}$ par $(x_n, y_n) \in \Gamma(f)$. Ker je $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje v kompaktnem metričnem prostoru Y, ima stekališče. Dokažimo, da so vsa stekališča tega zaporedja enaka $f(x_0)$. Naj bo s poljubno stekališče tega zaporedja. Naj bo še $(f(x_{i_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ podzaporedje, katerga limita je s. Potem je $(x_0, s) = \lim_{n\to\infty}(x_{i_n}, f(x_{i_n})) \in \Gamma(f)$, saj je po predpostavki $\Gamma(f)$ zaprta množica. Sledi, da je $s = f(x_0)$. □

Definicija 2.5. *Naj bo $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ inverzno zaporedje. Za vsako naravno število k definiramo množico*

$$q_k(X_n, f_n) = \Big\{(x_1, x_2, x_3, ...) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n \mid f_n(x_{n+1}) = x_n, \text{ za vsak } n \in \{1, 2, ..., k\}\Big\}.$$

Lema 2.6. *Naj bo $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ inverzno zaporedje. Tedaj:*

1. *za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja, da je $q_{k+1}(X_n, f_n) \subseteq q_k(X_n, f_n)$,*
2. *za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja, da je $q_k(X_n, f_n)$ homeomorfen $\prod_{n=k+1}^{\infty} X_n$, če je za vsako naravno število n funkcija f_n zvezna,*
3. *$\varprojlim\{X_n, f_n\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} q_k(X_n, f_n)$.*

Dokaz. Najprej dokažimo prvo točko izreka. Oglejmo si množici

$$q_k(X_n, f_n) = \Big\{(x_1, x_2, x_3, ...) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n \mid f_n(x_{n+1}) = x_n, \text{ za vsak } n \in \{1, 2, ..., k\}\Big\}$$

in

$$q_{k+1}(X_n, f_n) = \Big\{(x_1, x_2, x_3, ...) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n \mid f_n(x_{n+1}) = x_n, \text{ za vsak } n \in \{1, 2, ..., k, k+1\}\Big\},$$

za poljuben $k \in \mathbb{N}$. Očitno sledi, da je $q_{k+1}(X_n, f_n) \subseteq q_k(X_n, f_n)$.
Sedaj dokažimo drugo točko izreka. Naj bo za vsako naravno število k funkcija $\varphi_k : q_k(X_n, f_n) \to \prod_{n=k+1}^{\infty} X_n$ dana s predpisom $\varphi_k(x_1, x_2, x_3, ..., x_k, x_{k+1}, ...) = (x_{k+1}, x_{k+2}, ...)$, kjer je $(x_1, x_2, x_3, ...)$ poljubni element $q_k(X_n, f_n)$. Očitno je φ_k zvezna. Dokažimo, da je tudi injektivna. Naj bosta $\underline{y} = (y_1, y_2, ...)$ in $\underline{z} = (z_1, z_2, ...)$ poljubni točki iz $q_k(X_n, f_n)$. Predpostavimo, da je $q_k(\underline{y}) = q_k(\underline{z})$. Dokazujemo, da je $\underline{y} = \underline{z}$. Zaradi enakosti slik vemo, da je $y_n = z_n$ za vsak $n \geq k+1$. Koordinata $y_k = f_k(y_{k+1})$ in koordinata $z_k = f_k(y_{k+1})$, zato je $y_k = z_k$. Podobno velja, da je $y_m = z_m$ za vsak $m \in \{1, 2, ..., k-1\}$. Sledi, da je $\underline{y} = \underline{z}$. Dokažimo še, da je φ_k surjektivna. Naj bo $(y_{k+1}, y_{k+2}, y_{k+3}, ...) \in \prod_{n=k+1}^{\infty} X_n$. Iščemo točko $\underline{z} \in q_k(X_n, f_n)$ tako, da bo $\varphi_k(\underline{z}) = (y_{k+1}, y_{k+2}, y_{k+3}, ...)$. Naj bo $z_n = y_n$ za vsak $n \geq k+1$. Za vsak $m \in \{k, k-1, ..., 2, 1\}$ naj bo $z_m = f_m(z_{m+1})$. Definirajmo še inverzno funkcijo funkcije φ_k. Inverzna funkcija je funkcija $\varphi_k^{-1} : \prod_{n=k+1}^{\infty} X_n \to q_k(X_n, f_n)$ s predpisom $\varphi_k^{-1}(x_{k+1}, x_{k+2}, ...) = \Big(f_1(f_2(...(f_k(x_{k+1}))...)), f_2(f_3(...f_k(x_{k+1}))...)), ..., f_k(x_{k+1}), x_{k+1}, ...\Big)$, kjer je $(x_{k+1}, x_{k+2}, ...)$ poljuben element iz $\prod_{n=k+1}^{\infty} X_n$. Funkcija φ_k^{-1} je zvezna, če je za vsak $k \in \mathbb{N}$ funkcija f_k zvezna. Sledi, da je φ_k homeomorfizem za vsak $k \in \mathbb{N}$.

Dokažimo še tretjo točko izreka. Zaradi preseka mora vsaka koordinata elementa $\underline{x}$ iz $\bigcap_{n=1}^{\infty} q_k(X_n, f_n)$ zadoščati pogoju $f_k(x_{k+1}) = x_k$, kar pa je ravno definicija inverzne limite $\varprojlim\{X_n, f_n\}$. □

Izrek 2.7. *Naj bo za vsako naravno število n prostor X_n neprazen kompakten metrični prostor in $f_n : X_{n+1} \to X_n$ zvezna funkcija. Tedaj je inverzna limita neprazen kompakten metrični prostor.*

Dokaz. Za vsako naravno število k je po prejšnji lemi $q_k(X_n, f_n)$ homeomorfen $\prod_{n=k+1}^{\infty} X_n$, ki je neprazen kompakten metrični prostor. Ker sta homeomorfna, je neprazen kompakten metrični prostor tudi $q_k(X_n, f_n)$. Po prejšni lemi in po izreku 1.91 je $\varprojlim\{X_n, f_n\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} q_k(X_n, f_n)$ neprazen kompakten metrični prostor. □

Izrek 2.8. *Naj bo za vsako naravno število n prostor X_n kontinuum in $f_n : X_{n+1} \to X_n$ zvezna preslikava. Tedaj je $\varprojlim\{X_n, f_n\}$ kontinuum.*

Dokaz. Za vsako naravno število k je $q_k(X_n, f_n)$ kontinuum. Po izreku 1.104 je $\varprojlim\{X_n, f_n\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} q_k(X_n, f_n)$ kontinuum. □

Opomba 2.9.

1. *Vpeljimo oznako X_∞ za inverzno limito inverznega zaporedja $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kjer je za vsako naravno število n prostor X_n metrični prostor in $f_n : X_{n+1} \to X_n$.*

2. *Pojem projekcij smo spoznali že v podpoglavju 1.2. Za vsako naravno število n naj bo $p_n : X_\infty \to X_n$ projekcija na $n-$ti faktor definirana s predpisom $p_n(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, ...) = x_n$, kjer je $(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, ...)$ poljubni element iz X_∞.*

Trditev 2.10. *Naj bo $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ inverzno zaporedje nepraznih kompaktnih metričnih prostorov in zveznih veznih funkcij. Tedaj za vsako naravno število n velja $p_n = f_n \circ p_{n+1}$.*

Dokaz. Naj bo $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, ...) \in X_\infty$ poljuben. Tedaj je $(f_n \circ p_{n+1})(\underline{x}) = f_n(p_{n+1}(\underline{x})) = f_n(x_{n+1}) = x_n = p_n(\underline{x})$. □

Izrek 2.11. *Naj bo $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ inverzno zaporedje nepraznih kompaktnih metričnih prostorov in zveznih veznih funkcij. Naj bo $k \in \mathbb{N}$ poljuben. Če je p_k surjektivna, potem je f_k surjektivna.*

Dokaz. Naj bo $k \in \mathbb{N}$ poljuben in p_k surjektivna funkcija. Dokazujemo, da je f_k surjektivna. Naj bo $x \in X_k$ poljuben. Iščemo tak $y \in X_{k+1}$, da bo $f_k(y) = x$. Ker je p_k surjektivna, obstaja $\underline{x} \in X_\infty$, da je $p_k(\underline{x}) = x$. Vzemimo za y kar $p_{n+1}(\underline{x})$. Po prejšnem izreku sledi, da je $f_k(y) = x$. □

Izrek 2.12. *Naj bo $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ inverzno zaporedje nepraznih kompaktnih metričnih prostorov in zveznih veznih funkcij. Naslednji trditvi sta ekvivalentni.*

1. *Za vsako naravno število n je funkcija f_n surjektivna.*

2. *Za vsako naravno število n je funkcija p_n surjektivna.*

Dokaz. Za dokaz implikacije iz 2 v 1 zadošča upoštevati prejšnji izrek. Dokažimo implikacijo iz 1 v 2. Predpostavimo, da je za vsako naravno število n funkcija f_n surjektivna. Naj bo $k \in \mathbb{N}$ poljuben. Dokazujemo, da je p_k surjektivna. Naj bo $x_k \in X_k$ poljuben. Induktivno določimo $x_i = f_i(x_{i+1})$ za vsak $i \in \{1, 2, ..., k-1\}$. Ker je f_k surjektivna, obstaja $x_{k+1} \in X_{k+1}$ tako, da je $f_k(x_{k+1}) = x_k$. Induktivno izberemo $x_{i+1} \in X_{i+1}$ tako, da je $f_i(x_{i+1}) = x_i$ za vsak $i \geq k+1$. Tako konstruiran $\underline{x}$ je element X_∞ in $p_k(\underline{x}) = x_k$. □

Izrek 2.13. *Naj bosta $\{X_n, f_n\}_{n=1}^\infty$ in $\{Y_n, g_n\}_{n=1}^\infty$ inverzni zaporedji nepraznih kompaktnih metričnih prostorov in zveznih veznih funkcij. Naj bo še za vsako naravno število n funkcija $\varphi_n : X_n \to Y_n$ takšna, da velja $g_n \circ \varphi_{n+1} = \varphi_n \circ f_n$. Naj bo še $\varphi : X_\infty \to Y_\infty$ definirana s predpisom $\varphi(x_1, x_2, x_3, ...) = (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \varphi_3(x_3), ...)$, kjer je $(x_1, x_2, x_3, ...)$ poljuben element iz X_∞. Tedaj velja:*

1. *Funkcija φ je dobro definirana.*
2. *Če je za vsako naravno število n funkcija φ_n injektivna, sledi da je tudi φ injektivna funkcija.*
3. *Če je za vsako naravno število n funkcija φ_n zvezna, sledi da je tudi φ zvezna funkcija.*
4. *Če je za vsako naravno število n funkcija φ_n homeomorfizem, sledi da je tudi φ homeomorfizem.*

Dokaz. Najprej dokažimo prvo točko izreka. Dokazujemo, da je za poljuben $\underline{x} \in X_\infty$ $\varphi(\underline{x}) \in Y_\infty$. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ poljuben. Dokazujemo, da je $\varphi_n(x_n) = g_n(\varphi_{n+1}(x_{n+1}))$. Po predpostavki velja, da je $\varphi_n(x_n) = \varphi_n(f_n(x_{n+1})) = g_n(\varphi_{n+1}(x_{n+1}))$.
Sedaj dokažimo drugo točko izreka. Naj bosta $\underline{x}$ in $\underline{y}$ poljubna elementa iz X_∞. Predpostavimo, da je $\underline{x} \neq \underline{y}$. Dokazujemo, da je $\varphi(\underline{x}) \neq \varphi(\underline{y})$. Ker je $\underline{x} \neq \underline{y}$, obstaja $k \in \mathbb{N}$ tako, da je $x_k = y_k$. Ker je φ_k injektivna sledi, da je $\varphi_k(x_k) \neq \varphi_k(y_k)$. Iz tega sledi, da je $\varphi(\underline{x}) \neq \varphi(\underline{y})$.
Tretja točka izreka očitno sledi iz dejstva, da so vse koordinatne funkcije zvezne.
Dokažimo četrto točko izreka. Vemo že, da je φ zvezna funkcija. Dokažimo, da obstaja inverzna funkcija funkcije φ. Naj bo $\varphi^{-1} : Y_\infty \to X_\infty$ funkcija definirana s predpisom $\varphi^{-1}(y_1, y_2, y_3, ...) = (\varphi_1^{-1}(y_1), \varphi_2^{-1}(y_2), \varphi_3^{-1}(y_3), ...)$, kjer je $(y_1, y_2, y_3, ...)$ poljubna točka iz Y_∞. Pokažimo, da je taka definicija funkcije dobra. Za vsako naravno število n mora veljati, da je $f_n(\varphi_{n+1}^{-1}(y_{n+1})) = \varphi_n^{-1}(y_n)$. Z leve na enakost delujmo s funkcijo φ_n. Sledi, da je leva stran enakosti enaka

$$\varphi_n(f_n(\varphi_{n+1}^{-1}(y_{n+1}))) = g_n(\varphi_{n+1}(\varphi_{n+1}^{-1}(y_{n+1}))) = g_n(y_{n+1}) = y_n$$

in desna stran enakosti je enaka

$$\varphi_n(\varphi_n^{-1}(y_n)) = y_n.$$

Funkcija φ^{-1} je dobro definirana. Kompozitum $\varphi^{-1} \circ \varphi$ slika iz X_∞ v X_∞ in za poljuben $\underline{x} \in X_\infty$ velja, da je $(\varphi^{-1} \circ \varphi)(\underline{x}) = \varphi^{-1}(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), ...) = (\varphi_1^{-1}(\varphi_1(x_1)), \varphi_2^{-1}(\varphi_2(x_2)), ...) = \underline{x}$. Podobno dokažemo, da kompozitum $\varphi \circ \varphi^{-1}$ slika iz Y_∞ v Y_∞ in da za poljuben $\underline{y} \in Y_\infty$ velja, da je $(\varphi \circ \varphi^{-1})(\underline{y}) = \underline{y}$. Funkcija φ^{-1} je zvezna, saj so vse koordinatne funkcije φ_n^{-1} zvezne po predpostavki. □

2.2 Posplošena inverzna zaporedja in posplošene inverzne limite večličnih funkcij

V podpoglavju definiramo Hausdorffovo metriko in hiperprostor prostora (X, d). Sledijo definicije večlične funkcije, posplošenega inverznega zaporedja večličnih funkcij in posplošene inverzne limite večličnih funkcij. Nadalje definiramo navzgor polzvezno večlično funkcijo, surjektivnost grafa in dokažemo, da je f navzgor polzvezna funkcija natanko tedaj, ko je njen graf zaprta množica. Opazujemo kompozitum večličnih funkcij in dokažemo nekaj njegovih lastnosti. Sledijo trije izreki o lastnostih navzgor polzveznih funkcij. V zaključku poglavja dokažemo, kdaj je posplošena inverzna limita kontinuum.

Definicija 2.14. *Naj bo (X, d) kompakten metrični prostor. Naj bo:*

1. $2^X = \{A \subseteq X \mid A$ *neprazna in zaprta*$\}$,
2. $C(X) = \{A \in 2^X \mid A$ *je povezana*$\}$.

Definicija 2.15. *Naj bo (X, d) kompakten metrični prostor. Za vsako množico $A \in 2^X$ in $\varepsilon > 0$ definiramo*

$$N_d(\varepsilon, A) = \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon \text{ za nek } a \in A\}.$$

Definicija 2.16. *Naj bosta A in B poljubna elementa iz 2^X. Preslikavo $H_d : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}$ s predpisom*

$$H_d(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \,|\, A \subseteq N(\varepsilon, B) \text{ in } B \subseteq N(\varepsilon, A)\}$$

imenujemo Hausdorffova metrika. Prostor $(2^X, H_d)$ imenujemo hiperprostor prostora (X, d).

Opomba 2.17. *Dokaz, da je Hausdorffova metrika zares metrika prostora 2^X, najdemo v [6, str. 53].*

Definicija 2.18. *Naj bosta (X, d_1) in (Y, d_2) kompaktna metrična prostora. Funkcijo*

$$f : (X, d_1) \to (2^Y, H_{d_2})$$

imenujemo večlična funkcija iz prostora X v Y. Oznaka: $f : (X, d_1) \multimap (Y, d_2)$.

$$X_1 \overset{f_1}{\multimap} X_2 \overset{f_2}{\multimap} X_3 \;\cdots\; X_n \overset{f_n}{\multimap} X_{n+1} \overset{f_{n+1}}{\multimap} \;\cdots$$

Slika 2.2: Shema inverznega zaporedja večličnih funkcij

Definicija 2.19. *Naj bo (X_n, d_n) metrični prostor in $f_n : (X_{n+1}, d_{n+1}) \multimap (X_n, d_n)$ večlična funkcija za vsako naravno število n. Dvojnemu zaporedju $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ pravimo posplošeno inverzno zaporedje.*

Definicija 2.20. *Posplošena inverzna limita posplošenega inverznega zaporedja $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je podprostor topološkega produkta $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ definiran kot*

$$\underset{\circ\!-}{\lim}\{X_n, f_n\} = \Big\{(x_1, x_2, ...) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n \mid \textit{za vsak } n \in \mathbb{N} :\; x_n \in f_n(x_{n+1})\Big\}.$$

Primer. *Naj bo za vsako naravno število n prostor $X_n = [0,1]$ in za vsak $t \in [0,1) : f_n = \{t\}$ in za $t = 1 : f(1) = [0,1]$. Naj bo $A_\infty = \{(t,t,t,...) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n \mid t \in [0,1]\}$ in za vsako naravno število n naj bo $A_n = \{(t,t,...,t,1,1,1,...) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n \mid t \in [0,1]\}$. Inverzna limita $\underset{\circ\!-}{\lim}\{X_n, f_n\} = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \cup A_\infty$ in je homeomorfna harmonični pahljači.*

Opomba 2.21. *Vsako enolično funkcijo lahko interpretiramo kot večlično funkcijo. Naj bo $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ enolična funkcija. Tedaj je $F : (X, d_1) \multimap (Y, d_2)$ definirana s predpisom $F(x) = \{f(x)\}$ večlična funkcija.*

Definicija 2.22. *Funkcija $f : (X, d_1) \multimap (Y, d_2)$ je navzgor polzvezna v točki $x \in X$, če za vsako odprto podmnožico V množice Y, kjer je $f(x) \subseteq V$, obstaja odprta podmnožica U množice X, kjer je $x \in U$ tako, da za vsak $t \in U$ sledi, da je $f(t) \subseteq V$. Če je f navzgor polzvezna v vsaki točki množice X, potem pravimo da je f navzgor polzvezna.*

Definicija 2.23. *Graf funkcije $f : (X, d_1) \multimap (Y, d_2)$ je množica*

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in f(x)\}.$$

Definicija 2.24. *Pravimo, da je graf večlične funkcije surjektiven, če za vsak $y \in Y$ obstaja $x \in X$ tako, da je $y \in f(x)$.*

Izrek 2.25. *Naj bosta (X, d_1) in (Y, d_2) kompaktna metrična prostora in $f : (X, d_1) \multimap (Y, d_2)$ večlična funkcija. Potem je f navzgor polzvezna natanko tedaj, ko je $\Gamma(f)$ zaprta množica v topološkem produktu $X \times Y$.*

Dokaz. [3, str. 3] □

Definicija 2.26. *Naj bosta $f : (X_1, d_1) \multimap (X_2, d_2)$ in $g : (X_2, d_2) \multimap (X_3, d_3)$ večlični funkciji. Kompozitum funkcij f in g, $g \circ f$, definiramo kot*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \bigcup_{y \in f(x)} g(y)$$

za poljuben $x \in X$.

Opomba 2.27. *Kompozitum večličnih funkcij ni nujno večlična funkcija.*

Primer. *Naj bodo $X_1 = X_2 = X_3 = [0,1]$ in $f : X_1 \multimap X_2$ in $g : X_2 \multimap X_3$ definirani kot*

$$\text{za vsak } x \in X_1, \; f(x) = [0,1] \; \text{ ter}$$

$$\text{za vsak } y \in X_2, \; g(y) = \begin{cases} \{1-y\} & ; \; y \notin \{0,1\}, \\ \{\frac{1}{3}\} & ; \; y \in \{0,1\}. \end{cases}$$

Potem $(g \circ f)(\frac{1}{3}) = g(f(\frac{1}{3})) = g([0,1]) = (0,1)$, ki ni zaprta množica, zato $(g \circ f)(\frac{1}{3}) \notin 2^{X_3}$. Posledično $g \circ f$ ni večlična funkcija.

Izrek 2.28. *Naj bodo (X_1, d_1), (X_2, d_2) in (X_3, d_3) metrični prostori in $f : (X_1, d_1) \multimap (X_2, d_2)$ in $g : (X_2, d_2) \multimap (X_3, d_3)$ večlični funkciji. Naslednji trditvi sta ekvivalentni.*

1. *Če je g navzgor polzvezna, potem je $g \circ f : (X_1, d_1) \multimap (X_3, d_3)$ večlična funkcija.*
2. *Če sta f in g navzgor polzvezni, potem je $g \circ f : (X_1, d_1) \multimap (X_3, d_3)$ navzgor polzvezna večlična funkcija.*

Dokaz. [2, str. 87] □

Izrek 2.29. *Naj bosta X in Y neprazna kompaktna metrična prostora in naj bo za vsako naravno število n, funkcija $F_n : X \multimap Y$ navzgor polzvezna funkcija tako, da za vsak $x \in X$ velja, da je $F_{n+1}(x) \subseteq F_n(x)$, za vsak $n \in \mathbb{N}$. Naj bo še $g : X \multimap Y$ definirana s predpisom $g(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(x)$. Tedaj velja:*

1. *Funkcija g je navzgor polzvezna funkcija.*
2. *Če je za vsako n naravno število $Y = \bigcup_{x \in X} F_n(x)$, sledi, da je $Y = \bigcup_{x \in X} g(x)$.*

Dokaz. Najprej preverimo ali je funkcija g dobro definirana. Naj bo $x \in X$ poljuben. S pomočjo izreka 1.91 vidimo, da je $g(x)$ neprazna in zaprta v Y.
Sedaj dokažimo prvo točko izreka. Naj bo $x_0 \in X$ poljuben. Dokazujemo, da je g navzgor polzvezna v x_0. Naj bo U poljubna odprta podmnožica Y, ki vsebuje $g(x_0) = F_1(x_0) \cap F_2(x_0) \cap ...$ kot

podmnožico. Dokažimo, da obstaja $m \in \mathbb{N}$ tako, da je za vsak $n \geq m$ množica $F_n(x_0)$ podmnožica množice U. Recimo, da to ni res. Torej za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja, da obstaja $y_n \in F_n(x_0) \setminus U$. Dobili smo zaporedje $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v prostoru $Y \setminus U$. Ker je $Y \setminus U$ zaprta množica v kompaktnem prostoru Y, je $Y \setminus U$ kompaktna množica in zato ima zaporedje $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stekališče, ki ga bomo označili z y_0. Torej obstaja podzaporedje $(y_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tako, da je $y_0 = \lim\limits_{n\to\infty} y_{i_n}$. Limita $y_0 \notin U$ in $y_0 \in g(x) \subseteq U$, kar je protislovje. Torej zares obstaja tak $m \in \mathbb{N}$ tako, da je $F_m(x_0) \subseteq U$. Ker je F_m navzgor polzvezna večlična funkcija, obstaja taka odprta množica V, ki vsebuje x_0, tako, da za vsak $x \in V$ velja, da je $F_m(x) \subseteq U$. Torej za vsak $x \in X$ je $g(x) \subseteq F_m(x) \subseteq U$. Iz tega sledi, da je $g(x) \subseteq U$ in zato je g navzgor polzvezna večlična funkcija.
Sedaj dokažimo drugo točko izreka. Dokazujemo, da je $Y = \bigcup_{x\in X} g(x)$. Očitno je $\bigcup_{x\in X} g(x) \subseteq Y$. Dokažimo še, da je $Y \subseteq \bigcup_{x\in X} g(x)$. Naj bo $q \in Y$ poljuben. Iz predpostavke vemo, da je $q \in \bigcup_{x\in X} F_1(x)$, $q \in \bigcup_{x\in X} F_2(x)$, ... Naj bo $x_1 \in X$ takšen, da je $q \in F_1(x_1)$. Nadalje naj bo za vsako naravno število $n > 1$, $x_n \in X$ takšen, da je $q \in F_n(x_n)$. Iščemo tak $x_0 \in X$, da je $q \in g(x_0)$. Naj bo x_0 stekališče zaporedja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Torej obstaja tako podzaporedje $(x_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$, da je $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_{i_n}$. Dokazati želimo, da je $q \in g(x_0)$. Recimo, da ni res. Naj bo $U = Y \setminus \{q\}$. Tedaj je U odprta množica v Y, za katero velja, da $q \notin U$ in $g(x_0) \subseteq U$. Naj bo $m \in \mathbb{N}$ taki, da je $F_m(x_0) \subseteq U$. Ker je F_m navzgor polzvezna večlična funkcija, obstaja odprta podmnožica V množice X, ki vsebuje x_0 in za vsak $x \in V$ velja, da je $F_m(x) \subseteq U$. Obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $i_{n_0} > m$ in za vsak $n \geq n_0$ velja, da je $x_{i_n} \in V$. Sledi, da za vsak $n \geq n_0$ velja, da je $F_m(x_{i_n}) \subseteq U$ in $F_{i_n}(x_{i_n}) \subseteq F_m(x_{i_n})$. Iz tega sledi, da je $q \in F_{i_n}(x_{i_n}) \subseteq F_m(x_{i_n}) \subseteq U$, kar je protislovje. □

Posledica 2.30. *Naj bo za vsak $n \in \mathbb{N}$ funkcija $f_n : X \multimap Y$ navzgor polzvezna in naj velja naslednje:*

1. *za vsak $x \in X$ velja, da je $f_{n+1}(x) \subseteq f_n(x)$, za vsako naravno število n,*
2. *za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja, da je $\bigcup_{x\in X} f_n(x) = Y$,*
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (\operatorname{diam}(f_n(x))) = 0$, *za vsak $x \in X$.*

Naj bo še $f : X \to Y$ funkcija definirana s predpisom $f(x) = y_x$, kjer je $\{y_x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Tedaj je funkcija f surjekcija.

Izrek 2.31. *Naj bo $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ inverzno zaporedje nepraznih kompaktnih metričnih prostorov (X_n, d_n) in večličnih funkcij $f_n : (X_{n+1}, d_{n+1}) \multimap (X_n, d_n)$. Če je f_n navzgor polzvezna za vsako naravno število n, potem je posplošena inverzna limita $\varprojlim\{X_n, f_n\}$ neprazna in kompaktna.*

Dokaz. [4, str. 121] □

Opomba 2.32. *V prejšnjem razdelku smo v izreku 2.8 dokazali, da če je za vsako naravno število n prostor X_n kontinuum in so vezne funkcije zvezne, potem je inverzna limita tudi kontinuum. Za posplošena inverzna zaporedja to ne velja.*

Definicija 2.33. *Komponenta C nepraznega metričnega prostora X je maksimalna povezana podmnožica X.*

Primer. *Naj bo za vsako naravno število n prostor $X_n = [0,1]$ in za vsak $t \in [0,1]$ je $f_n(t) = \{0,1\}$. Posplošena inverzna limita $\varprojlim\{X_n, f_n\} = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(x_1, x_2, x_3, ...) \mid$ za vsak $n \in \mathbb{N} : x_n \in \{0,1\}\}$. Označimo z $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ in dokažimo, da je ta množica popolnoma nepovezana. Naj bo C komponenta od X. Dokažimo, da je $|C| = 1$. Recimo, da $x, y \in C$, $x \neq y$. Torej obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $x_{n_0} \neq y_{n_0}$. Brez izgube za splošnost naj bo $x_{n_0} = 0$ in $y_{n_0} = 1$. Vpeljimo*

$$U = [0,1] \times [0,1] \times ... \times [0,1] \times \overbrace{[0, \frac{1}{2})}^{n_0} \times [0,1] \times ... \cap X$$

in

$$V = [0,1] \times [0,1] \times ... \times [0,1] \times \overbrace{(\frac{1}{2}, 1]}^{n_0} \times [0,1] \times ... \cap X.$$

Množici U in V sta odprti, disjunktni, neprazni, katerih unija je X. Kar pomeni, da sta U in V separacija za X. Ker je C povezana in $C \cap U \neq \emptyset$ ter $C \cap V \neq \emptyset$, pridemo do protislovja.

Izrek 2.34. *Naj bo za vsako naravno število n prostor X_n kontinuum, $f_n : X_{n+1} \to X_n$ navzgor polzvezna večlična funkcija in za vsak $x \in X_{n+1}$ velja, da je $f_n(x)$ povezana množica. Potem je $\varprojlim\{X_n, f_n\}$ kontinuum.*

Dokaz. [4, str. 124] □

Poglavje 3

Glavni rezultati

Poglavje začnemo z definicijo funkcije $Z_{Y\subseteq X}$ in dokažemo njeno dobro definiranost ter da zadošča pogojem navzgor polzvezne večlične funkcije. Nadaljujemo z definicijo funkcije $\delta_{(X_1,X_2)}(g)$. Prav tako dokažemo, da je ta funkcija dobro definirana in da je navzgor polzvezna večlična funkcija. S pomočjo omenjenih funkcij sledi dokaz dveh glavnih izrekov tega poglavja.

Definicija 3.1. *Naj bo (X,d) neprazen kompakten metrični prostor in Y neprazna zaprta podmnožica množice X. Definiramo funkcijo $Z_{Y\subseteq X} : (X,d) \multimap (Y, d|_Y)$ s predpisom*

$$Z_{Y\subseteq X}(x) = \{y \in Y \mid d(y,x) = d(Y,x)\}$$

Primer. *Naj bo $X = [-1,1]$ in $Y = \{-1,1\}$. Potem je $Z_{Y\subseteq X}(0) = Y$ in $Z_{Y\subseteq X}(\frac{1}{2}) = \{1\}$.*

Opomba 3.2. *Dokazati moramo, da je f dobro definirana. Pri dokazu si bomo pomagali z naslednjo lemo.*

Lema 3.3. *Naj bo (X,d) neprazen kompakten metrični prostor in Y neprazna zaprta podmnožica množice X. Naj bo $f : X \to \mathbb{R}$ definirana kot*

$$f(x) = d(x,Y),$$

za poljuben $x \in X$. Potem je f zvezna funkcija.

Dokaz. Prvo pokažimo, da velja $d(x,Y) \leq d(x,x_1) + d(x_1,Y)$ za poljubna $x, x_1 \in X$. Naj bodo $x, x_1 \in X$ in $y, y_1 \in Y$ taki, da je $d(x,Y) = d(x,y)$ in $d(x_1,Y) = d(x_1,y_1)$. Potem velja

$$d(x,Y) = d(x,y) \leq d(x,y_1) \leq d(x,x_1) + d(x_1,y_1) = d(x,x_1) + d(x_1,Y).$$

Naj bo $x_0 \in X$ poljuben. Dokazujemo, da je f zvezna v x_0. Naj bo $\varepsilon > 0$ in naj bo $\delta = \varepsilon$. Za vsak $x \in X$, za katerega velja $d(x, x_0) < \delta$, velja naslednje

$$|f(x) - f(x_0)| = |d(x, Y) - d(x_0, Y)| \leq |d(x, x_0) + d(x_0, Y) - d(x_0, Y)|$$

$$= |d(x, x_0)| = d(x, x_0) < \delta = \varepsilon.$$

Dokazali smo, da je f zvezna. □

Izrek 3.4. *Naj bo (X, d) neprazen kompakten metrični prostor in Y neprazna zaprta podmnožica množice X. Funkcija $Z_{Y\subseteq X} : (X, d) \multimap (Y, d|_Y)$ je dobro definirana večlična funkcija.*

Dokaz. Množica $Z_{Y\subseteq X}(x)$ očitno ni prazna, saj je (X, d) kompakten metrični prostor in Y neprazna zaprta podmnožica množice X. Naj bo $x \in X$ poljuben. Dokazati moramo, da je $Z_{Y\subseteq X}(x)$ zaprta v $(Y, d|_Y)$. Naj bo $r \geq 0$ takšen, da je $d(x, y) = r$, za vse $y \in Z_{Y\subseteq X}(x)$. Naj bo (x_n) zaporedje v $Z_{Y\subseteq X}(x)$ in naj bo $x_0 \in X$ takšen, da je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Zadošča dokazati, da je $x_0 \in Y$ in $d(x_0, x) = r$. Po lemi 3.3 in zaprtosti množice Y v X sledi

$$d(x_0, x) = d(\lim_{n\to\infty} x_n, x) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = r.$$

□

Izrek 3.5. *Naj bo (X, d) neprazen kompakten metrični prostor in naj bo Y neprazna zaprta podmnožica množice X. Funkcija $Z_{Y\subseteq X} : (X, d) \multimap (Y, d|_Y)$ je navzgor polzvezna funkcija.*

Dokaz. Zadošča dokazati, da je $\Gamma(Z_{Y\subseteq X})$ zaprta množica v $X \times Y$. Naj bo $(x_0, y_0) \in X \times Y$ in naj bo (x_n, y_n) zaporedje točk v $\Gamma(Z_{Y\subseteq X})$ tako, da je

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0).$$

Pokažimo, da je $(x_0, y_0) \in \Gamma(Z_{Y\subseteq X})$. Ker je metrika d zvezna funkcija na X, sledi

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x_0, y_0).$$

Zaradi definicije $Z_{Y\subseteq X}$ moramo pokazati, da je $d(x_0, y_0) = d(x_0, Y)$. Zaporedje pozitivnih realnih števil $(d(x_n, Y))$ je omejeno. Zato obstaja strogo naraščajoče zaporedje (i_n) naravnih števil, da je zaporedje $(d(x_{i_n}, Y))$ konvergentno. Ker je za vsako naravno število n točka $(x_n, y_n) \in \Gamma(Z_{Y\subseteq X})$ in po lemi 3.3 o zveznosti funkcije, velja

$$d(x_0, y_0) = \lim_{n\to\infty} d(x_{i_n}, y_{i_n}) = \lim_{n\to\infty} d(x_{i_n}, Y) = d(\lim_{n\to\infty} x_{i_n}, Y) = d(x_0, Y).$$

□

Definicija 3.6. *Naj bosta* (X_1, d_1) *in* (X_2, d_2) *neprazna kompaktna metrična prostora,* Y_1 *neprazna zaprta podmnožica množice* X_1 *ter* Y_2 *neprazna zaprta podmnožica množice* X_2*. Funkcija* $g : (Y_1, d_1|_{Y_1}) \multimap (Y_2, d_2|_{Y_2})$ *naj bo većlična navzgor polzvezna funkcija. Definiramo funkcijo* $\delta_{(X_1,X_2)}(g) : (X_1, d_1) \multimap (X_2, d_2)$ *s predpisom*

$$\delta_{(X_1,X_2)}(g) = g \circ Z_{Y_1 \subseteq X_1}.$$

Trditev 3.7. *Naj bosta* (X_1, d_1) *in* (X_2, d_2) *neprazna kompaktna metrična prostora,* Y_1 *neprazna zaprta podmnožica množice* X_1 *ter* Y_2 *neprazna zaprta podmnožica množice* X_2*. Funkcija* $g : (Y_1, d_1|_{Y_1}) \multimap (Y_2, d_2|_{Y_2})$ *naj bo večlična navzgor polzvezna funkcija. Funkcija* $\delta_{(X_1,X_2)}(g) : (X_1, d_1) \multimap (X_2, d_2)$ *je dobro definirana.*

Dokaz. Ker je g večlična navzgor polzvezna funkcija in $Z_{Y_1 \subseteq X_1}$ večlična funkcija, po izreku 2.28 sledi želeno. □

Izrek 3.8. *Naj bosta* (X_1, d_1) *in* (X_2, d_2) *neprazna kompaktna metrična prostora,* Y_1 *neprazna zaprta podmnožica množice* X_1 *ter* Y_2 *neprazna zaprta podmnožica množice* X_2*. Funkcija* $g : (Y_1, d_1|_{Y_1}) \multimap (Y_2, d_2|_{Y_2})$ *naj bo navzgor polzvezna funkcija. Funkcija* $\delta_{(X_1,X_2)}(g) : (X_1, d_1) \multimap (X_2, d_2)$ *je navzgor polzvezna funkcija.*

Dokaz. Ker je $\delta_{(X_1,X_2)}(g)$ kompozitum dveh navzgor polzveznih funkcij, je po izreku 2.28 navzgor polzvezna funkcija. □

Opomba 3.9. *Opazimo, da velja naslednje:*

1. *Naj bo* (X, d) *neprazen kompakten metrični prostor in* Y *neprazna zaprta podmnožica množice* X*. Potem je* $Z_{Y \subseteq X}(x) = \{x\}$ *za vsak* $x \in Y$*.*
2. *Naj bosta* (X_1, d_1) *in* (X_2, d_2) *neprazna kompaktna metrična prostora,* Y_1 *neprazna zaprta podmnožica množice* X_1*,* Y_2 *neprazna zaprta podmnožica množice* X_2 *ter funkcija* $g : (Y_1, d_1|_{Y_1}) \multimap (Y_2, d_2|_{Y_2})$ *navzgor polzvezna funkcija. Potem je* $\delta_{(X_1,X_2)}(g)(x) = g(x)$ *za vsak* $x \in Y_1$*.*

Izrek 3.10. *Naj bo za vsako naravno število* n (X_n, d_n) *neprazen kompakten metrični prostor,* Y_n *neprazna zaprta podmnožica množice* X_n *in* $g_n : (Y_{n+1}, d_{n+1}|_{Y_{n+1}}) \multimap (Y_n, d_n|_{Y_n})$ *navzgor polzvezna funkcija. Potem za vsako naravno število* n *obstaja funkcija* $f_n : (X_{n+1}, d_{n+1}) \multimap (X_n, d_n)$ *tako, da je*

$$\varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty} = \varprojlim\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Dokaz. Za vsako naravno število n vzemimo za $f_n = \delta_{(X_{n+1},X_n)}(g_n)$. Dokažimo, da sta inverzni limiti enaki. Naj bo $x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in \varprojlim\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ker je $f_n|_{Y_n} = g_n$, za vsako naravno število n, sledi, da je $x_n \in f_n(x_{n+1})$, za vsako naravno število n, zato je $x \in \varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Sedaj izberemo $x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in \varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ker je $x_n \in f_n(x_{n+1}) \subseteq Y_n$, za vsako naravno število n, sledi $x_n \in Y_n$, za vsako naravno število n, zato je $f_n(x_{n+1}) = g_n(x_{n+1})$. Posledično je $x \in \varprojlim\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$. □

Izrek 3.11. *Za vsako naravno število n, naj bo (X_n, d_n) neprazen kompakten metrični prostor in naj bo A neprazna zaprta podmnožica prostora $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Naslednji trditvi sta ekvivalentni.*

1. *Obstajajo neprazne zaprte podmnožice $Y_n \subseteq X_n$ in navzgor polzvezne večlične funkcije $g_n : (Y_{n+1}, d_{n+1}|_{Y_{n+1}}) \multimap (Y_n, d_n|_{Y_n})$ tako, da je $A = \varprojlim\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

2. *Obstajajo navzgor polzvezne večlične funkcije $f_n : (X_{n+1}, d_{n+1}) \multimap (X_n, d_n)$ tako, da je $A = \varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Dokaz. Predpostavimo, da velja 1. Po izreku 3.10 obstajajo večlične navzgor polzvezne funkcije $f_n : (X_{n+1}, d_{n+1}) \multimap (X_n, d_n)$ tako, da je $A = \varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Za drugo implikacijo vzamemo projekcije $\pi_n(A)$ in funkcije $f_n|_{\pi_{n+1}(A)}$. □

Opomba 3.12. *Funkcije f_n iz izreka 3.10 imenujemo razširitvene funkcije.*

Poglavje 4

Krepka in šibka surjektivna razširitvena lastnost posplošenih inverznih zaporedij

V tem poglavju si ogledamo nekaj lastnosti razširitvenih funkcij. Najprej definiramo pojem lastnosti grafa in ga predstavimo na konkretnem primeru. Definiramo krepko in šibko razširitveno lastnost inverznih zaporedij kompaktnih metričnih prostorov. V nadaljevanju poglavja se posvetimo surjektivni razširitveni lastnosti inverznih zaporedij in dokažemo, da poljubno inverzno zaporedje nepraznih kompaktnih metričnih prostorov nima krepke surjektivne razširitvene lastnosti, vendar pa ima šibko surjektivno raširitveno lastnost.

4.1 Krepka in šibka $\mathcal{L}$-razširitvena lastnost

V začetku definiramo lastnost grafa in si ogledamo nekaj primerov le-teh. Sledi definicija krepke in šibke $\mathcal{L}$-razširitvene lastnosti posplošenih inverznih zaporedij zaprtih podmnožic nepraznih kompaktnih metričnih prostorov in definicija krepke ter šibke $\mathcal{L}$-razširitvene lastnosti posplošenih inverznih zaporedij nepraznih kompaktnih metričnih prostorov. Definicijo predstavimo na konkretnem primeru.

Definicija 4.1. *Lastnost $\mathcal{L}$ je lastnost grafa, če obstaja večlična funkcija $f : (X, d_1) \multimap (Y, d_2)$, katere graf $\Gamma(f)$ ima lastnost $\mathcal{L}$. Pravimo, da ima funkcija f lastnost $\mathcal{L}$.*

Primer. *Naslednje lastnosti so lastnosti grafa:*

- $\mathcal{L}_1$*: zaprt graf,*
- $\mathcal{L}_2$*: povezan graf,*

- $\mathcal{L}_3$: *surjektiven graf.*

Opazujmo jih na naslednjih večličnih funkcijah:

$$f : [0,1] \multimap [0,1], \quad f(t) = \{0, t\}, \ t \in [0,1]$$

in

$$g : [0,1] \multimap [0,1], \quad g(x) = \begin{cases} [0,1]; & t \neq 1, \\ 1; & sicer. \end{cases}$$

Graf funkcije f je zaprt, surjektiven in povezan v $[0,1] \times [0,1]$, zato ima funkcija f lastnosti $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ in $\mathcal{L}_3$.
Graf funkcije g je surjektiven in povezan v $[0,1] \times [0,1]$, zato ima funkcija g lastnosti $\mathcal{L}_2$ in $\mathcal{L}_3$. Ker graf funkcije g ni zaprt v $[0,1] \times [0,1]$, funcija g nima lastnosti $\mathcal{L}_1$.

Definicija 4.2. *Naj bo $\mathcal{L}$ lastnost grafa. Za vsako naravno število n naj bo (X_n, d_n) neprazen kompakten metrični prostor, Y_n neprazna zaprta podmnožica množice X_n in $g : (Y_{n+1}, d_{n+1}|_{Y_{n+1}}) \multimap (Y_n, d_n|_{Y_n})$ večlična funkcija, katere graf ima lastnost $\mathcal{L}$. Pravimo, da ima posplošeno inverzno zaporedje $\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$*

1. *šibko $\mathcal{L}$-razširitveno lastnost glede na (X_n, d_n), če za vsako naravno število n obstaja večlična funkcija $f_n : (X_{n+1}, d_{n+1}) \multimap (X_n, d_n)$ tako, da je*
   (a) *skrčitev $f_n|_{Y_{n+1}} = g_n$, za vsako naravno število n,*
   (b) *inverzna limita $\varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty} = \varprojlim\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$,*
   (c) *graf $\Gamma(f_n)$ ima lastnost grafa $\mathcal{L}$ za neskončno mnogo naravnih števil n.*
2. *krepko $\mathcal{L}$-razširitveno lastnost glede na (X_n, d_n), če za vsako naravno število n obstaja večlična funkcija $f_n : (X_{n+1}, d_{n+1}) \multimap (X_n, d_n)$ tako, da je*
   (a) *skrčitev $f_n|_{Y_{n+1}} = g_n$, za vsako naravno število n,*
   (b) *inverzna limita $\varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty} = \varprojlim\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$,*
   (c) *graf $\Gamma(f_n)$ ima lastnost grafa $\mathcal{L}$ za vsako naravno število n.*

Definicija 4.3. *Naj bo $\mathcal{L}$ lastnost grafa. Naj bo za vsako naravno število n prostor (X_n, d_n) neprazen kompakten metrični prostor in $f_n : (X_{n+1}, d_{n+1}) \multimap (X_n, d_n)$ večlična funkcija, katere graf $\Gamma(f_n)$ ima lastnost grafa $\mathcal{L}$. Pravimo, da ima posplošeno inverzno zaporedje $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$*

1. *šibko $\mathcal{L}$-razširitveno lastnost, če za vsako naravno število n in za poljuben neprazen kompakten metrični prostor (Z_n, D_n), takšen, da lahko (X_n, d_n) vložimo v (Z_n, D_n), velja, da ima posplošeno inverzno zaporedje $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ šibko $\mathcal{L}$-razširitveno lastnost glede na (Z_n, D_n).*

2. *krepko $\mathcal{L}$-razširitveno lastnost, če za vsako naravno število n in za poljuben neprazen kompakten metrični prostor (Z_n, D_n), takšen, da lahko (X_n, d_n) vložimo v (Z_n, D_n), velja, da ima posplošeno inverzno zaporedje $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ krepko $\mathcal{L}$-razširitveno lastnost glede na (Z_n, D_n).*

Opomba 4.4. 1. *Očitno je, če ima posplošeno inverzno zaporedje $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ krepko $\mathcal{L}$-razširitveno lastnost, da ima tudi šibko $\mathcal{L}$-razširitveno lastnost.*

2. *Naj bo $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ poljubno posplošeno inverzno zaporedje nepraznih kompaktnih metričnih prostorov (X_n, d_n) in večličnih funkcij $f_n : (X_{n+1}, d_{n+1}) \multimap (X_n, d_n)$, kjer ima $\Gamma(f_n)$ $\mathcal{L}$-razširitveno lastnost. Naslednji trditvi sta ekvivalentni:*

   (a) *Posplošeno inverzno zaporedje $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ima krepko (šibko) $\mathcal{L}$-razširitveno lastnost.*

   (b) *Posplošeno inverzno zaporedje $\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$ ima krepko (šibko) $\mathcal{L}$-razširitveno lastnost glede na (X_n, d_n), za poljubno posplošeno inverzno zaporedje $\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$, kjer je za vsako n naravno število Y_n neprazna zaprta podmnožica množice X_n in $g_n : (Y_{n+1}, d_{n+1}|_{Y_{n+1}}) \multimap (Y_n, d_n|_{Y_n})$ večlična funkcija z lastnostjo grafa $\mathcal{L}$.*

Primer. *Naj bo sedaj $\mathcal{L}$ lastnost navzgor polzveznosti. Vpeljimo oznako $\mathcal{L} = \mathcal{USC}$. Po izreku 3.10 za poljubno zaporedje (X_n, d_n) nepraznih kompaktnih metričnih prostorov in poljubno posplošeno inverzno zaporedje $\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$, kjer je za poljubno naravno število n množica Y_n neprazna zaprta podmnožica množice X_n in $g_n : (Y_{n+1}, d_{n+1}|_{Y_{n+1}}) \multimap (Y_n, d_n|_{Y_n})$ navzgor polzvezna večlična funkcija, ima posplošeno inverzno zaporedje $\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$ krepko $\mathcal{USC}$-razširitveno lastnost glede na (X_n, d_n). Iz tega sledi, da ima posplošeno inverzno zaporedje $\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$ tudi šibko $\mathcal{USC}$-razširitveno lastnost glede na (X_n, d_n).*
Iz prejšne opombe lahko trdimo, da ima posplošeno inverzno zaporedje $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nepraznih kompaktnih metričnih prostorov (X_n, d_n) in navzgor polzveznih večličnih funkcij $f_n : (X_{n+1}, d_{n+1}) \multimap (X_n, d_n)$ krepko (in s tem šibko) $\mathcal{USC}$-razširitveno lastnost.

4.2 Krepka in šibka surjektivna razširitvena lastnost

V tem podpoglavju dokažemo, da ima posplošeno inverzno zaporedje poljubnih metričnih prostorov in večličnih funkcij šibko surjektivno-razširitveno lastnost, vendar nima krepke surjektivne-razširitvene lastnosti. Ogledamo si tri primere situacij med zaprtimi podmnožicami Y_n in kompaktnimi metričnimi prostori X_n ter dokažemo tri trditve, ki zajamejo njihove lastnosti. Definiramo nekoliko modificirano obliko razširitvenih funkcij. Sledi trditev, da za poljubno zaporedje nepraznih kompaktnih metričnih prostorov, poljubnih zaprtih podmnožic in navzgor polzveznih večličnih funkcij ter poljubno zaporedje strogo naraščajočih naravnih števil lahko najdemo takšne navzgor polzvezne večlične funkcije tako, da so te surjektivne za določena naravna števila in inverzni limiti podmnožic in kompaktnih metričnih prostorov sta enaki. Sledijo štiri poledice tega izreka, ena izmed katerih pravi, da ima inverzno zaporedje kompaktnih metričnih prostorov šibko surjektivno razširitveno lastnost.

Opomba 4.5. *V nadaljevanju si bomo pobližje ogledali surjektivne grafe navzgor polzveznih večličnih funkcij. To lastnost bomo označili z $\mathcal{S}$.*

Pred tem poglejmo, kaj se zgodi z lastnostjo $\mathcal{S}$, če obstaja tako naravno število $i \in \mathbb{N}$, da velja $Y_i \neq X_i$.

Trditev 4.6. *Naj bo za vsako naravno število n prostor (X_n, d_n) neprazen kompakten metrični prostor, Y_n neprazna zaprta podmnožica množice X_n in $g_n : (Y_{n+1}, d_{n+1}|_{Y_{n+1}}) \multimap (Y_n, d_n|_{Y_n})$ navzgor polzvezna večlična funkcija. Če obstaja $i \in \mathbb{N}$ tako, da je $Y_i \neq X_i$, potem za poljubno inverzno zaporedje $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$, za katero velja*

$$\varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty} = \varprojlim\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$$

in kjer je $f_n : (X_{n+1}, d_{n+1}) \multimap (X_n, d_n)$ večlična funkcija, sledi, da obstaja tako naravno število $j \in \mathbb{N}$, da graf funkcije f_j ni surjektiven.

Dokaz. Naj bo $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ poljubno posplošeno inverzno zaporedje nepraznih kompaktnih metričnih prostorov (X_n, d_n) in večličnih funkcij $f_n : (X_{n+1}, d_{n+1}) \multimap (X_n, d_n)$. Naj bo $i \in \mathbb{N}$ naravno število, za katerega velja, da $Y_i \neq X_i$. Predpostavimo še, da je

$$\varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty} = \varprojlim\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Recimo, da je graf f_n surjektiven za vsako naravno število n. Ker je $Y_i \neq X_i$, obstaja $z_0 \in X_i \backslash Y_i$. Ker je f_n surjektivna za vsak $n \in \mathbb{N}$, obstaja tak $x_{i+1} \in X_{i+1}$, da je $z_0 \in f_i(x_{i+1})$. Prav tako obstaja tak $x_{i+2} \in X_{i+1}$, da je $x_{i+1} \in f_{i+1}(x_{i+2})$. Nadaljujemo s postopkom. Ker je f_n večlična funkcija za vsako naravno število n, vemo, da obstaja x_{i-1} tak, da je $x_{i-1} \in f_{i-1}(z_0)$. Podobno za vsak $k \in \{1, 2, ..., i-2\}$. Skonstruirali smo točko $x_0 = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, z_0, x_{i+1}, ...) \in \varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ta ni v $\varprojlim\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$, saj $z_0 \notin Y_i$ in tako posledično $z_0 \notin \prod_{n=1}^{\infty} Y_n$, kar je v protislovju z dejstvom, da sta inverzni limiti enaki. Dokazali smo, da obstaja neko naravno število j, tako da f_j ni surjektivna. □

Posledica 4.7. *Obstaja zaporedje nepraznih kompaktnih metričnih prostorov (X_n, d_n) in posplošeno inverzno zaporedje $\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$, kjer je za vsako naravno število n množica Y_n neprazna zaprta podmnožica množice X_n in $g_n : (Y_{n+1}, d_{n+1}|_{Y_{n+1}}) \multimap (Y_n, d_n|_{Y_n})$ navzgor polzvezna večlična funkcija, katere graf je surjektiven, tako da posplošeno inverzno zaporedje $\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$ nima krepke $\mathcal{S}$-razširitvene lastnosti glede na (X_n, d_n).*

Dokaz. Po prejšnem izreku sledi, da obstaja $j \in \mathbb{N}$ tak, da graf $\Gamma(f_j)$ ni surjektiven. □

Posledica 4.8. *Obstaja posplošeno inverzno zaporedje* $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *kompaktnih metričnih prostorov* (X_n, d_n) *in navzgor polzveznih večličnih funkcij* $f_n : (X_{n+1}, d_{n+1}) \multimap (X_n, d_n)$*, katerih graf* $\Gamma(f_n)$ *je surjektiven, in to zaporedje nima krepke* $\mathcal{S}$*-razširitvene lastnosti.*

Dokaz. Naj bo (Z_n, D_n) poljubno zaporedje, kjer za vsako naravno število n velja, da lahko (X_n, d_n) vložimo v (Z_n, D_n). Če je za vsako naravno število n prostor $X_n = Z_n$, potem govorimo o zaporedju (X_n, d_n). Recimo, da obstaja $j \in \mathbb{N}$ tako, da je $X_j \neq Z_j$. Po izreku 4.6 sledi, da inverzno zaporedje $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nima krepke $\mathcal{S}$-razširitvene lastnosti glede na (Z_n, D_n). □

Opomba 4.9. *Dokazali smo, da posplošeno inverzno zaporedje* $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *nepraznih kompaktnih metričnih prostorov* (X_n, d_n) *in navzgor polzveznih večličnih funkcij* f_n*, katerih graf ima lastnost* $\mathcal{S}$*, nima krepke* $\mathcal{S}$*-razširitvene lastnosti. V nadaljevanju je naš cilj pokazati, da pa ima šibko* $\mathcal{S}$*-razširitveno lastnost.*
Predpostavimo, da imamo dano naslednje:

1. *zaporedje nepraznih kompaktnih metričnih prostorov* (X_n, d_n)*,*
2. *posplošeno inverzno zaporedje* $\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$*, kjer je za vsako naravno število* n *množica* Y_n *neprazna zaprta podmnožica množice* X_n *in* $g_n : (Y_{n+1}, d_{n+1}|_{Y_{n+1}}) \multimap (Y_n, d_n|_{Y_n})$ *navzgor polzvezna večlična funkcija.*

Skonstruirali bomo posplošeno inverzno zaporedje $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *nepraznih kompaktnih metričnih prostorov* (X_n, d_n) *in večličnih funkcij* $f_n : (X_{n+1}, d_{n+1}) \multimap (X_n, d_n)$*, kjer je graf* $\Gamma(f_n)$ *surjektiven za neskončno mnogo naravnih števil* n *in velja, da je* $\varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty} = \varprojlim\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Pri tem bomo upoštevali naslednje tri možne primere:

1. *Obstaja strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil* (k_n) *tako, da je* $Y_{k_n} \neq X_{k_n}$ *za vsako naravno število* n*.*
2. *Obstaja tako naravno število* n_0*, da sta za vsako naravno število* n*, kjer je* $n \geq n_0$*, prostora* Y_n *in* X_n *enaka. Tukaj bomo ločili naslednja podprimera:*
   (a) *Obstaja tako naravno število* n_1*,* $n_1 \geq n_0$*, da je za vsako naravno število* $n \geq n_1$ *graf* $\Gamma(g_n)$ *surjektiven.*
   (b) *Obstaja strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil* (j_n) *tako, da graf* $\Gamma(g_{j_n})$ *ni surjektiven za nobeno naravno število* n*.*

Dokažimo nekaj trditev v povezavi z zgoraj navedenimi primeri. Naslednja trditev obravnava situacijo 1.

Trditev 4.10. *Naj bo za vsako naravno število n prostor* (X_n, d_n) *neprazen kompakten metrični prostor,* Y_n *neprazna zaprta podmnožica množice* X_n *in* $g_n : (Y_{n+1}, d_{n+1}|_{Y_{n+1}}) \multimap (Y_n, d_n|_{Y_n})$ *navzgor polzvezna večlična funkcija. Naj bo* (k_n) *strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil tako, da je* $X_{k_n} \neq Y_{k_n}$ *za vsako naravno število n. Potem za poljubno posplošeno inverzno zaporedje* $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *nepraznih kompaktnih metričnih prostorov* (X_n, d_n) *in navzgor polzveznih večličnih funkcij* $f_n : (X_{n+1}, d_{n+1}) \multimap (X_n, d_n)$*, za katero velja, da je* $\varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty} = \varprojlim\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$*, obstaja strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil* (i_n) *tako, da graf funkcije* f_{i_n} *ni surjektiven za nobeno naravno število n.*

Dokaz. Recimo, da obstaja tako naravno število n_0, da je za vsako naravno število n, kjer je $n \geq n_0$, graf funkcije f_n surjektiven. Potem obstaja $z_0 \in X_{k_n} \backslash Y_{k_n}$, kjer je $n \geq n_0$, in točka $x \in \varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kjer je $x_n = z_0$ in $x \notin \varprojlim\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$. Prišli smo do protislovja, saj smo predpostavili, da sta inverzni limiti enaki. □

Naslednja trditev se nanaša na situacijo 2(a) iz opombe 4.9.

Trditev 4.11. *Naj bo za vsako naravno število n prostor* (X_n, d_n) *neprazen kompakten metrični prostor,* Y_n *neprazna zaprta podmnožica množice* X_n *in* $g_n : (Y_{n+1}, d_{n+1}|_{Y_{n+1}}) \multimap (Y_n, d_n|_{Y_n})$ *navzgor polzvezna večlična funkcija. Naj bo* n_0 *tako naravno število, da je* $X_n = Y_n$ *za vsako naravno število* $n \geq n_0$*. Naj bo* n_1, $n_1 \geq n_0$*, tako naravno število, da je graf funkcije* g_n *surjektiven za vsako naravno število* $n \geq n_1$*. Potem obstaja posplošeno inverzno zaporedje* $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *nepraznih kompaktnih metričnih prostorov* (X_n, d_n) *in navzgor polzveznih večličnih funkcij* $f_n : (X_{n+1}, d_{n+1}) \multimap (X_n, d_n)$*, za katero velja, da je* $\varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty} = \varprojlim\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$*, in za končno mnogo naravnih števil n graf funkcije* f_n *ni surjektiven.*

Dokaz. Naj bo za vsako naravno število $n > n_1$ funkcija $f_n = g_n$ in za vsak $n \leq n_1$ naj bo funkcija $f_n = \delta_{(X_{n+1}, X_n)}(g_n)$. Potem je očitno graf funkcije f_n surjektiven za vsako naravno število $n > n_1$ in inverzni limiti sta enaki. □

Naslednja trditev se nanaša na situacijo 2(b) iz opombe 4.9.

Trditev 4.12. *Naj bo za vsako naravno število n prostor* (X_n, d_n) *neprazen kompakten metrični prostor,* Y_n *neprazna zaprta podmnožica množice* X_n *in* $g_n : (Y_{n+1}, d_{n+1}|_{Y_{n+1}}) \multimap (Y_n, d_n|_{Y_n})$ *navzgor polzvezna večlična funkcija. Naj bo* n_0 *tako naravno število, da je* $X_n = Y_n$ *za vsako naravno število* $n \geq n_0$*. Naj bo* (j_n) *tako strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil, da graf funkcije* g_{j_n} *ni surjektiven za nobeno naravno število n. Potem za poljubno posplošeno inverzno zaporedje* $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *nepraznih kompaktnih metričnih prostorov* (X_n, d_n) *in navzgor polzveznih večličnih funkcij* $f_n : (X_{n+1}, d_{n+1}) \multimap (X_n, d_n)$*, za katero velja, da je* $\varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty} = \varprojlim\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$*, obstaja strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil* (i_n) *tako, da graf funkcije* f_{i_n} *ni surjektiven za nobeno naravno število n.*

Dokaz. Recimo, da obstaja $n_1 \in \mathbb{N}$ tako, da je graf $\Gamma(f_n)$ surjektiven za vsako naravno število $n \geq n_1$. Naj bo m tako naravno število, da je $j_m > n_1$. Ker graf funkcije g_{j_m} ni surjektiven, obstaja $y_0 \in Y_{j_m}$ tako, da $y_0 \notin g_{j_m}(y)$ za poljuben $y \in Y_{j_{m+1}}$. Ker je $j_m > n_1$, potem je graf $\Gamma(f_n)$ surjektiven za vsak $n > j_m$. Sledi, da obstaja $x \in \varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kjer je $x_{j_m} = y_0$, vendar $x \notin \varprojlim\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$, kar je v protislovju z dejstvom, da sta inverzni limiti enaki. □

Lema 4.13. *Naj bo (X_n, d_n) neprazen kompakten metrični prostor, Y_n neprazna zaprta podmnožica množice X_n in $g_n : (Y_{n+1}, d_{n+1}|_{Y_{n+1}}) \multimap (Y_n, d_n|_{Y_n})$ navzgor polzvezna večlična funkcija za vsako naravno število n. Potem je za vsako naravno število k presek $\Gamma(\delta_{(X_{k+1},X_k)}(g_k)) \cap (X_{k+1} \times (X_k \backslash Y_k))$ prazen.*

Dokaz. Očitno, saj je $\Gamma(\delta_{(X_{k+1},X_k)}(g_k)) \subseteq X_{k+1} \times Y_k$ za vsako naravno število k. □

Definicija 4.14. *Naj bosta (X_1, d_1) in (X_2, d_2) neprazna kompaktna metrična prostora, $Y_1 \subseteq X_1$ in $Y_2 \subseteq X_2$ neprazni zaprti podmnožici prostorov X_1 in X_2. Za poljuben $a \in X_1$ in za poljubno navzgor polzvezno večlično funkcijo $g : (Y_1, d_1|_{Y_1}) \multimap (Y_2, d_2|_{Y_2})$ definiramo funkcijo $\delta^a_{(X_1,X_2)}(g) : (X_1, d_1) \multimap (X_2, d_2)$ s predpisom*

$$\Gamma(\delta^a_{(X_1,X_2)}(g)) = \Gamma(\delta_{(X_1,X_2)}(g)) \cup (\{a\} \times X_2).$$

Opomba 4.15. *Graf funkcije $\delta^a_{(X_1,X_2)}(g)$ je zaprt v $X_1 \times X_2$. Z drugimi besedami, funkcija $\delta^a_{(X_1,X_2)}(g)$ je navzgor polzvezna večlična funkcija za poljubna X_1, X_2 kompaktna metrična prostora, za poljubno navzgor polzvezno večlično funkcijo $g : (Y_1, d_1|_{Y_1}) \multimap (Y_2, d_2|_{Y_2})$ in za poljuben $a \in X_1$.*

Izrek 4.16. *Naj bo za vsako naravno število n prostor (X_n, d_n) neprazen kompakten metrični prostor, Y_n neprazna zaprta podmnožica množice X_n, $g_n : (Y_{n+1}, d_{n+1}|_{Y_{n+1}}) \multimap (Y_n, d_n|_{Y_n})$ navzgor polzvezna večlična funkcija in (i_n) strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil. Za vsako naravno število k, obstaja navzgor polzvezna večlična funkcija $f_k : (X_{k+1}, d_{k+1}) \multimap (X_k, d_k)$, za katero velja:*

1. *inverzna limita $\varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty} = \varprojlim\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$,*
2. *graf funkcije f_k je surjektiven za vsak $k \in \mathbb{N} \setminus (\{i_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{n \in \mathbb{N} \,|\, Y_{n+1} = X_{n+1}\})$.*

Dokaz. Za vsako naravno število k, za katero velja, da je $X_k \neq Y_k$, označimo z a_k element iz $X_k \backslash Y_k$. Iščemo večlične funkcije f_n. Za vsako naravno število n definirajmo funkcijo $f_n : (X_{n+1}, d_{n+1}) \multimap (X_n, d_n)$ s predpisom:

$$f_n = \begin{cases} \delta_{(X_{n+1},X_n)}(g_n); & \text{če } Y_{n+1} = X_{n+1} \text{ ali } n = i_m \text{ za nek } m \in \mathbb{N}, \\ \delta^{a_{n+1}}_{(X_{n+1},X_n)}(g_n); & \text{v nasprotnem primeru.} \end{cases}$$

Graf $\Gamma(\delta^{a_{n+1}}_{(X_{n+1},X_n)}(g_n))$ je podmnožica $X_{n+1} \times X_n$. Za vsak $y \in X_n$ mora obstajati nek $x \in X_{n+1}$, da je $y \in f_n(x)$. Ker je $\Gamma(\delta^{a_{n+1}}_{(X_{n+1},X_n)}(g_n)) = \Gamma(\delta_{(X_{n+1},X_n)}(g_n)) \cup (\{a_{n+1}\} \times X_n)$, je naš iskan x kar a_{n+1}.

Za situacijo, kadar je $f_n = \delta_{(X_{n+1},X_n)}(g_n)$, nam lema 4.13 pove, da ta funkcija ni surjektivna. Torej funkcija f_n je surjektivna natanko tedaj, ko je $n \in \mathbb{N}\backslash(\{i_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{n \in \mathbb{N} | Y_{n+1} = X_{n+1}\})$.
Dokazati še moramo:

$$\varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty} = \varprojlim\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Ker je $\Gamma(g_n) \subseteq \Gamma(f_n)$ za vsako naravno število n, sledi, da je $\varprojlim\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dokazati moramo le, da je $\varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \varprojlim\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Naj bo $x = (x_1, x_2, ...) \in \varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ poljuben in naj bo $m \in \mathbb{N}$ poljubno naravno število. Pokažimo, da je $(x_{m+1}, x_m) \in \Gamma(g_m)$. Pa recimo, da ni. Sledi, da $(x_{m+1}, x_m) \notin Y_{m+1} \times Y_m$. Ločimo dva primera:

1. $x_m \in X_m\backslash Y_m$. Za vsako naravno število n velja:

   $$\Gamma(f_n) \cap (Y_{n+1} \times (X_n\backslash Y_n)) = \emptyset,$$

   saj

   $$\delta_{(X_{n+1},X_n)}(g_n) \subseteq X_{n+1} \times Y_n$$

   in

   $$\{a_{n+1}\} \times X_n \subseteq (X_{n+1}\backslash Y_{n+1}) \times X_n.$$

   Zato za vsak par $(x, y) \in X_{n+1} \times X_n$ velja,

   $$(x, y) \in \Gamma(f_n) \cap (X_{n+1} \times (X_n\backslash Y_n)) \Leftrightarrow x = a_{n+1}.$$

   Iz tega sledi, da je $x_{m+1} \in X_{m+1}\backslash Y_{m+1}$ in te elemente smo označili z a_{m+1}. Recimo, da je $X_{m+2} = Y_{m+2}$. Potem je $f_{m+1} = g_{m+1}$ in

   $$\Gamma(f_{m+1}) \cap (X_{m+2} \times (X_{m+1}\backslash Y_{m+1})) = \Gamma(g_{m+1}) \cap (X_{m+2} \times (X_{m+1}\backslash Y_{m+1})) = \emptyset.$$

   Sledi, da $x_{m+1} \notin f_{m+1}(x_{m+2})$ za poljuben $x_{m+2} \in X_{m+2}$, kar je protislovje, saj je x_{m+1} koordinata točke iz inverzne limite. Sledi, da je $X_{m+2} \neq Y_{m+2}$ in induktivno sledi, da je $X_{m+k} \neq Y_{m+k}$ in $x_{m+k} = a_{m+k}$ za vsak $k \in \mathbb{N}$. Sedaj naj bo $j \in \mathbb{N}$ tak, da je $i_j > m$. Potem velja, da je $x_{i_j} = a_{i_j} \in X_{i_j}\backslash Y_{i_j}$ in $f_{i_j} = \delta_{(X_{i_j+1},X_{i_j})}(g_{i_j})$. Prišli smo v protislovje, saj je $a_{i_j} \in f_{i_j}(a_{i_j+1}) \subseteq Y_{i_j}$.

2. $x_m \in Y_m$. Sledi, da je $x_{m+1} \in X_{m+1}\backslash Y_{m+1}$. Potem je $x_{m+2} = a_{m+2}$. Podobno kot v primeru 1, pridemo v protislovje.

Sledi, da je $(x_{m+1}, x_m) \in \Gamma(g_m)$ oziroma, da je $x \in \varprojlim\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$. □

Naslednja posledica sledi neposredno iz gornjega izreka.

Posledica 4.17. *Naj bo za vsako naravno število n prostor (X_n, d_n) neprazen kompakten metrični prostor, Y_n prava neprazna zaprta podmnožica množice X_n, $g_n : (Y_{n+1}, d_{n+1}|_{Y_{n+1}}) \multimap (Y_n, d_n|_{Y_n})$ navzgor polzvezna večlična funkcija in (i_n) strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil. Za vsako naravno število k obstaja navzgor polzvezna večlična funkcija $f_k : (X_{k+1}, d_{k+1}) \multimap (X_k, d_k)$, za katere velja:*

1. *inverzna limita* $\varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty} = \varprojlim\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$,
2. *graf funkcije f_k je surjetiven za vsak $k \in \mathbb{N} \setminus \{i_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.*

Posledica 4.18. *Naj bo za vsako naravno število n prostor (X_n, d_n) neprazen kompakten metrični prostor, Y_n neprazna zaprta podmnožica množice X_n in $g_n : (Y_{n+1}, d_{n+1}|_{Y_{n+1}}) \multimap (Y_n, d_n|_{Y_n})$ navzgor polzvezna večlična funkcija. Potem obstaja posplošeno inverzno zaporedje $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ prostorov (X_n, d_n) in navzgor polzveznih večličnih funkcij $f_n : (X_{n+1}, d_{n+1}) \multimap (X_n, d_n)$, za katero velja:*

1. *inverzna limita* $\varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty} = \varprojlim\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$,
2. *graf funkcije f_n je surjetiven za neskončno mnogo naravnih števil n.*

Dokaz. Ločimo naslednje primere:

1. Obstaja strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil (k_n) tako, da je $Y_{k_n} \neq X_{k_n}$ za vsako naravno število n. Naj bo (i_n) strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil, definirano z $i_n = k_{4n}$ za vsako naravno število n. Za vsako naravno število n tako, da je $X_n \neq Y_n$, naj bo $a_n \in X_n \backslash Y_n$. Naj bo $f_n : (X_{n+1}, d_{n+1}) \multimap (X_n, d_n)$ definirana s predpisom:

   $$f_n = \begin{cases} \delta_{(X_{n+1}, X_n)}(g_n); & \text{če je } Y_{n+1} = X_{n+1} \text{ ali } n = i_m \text{ za nek } m \in \mathbb{N}, \\ \delta^{a_{n+1}}_{(X_{n+1}, X_n)}(g_n); & \text{v nasprotnem primeru.} \end{cases}$$

   Trdimo, da je zaporedje funkcij $(f_{(k_{4n+2})-1})$ zaporedje surjektivnih funkcij.

   $$\cdots\ X_{(k_{4n+2})-1} \overset{f_{(k_{4n+2})-1}}{\multimapinv} X_{k_{4n+2}}\ \cdots$$

   Prostor $X_{k_{4n+2}} \neq Y_{k_{4n+2}}$, zato je $f_{(k_{4n+2})-1} = \delta^{a_{k_{4n+2}}}_{(X_{k_{4n+2}}, X_{(k_{4n+2})-1})}(g_{(k_{4n+2})-1})$, kar je po izreku 4.16 surjektivna funkcija.

2. Obstaja naravno število n_0 tako, da je $X_n = Y_n$ za vsak $n \geq n_0$. Poglejmo naslednja podprimera.

   (a) Obstaja naravno število $n_1 \geq n_0$ tako, da je graf g_n surjektiven za vsako naravno število $n \geq n_1$. Po trditvi 4.11 obstaja posplošeno inverzno zaporedje $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ prostorov (X_n, d_n) in navzgor polzveznih večličnih funkcij $f_n : (X_{n+1}, d_{n+1}) \multimap (X_n, d_n)$, katerega grafi funkcij f_n so surjektivni za neskončno mnogo naravnih števil n.

(b) Obstaja strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil (j_k) tako, da graf funkcije g_{j_k} ni surjektiven za nobeno naravno število k. Naj bo za poljuben $n \in \mathbb{N}$

$$Z_n = g_n(Y_{n+1}) = \bigcup_{y \in Y_{n+1}} g_n(y) \subseteq Y_n.$$

Potem je $Z_{j_k} \neq Y_{j_k}$ in $Z_{j_k} \neq X_{j_k}$ za vsako naravno število k. Za poljubno naravno število n tako, da $Z_n \neq X_n$, naj bo $a_n \in X_n \backslash Z_n$. Naj bo (i_n) strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil, definirano z $i_n = j_{4n}$, $n \in \mathbb{N}$. Potem za vsako $n \in \mathbb{N}$ definiramo $f_n : (X_{n+1}, d_{n+1}) \multimap (X_n, d_n)$ s predpisom:

$$f_n = \begin{cases} \delta_{(X_{n+1},X_n)}(g_n); & \text{če je } Z_{n+1} = X_{n+1} \text{ ali } n = i_m \text{ za nek } m \in \mathbb{N}, \\ \delta^{a_{n+1}}_{(X_{n+1},X_n)}(g_n); & \text{v nasprotnem primeru.} \end{cases}$$

Trdimo, da je zaporedje funkcij $(f_{(j_{4n+2})-1})$ zaporedje surjektivnih funkcij.

$$\cdots X_{(j_{4n+2})-1} \overset{f_{(j_{4n+2})-1}}{\multimapinv} X_{j_{4n+2}} \cdots$$

Prostor $X_{j_{4n+2}} \neq Z_{j_{4n+2}}$, zato je $f_{(j_{4n+2})-1} = \delta^{a_{j_{4n+2}}}_{(X_{j_{4n+2}}, X_{(j_{4n+2})-1})}(g_{(j_{4n+2})-1})$, kar je po izreku 4.16 surjektivna funkcija.

□

Posledica 4.19. *Za poljubno zaporedje nepraznih kompaktnih metričnih prostorov (X_n, d_n) in za poljubno posplošeno inverzno zaporedje $\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$, kjer je za vsako naravno število n množica Y_n neprazna zaprta podmnožica množice X_n in $g_n : (Y_{n+1}, d_{n+1}|_{Y_{n+1}}) \multimap (Y_n, d_n|_{Y_n})$ navzgor polzvezna večlična funkcija, katere graf je surjektiven, velja, da ima inverzno zaporedje $\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$ šibko $\mathcal{S}$-razširitveno lastnost glede na (X_n, d_n).*

Posledica 4.20. *Za poljubno posplošeno inverzno zaporedje $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nepraznih kompaktnih metričnih prostorov (X_n, d_n) in navzgor polzveznih večličnih funkcij $f_n : (X_{n+1}, d_{n+1}) \multimap (X_n, d_n)$, katerih grafi so surjektivni, velja, da ima šibko $\mathcal{S}$-razširitveno lastnost.*

Literatura

[1] I. Banič, M. Črepnjak, M. Merhar, U. Milutinović, *Inverse limits, inverse limit hulls and crossovers* Topology App. 196(2015) 155-172.

[2] I. Banič, S. Goodwin, M. Lockyer, *Extending bonding functions in generalised inverse sequences*, Topology and its Applications 196 (2019), str. 85–100.

[3] W.T. Ingram, *An Introduction to Inverse Limits with Set-valued Functions*, Springer, New York, 2012.

[4] W.T. Ingram, W.S. Mahavier, *Inverse limits of upper semi-continuous set valued functions*, Houston J. Math. 32 (2006), 119-130.

[5] J.R. Munkers, *Topology, Second Edition*, Upper Saddle River : Prentice Hall, New Jersey, 2000.

[6] S.B. Nadler, Jr., *Continuum Theory, An Introduction*, Marcel Dekker, New York, cop. 1992.

[7] V. Nall, *Inverse limits with set valued functions*, Houst. J. Math. 37 (2011) 1323-1332.