



Univerza v Mariboru

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

DOKTORSKA DISERTACIJA

NEKATERE S PAKIRANJI
POVEZANE LASTNOSTI GRAFOV

Oktober, 2020

Dragana Božović

Mentor: izr. prof. dr. Iztok Peterin

UDK: 519.17(043.3)

KAZALO

Povzetek	v
Abstract	vii
Zahvala	ix
1 Uvod	1
2 Osnovni pojmi teorije grafov	5
3 Enolično največje pakiranje grafa	11
3.1 Splošne lastnosti grafov z enoličnim največjim pakiranjem	12
3.2 Drevesa z enoličnim največjim pakiranjem	17
4 Dimenzija incidenčnosti	31
4.1 Generator incidenčnosti	31
4.2 Zahtevnost problema dimenzije incidenčnosti	41
5 Pakirno kromatično število leksikografskega produkta	47
5.1 Meji pakirnega kromatičnega števila leksikografskega produkta . . .	47
5.2 Izboljšava zgornje meje za $G \cong P_n$	50

6	Učinkovita odprta dominacija v produktih digrafov	53
6.1	Kartezični produkt	53
6.2	Krepki produkt	62
6.3	Direktni in leksikografski produkt	68
7	Zaključne misli	73
	Literatura	75
	Kazalo slik	81
	Delovni življenjepis	83

POVZETEK

V disertaciji se ukvarjamo z različnimi problemi, povezanimi s pakiranjem. Disertacija je sestavljena iz štirih delov.

Prvi del je namenjen grafom, ki imajo enolično pakirno množico največje moči. Najprej predstavimo nekatere lastnosti teh grafov. Nato podamo še dve karakterizaciji dreves z enolično pakirno množico.

V drugem delu vpeljemo pojem dimenzije incidenčnosti, ki je neposredno povezana z 2-pakirnim številom grafa, in določimo formulo za njen izračun. Dokažemo, da je problem iskanja incidenčne dimenzije grafa v splošnem NP-poln.

Tretji del namenimo pakirnemu kromatičnemu številu leksikografskega produkta grafov. Določimo njegovo spodnjo in zgornjo mejo ter izboljšano zgornjo mejo za primer, ko je prvi faktor v produktu izomorfen poti.

V zadnjem delu se posvetimo učinkoviti odprti dominaciji produktov digrafov. Okarakteriziramo učinkovito odprto dominirane direktne in leksikografske produkte digrafov. Pri kartezičnem produktu okarakteriziramo tiste, kjer je prvi faktor usmerjena pot, usmerjen cikel ali zvezda z enim izvorom. Predstavimo tudi karakterizacijo učinkovito odprto dominiranega krepkega produkta, katerega temeljni graf obeh faktorjev je monocikličen graf.

Math. Subj. Class. (2010): 05C69, 05C12, 05C05, 05C15, 05C20, 05C76.

KLJUČNE BESEDE: pakirna množica, enolično največje pakiranje, dimenzija incidenčnosti, generator incidenčnosti, pakirno kromatično število, leksikografski pro-

dukt grafov, učinkovita odprta dominacija, usmerjeni grafi, produkti usmerjenih grafov.

ABSTRACT

SOME GRAPH PROPERTIES RELATED TO PACKINGS

In this dissertation, different problems related to packings are presented. The dissertation consists of four parts.

In the first part, we focus on graphs with the unique packing of maximum cardinality. We first present several general properties for such graphs. Later two characterizations of trees with the unique maximum packing are presented.

The second part introduces the concept of incidence dimension, which is directly related to the packing of a graph. We determine the formula for its calculation and prove that the problem of finding the incidence dimension of a graph is NP-complete in the general case.

The third part is devoted to the packing chromatic number of the lexicographic product of graphs. Its lower and upper bounds are determined. The improved upper bound for the case where the first factor in the product is isomorphic to a path on n vertices is also presented.

The last section deals with the efficient open domination of digraph products. We characterize the efficient open domination direct and lexicographic products of digraphs. Among Cartesian products, those whose first factor is a directed path, a directed cycle, or a single-source star are characterized. Characterization of the efficient open domination strong product digraphs for which the underlying graph of both factors is unicyclic is also presented.

Math. Subj. Class. (2010): 05C69, 05C12, 05C05, 05C15, 05C20, 05C76.

KEYWORDS: packing set, unique maximum packing, incidence dimension, incidence generator, packing chromatic number, lexicographic product of graphs, efficient open domination, digraphs, products of digraphs.

ZAHVALA

*Those who have the ability to be grateful are the ones who
have the ability to achieve greatness. (Steve Maraboli)*

*Posebna zahvala gre mentorju, izr. prof. dr. Iztoku
Peterinu, za predano znanje, nasvete in usmerjanje pri
nastajanju doktorske disertacije ter za vso pomoč in
prijaznost.*

*Hvala očetu in bratu za brezpogojno spodbudo in
razumevanje. Hvala pokojni mami, ki je verjela, da mi bo
nekoč uspelo. Hvala najbližjim prijateljem za vso podporo.
Hvala vsem, ker ste verjeli vame.*

1

UVOD

Tema doktorske disertacije sodi na področje teorije grafov. Disertacija temelji na štirih člankih [5, 7, 8, 6] in je tako sestavljena iz štirih delov. Vse obravnavane teme so povezane s pakiranjem v grafih.

Pakiranje (ali pakirna množica) grafa G je podmnožica P vozlišč grafa G , za katero velja, da imata zaprti okolici poljubnega para različnih vozlišč iz P prazen presek. Pakirno število grafa $\rho(G)$ je moč največjega pakiranja v grafu G . Pakirno število je bilo preučevano kot spodnja meja za dominantno število grafa $\gamma(G)$. Eden od prvih rezultatov tega tipa je rezultat Meira in Moona [43], ki sta pokazala, da za vsako drevo T velja, da je $\rho(T) = \gamma(T)$. V zadnjem desetletju je pakirno število raziskovalcem postajalo vse zanimivejše. Povezavo med pakirnim številom in spodnje pakirnim številom, ki je definirano kot moč najmanjšega maksimalnega pakiranja, so preučevali v [47]. V [44] je bila v obliki zgornje meje predstavljena povezava med pakirnim številom in dvojno dominacijo. Grafi katerih pakirno število sovпада s pakirnim številom njihovega komplementa so bili predstavljeni v [18]. V [31] so avtorji pokazali, da lahko dominantno število grafa navzgor omejimo z zmnožkom pakirnega števila in največje stopnje grafa. Neenakost za pakirno število analogna Vizingovi domnevi je bila dokazana v [36]. Posplošitev pakiranja je bila predstavljena v [20].

V splošnem lahko obstaja več različnih pakirnih množic največje moči. Postavi se vprašanje, kdaj ima graf enolično določeno največjo pakirno množico. V literaturi najdemo več različnih grafovskih invariant, za katere je bilo postavljeno vprašanje o enoličnosti največje oziroma najmanjše množice z določeno lastnostjo. V [32] so

obravnnavali grafe z enolično največjo neodvisno množico, v [28] najdemo grafe z enolično najmanjšo dominantno množico in v [29] drevesa z enolično najmanjšo celotno dominantno množico. Nedavno so v [11] obravnnavali grafe, ki imajo enolično največjo odprto pakirno množico, in tudi okarakterizirali drevesa s to lastnostjo.

S pomočjo pakirnih množic lahko definiramo tudi pakirno barvanje in pakirno kromatično število. Koncept pakirnega kromatičnega števila so leta 2008 vpeljali W. Goddard in ostali v [25] pod imenom oddajno kromatično število, kjer je bila navedena uporaba tega koncepta za dodeljevanje frekvenc postajam nekega omrežja. V danem omrežju se lahko signala dveh postaj, ki uporabljata isto oddajno frekvenco, motita, če postaji nista nameščeni dovolj narazen. Ime pakirno kromatično število so vpeljali v [10].

Iskanje največje pakirne množice in pakirnega kromatičnega števila grafa uvrščamo med težke probleme. Določitev pakirnega kromatičnega števila grafa je NP-poln problem že za zelo enostavne grafe, kot so drevesa [19]. Po drugi strani so Argiroffo in ostali v [2] ugotovili, da je problem pakirnega barvanja rešljiv v polinomskem času za nekatere netrivialne razrede grafov. Pakirno kromatično število je bilo preučevano na hiperkockah [25, 53], kartezičnih produktih [34, 10], kubičnih in subkubičnih grafih [3, 23] in še nekaterih družinah grafov. Pregled dosedanjih rezultatov povezanih s pakirnimi barvanji najdemo v [9].

Parametri povezani z razdaljami dandanes pritegujejo pozornost vedno več raziskovalcev. Eden od teh parametrov je tudi metrična dimenzija. Ta koncept je predstavil Slater v [50] v povezavi z nekaterimi lokalnimi problemi na grafih. Neodvisno pa sta ta koncept vpeljala tudi Harary in Melter v [30]. S tem parametrom so se ukvarjali v veliko različnih člankih, na primer v [12, 13, 14, 41]. Dokaz, da je izračun metrične dimenzije grafa NP-poln problem, je bil predstavljen v [39]. Konec 20. stoletja so različni avtorji vpeljali nove metrične dimenzije z dodatnimi lastnostmi, nedavno pa sta bili vpeljeni tudi povezavna [38] in mešana metrična dimenzija [37].

Grafovski invarianta, ki je tesno povezana s pakirno množico, je tudi dominantno število grafa. Podobno je odprto pakiranje tesno povezano s celotnim dominantnim številom grafa. Postavi se vprašanje, ali lahko najdemo takšno celotno domi-

nantno množico, ki je hkrati tudi odprto pakiranje. To pomeni, da obstaja takšna dominantna množica S , da odprte okolice vozlišč iz S tvorijo razbitje množice vozlišč grafa G . Ta problem je bil predstavljen z uporabo različnih imen, med drugim tudi z imeni celotne perfektne kode [15] in učinkovita odprta dominacija [22]. V [52] so preučevali učinkovito odprto dominacijo Cayleyjevih grafov. O učinkovito odprto dominiranih kartezičnih produktih dveh poljubnih poti lahko preberemo v [16, 17, 27], učinkovito odprto dominirani direktni produkti pa so bili karakterizirani v [1]. Karakterizacije za leksikografske, krepke in disjunktne produkte dveh grafov lahko najdemo v [40]. V istem članku [40] so obravnavali tudi učinkovito odprto dominirane kartezične produkte nekaterih znanih družin grafov.

Učinkovito zaprto dominirani digrafi so bili predstavljeni v [4] (po navedbah v [49]), preučevani pa so bili tudi v [33, 42, 45]. Učinkovito zaprto dominirani produkti digrafov so bili nedavno preučevani v [46]. Po drugi strani so z učinkovito odprto dominacijo začeli v [48], kjer se je pojavila pod imenom učinkovita celotna dominacija digrafa. Nekatero druge rezultate povezane z učinkovito odprto dominacijo digrafov lahko najdemo v [51].

V naslednjem poglavju disertacije bomo predstavili nekatere osnovne pojme iz teorije grafov. Zapisali bomo definicije, ki jih bomo uporabljali skozi celotno disertacijo.

Tretje poglavje bomo namenili enoličnemu največjemu pakiranju grafov. Predstavili bomo nekatere lastnosti, ki jih imajo grafi z enolično največjo pakirno množico. Nato se bomo osredotočili na razred dreves in podali dve različni karakterizaciji dreves z enolično največjo pakirno množico.

V četrtem poglavju uvedemo pojem dimenzije incidenčnosti, ki je tesno povezan s pakiranjem v grafih. Najprej bomo podali točne vrednosti za nekatere družine grafov, nato pa še vrednost dimenzije incidenčnosti v splošnem primeru. Pokazali bomo, da je problem iskanja incidenčne dimenzije grafa NP-poln.

V petem poglavju bomo navedli meje za pakirno kromatično število leksikografskega produkta. Za primere, ko je prvi faktor produkta izomorfen poti, bomo zgornjo mejo tudi izboljšali.

Zadnje poglavje bo vsebovalo rezultate o učinkoviti odprti dominaciji v produktih digrafov. Obravnavali bomo štiri standardne produkte. Okarakterizirali bomo

učinkovito odprto dominirane direktne in leksikografske produkte. Pri kartezičnem produktu bomo najprej definirali nekatere pojme, s pomočjo katerih bomo nato okarakterizirali učinkovito odprto dominiran kartezični produkt za primere, ko je prvi faktor usmerjena pot, usmerjen cikel ali zvezda z enim izvorom. Pri učinkovito odprto dominiranih krepkih produktih bomo okarakterizirali vse tiste, katerih temeljni graf je monociklični graf.

2

OSNOVNI POJMI TEORIJE GRAFOV

V tem poglavju bomo predstavili osnovne pojme in definicije s področja teorije grafov, ki jih bomo uporabljali v disertaciji. Večina definicij je povzetih po viru [54].

Graf $G = (V(G), E(G))$ je sestavljen iz neprazne množice elementov $V(G)$ in množice $E(G)$, ki vsebuje neurejene pare elementov iz $V(G)$. Elemente množice $V(G)$ imenujemo *vozlišča*, elemente množice $E(G)$ pa *povezave*. Z $|G|$ bomo označili število vozlišč v grafu G . Povezave običajno označujemo z $e = uv$, kjer sta u in v vozlišči grafa. Vozlišči u in v sta *krajišči* povezave e (sta *incidenčni* z e). Ker sta povezani s povezavo, jima rečemo tudi *sosejni*. *Stopnja* vozlišča v v grafu je število povezav, katerih krajišče je v . Označimo jo z $\deg(v)$. Za $v \in V(G)$ je množica $N_G(v) = \{u \in V(G); vu \in E(G)\}$ *odprta okolica* vozlišča v , množica $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ pa *zaprta okolica* vozlišča v . *Izolirano vozlišče* je vozlišče stopnje nič. Vozlišče stopnje ena imenujemo *list*, vozlišče, ki je sosednje listu, pa *podporno vozlišče*.

Graf $G' = (V(G'), E(G'))$ je *podgraf* grafa $G = (V(G), E(G))$, če velja $V(G') \subseteq V(G)$ in $E(G') \subseteq E(G)$. Če ima podgraf G' na svojih vozliščih natanko iste povezave kot graf G , potem je G' *induciran podgraf* grafa G . Označimo ga z $G[V(G')]$. Grafa G in H sta *izomorfna*, če obstaja takšna bijektivna preslikava $h : V(G) \rightarrow V(H)$, da je $uv \in E(G)$ natanko tedaj, ko je $h(u)h(v) \in E(H)$. Izomorfnost grafov G in H označimo z $G \cong H$. V nadaljevanju bomo za množico $\{1, 2, \dots, k\}$, kjer je k pozitivno število, uporabljali oznako $[k]$, za množico $\{2, \dots, k\}$ pa oznako $[k]_2$.

Sprehod dolžine $k - 1$ med vozliščema u in v v grafu G je zaporedje vozlišč grafa G oblike $z_1 z_2 \dots z_k$, kjer je $u = z_1$, $v = z_k$ in $z_i z_{i+1} \in E(G)$, za vsak $i \in [k - 1]$. Enostaven sprehod je sprehod, na katerem so vse povezave različne. Če so pa v enostavnem sprehodu različna tudi vsa vozlišča, ga poimenujemo *pot*. Graf je *povezan*, če med poljubnima vozliščema grafa obstaja vsaj ena pot. V nasprotnem primeru je *nepovezan*. *Komponenta* je povezan podgraf grafa G , ki ni vsebovan v nobenem večjem povezanem podgrafu grafa G . Najmanjše število povezav na poti med u in v v grafu G imenujemo *razdalja* med u in v ter jo označimo z $d_G(u, v)$. Če je graf možno razbrati iz konteksta, oznako G izpustimo. Razdalja med vozliščema je ∞ , če vozlišči nista v isti komponenti. *Diameter* je največja razdalja med vozliščema v grafu G . Označimo ga z $\text{diam}(G)$. Če sprehodu $z_1 z_2 \dots z_k$ dodamo še povezavo $z_1 z_k$, kjer je $z_1 \neq z_k$, to imenujemo *obhod* ali *sklenjeni sprehod*. *Enostaven obhod* je obhod, ki ima vse povezave različne. Če so različna tudi vsa vozlišča, potem ga poimenujemo *cikel*.

Graf, ki predstavlja le pot na n vozliščih označimo s P_n . Cikel na n vozliščih označimo s C_n . Povezan graf brez ciklov imenujemo *drevo*. Graf, ki ima za podgraf natanko en cikel, imenujemo *monociklični graf*. Če je v grafu vsak par vozlišč povezan s povezavo, mu rečemo *poln graf*. Poln graf na n vozliščih označimo s K_n . Graf brez povezav je *prazen graf*. Označimo ga s \bar{K}_n .

Digraf ali *usmerjen graf* $D = (V(D), A(D))$ je sestavljen iz množice vozlišč $V(D)$ in množice urejenih parov vozlišč $A(D)$, ki jih imenujemo *usmerjene povezave*. Za povezavo $e = uv \in A(D)$ pravimo, da je usmerjena od u k v . Vozlišče u imenujemo *vhodni sosed* od v , v pa je *izhodni sosed* od u . Za $v \in V(D)$ je množica $N_D^+(v) = \{u \in V(D); vu \in A(D)\}$ *odprta izhodna okolica* za v , množica $N_D^-(v) = \{u \in V(D); uv \in A(D)\}$ pa *odprta vhodna okolica* za v . *Vhodna stopnja* za v je $\delta_D^-(v) = |N_D^-(v)|$, *izhodna stopnja* pa $\delta_D^+(v) = |N_D^+(v)|$. *Stopnja vozlišča* v je $\delta_D(v) = \delta_D^-(v) + \delta_D^+(v)$. Če je digraf možno razbrati iz konteksta, oznako D izpustimo. Povezava, ki je usmerjena od u do u , se imenuje *zanka*. Vozlišče $v \in V(D)$ imenujemo *ponor*, če $\delta^+(v) = 0$. *Izvor* je vozlišče $v \in V(D)$, za katerega velja $\delta^-(v) = 0$. Graf, ki ga dobimo iz D tako, da vse usmerjene povezave zamenjamo z neusmerjenimi, pri čemer zanemarimo večkratne povezave, imenujemo *temeljni graf* digrafa D . *Usmerjena pot* je digraf z enim izvorom in enim ponorom, katerega temeljni graf je izomorfen P_n . Podobno je *usmerjeni cikel* digraf v katerem ima vsako vozlišče vhodno in izhodno stopnjo

enako 1, njegov temeljni graf pa je izomorfen C_n . Za $A \subseteq V(D)$ označimo z $D - A$ digraf, ki ga dobimo iz D tako, da odstranimo vsa vozlišča iz A .

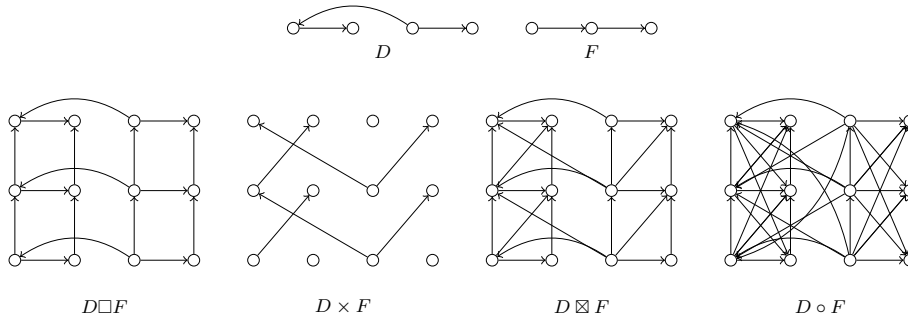
Če vzamemo dva (neusmerjena ali usmerjena) grafa G in H , lahko iz njiju tvorimo produkt grafov. Poznamo več različnih produktov grafov, štirje standardni pa so kartezični produkt $G \square H$, direktni produkt $G \times H$, krepki produkt $G \boxtimes H$ in leksikografski produkt $G \circ H$. Pri vseh velja, da je množica vozlišč produkta enaka kartezičnemu produktu množic $V(G)$ in $V(H)$. Sosednost je pri neusmerjenih grafih definirana na naslednji način.

- $((g, h), (g', h')) \in E(G \square H) \Leftrightarrow (g = g' \wedge hh' \in E(H)) \vee (gg' \in E(G) \wedge h = h')$
- $((g, h), (g', h')) \in E(G \times H) \Leftrightarrow gg' \in E(G) \wedge hh' \in E(H)$
- $((g, h), (g', h')) \in E(G \boxtimes H) \Leftrightarrow (g = g' \wedge hh' \in E(H)) \vee (gg' \in E(G) \wedge h = h') \vee (gg' \in E(G) \wedge hh' \in E(H))$
- $((g, h), (g', h')) \in E(G \circ H) \Leftrightarrow gg' \in E(G) \vee (g = g' \wedge hh' \in E(H))$

Pri digrafih pa je množica usmerjenih povezav produkta definirana na naslednji način.

- V kartezičnem produktu $G \square H$ obstaja usmerjena povezava od (g, h) do (g', h') , če obstaja usmerjena povezava od g do g' v G in je $h = h'$ ali pa je $g = g'$ in obstaja usmerjena povezava od h do h' v H .
- Če obstaja usmerjena povezava od g do g' v G in usmerjena povezava od h do h' v H , potem v direktnem produktu $G \times H$ obstaja usmerjena povezava od (g, h) do (g', h') .
- V krepkem produktu velja $((g, h), (g', h')) \in A(G \boxtimes H)$, če $((g, g') \in A(G)$ in $h = h')$ ali $(g = g'$ in $(h, h') \in A(H))$ ali $((g, g') \in A(G)$ ali $(h, h') \in A(H))$.
- V leksikografskem produktu $G \circ H$ obstaja usmerjena povezava od (g, h) do (g', h') , če $(g, g') \in A(G)$ ali $(g = g'$ in $(h, h') \in A(H))$.

Na sliki 2.1 so prikazani primeri standardnih produktov podanih digrafov D in F .



Slika 2.1: Digrafa D in F in njun kartezični, direktni, krepki in leksikografski produkt.

Naj bo $*$ $\in \{\square, \times, \boxtimes, \circ\}$. Za fiksno vozlišče $h \in V(H)$ pravimo, da je množica $G^h = \{(g, h) \in V(G * H) : g \in V(G)\}$ G -sloj skozi $h \in V(H)$ v grafu $G * H$. Analogno v grafu $G * H$ definiramo H -sloj H^g skozi $g \in V(G)$. Preslikavo $p_G : V(G * H) \rightarrow V(G)$ s predpisom $p_G((g, h)) = g$ imenujemo *projekcija* na prvi faktor G . Analogno definiramo p_H kot *projekcijo* na drugi faktor H .

V nadaljevanju definiramo še nekatere specifične pojme iz teorije grafov. Imejmo graf $G = (V(G), E(G))$ in množico vozlišč $S \subseteq V(G)$. Množica S se imenuje *neodvisna množica*, če noben par vozlišč iz S ne tvori povezave iz $E(G)$. *Neodvisnostno število*, ki ga označimo z $\alpha(G)$, je moč največje neodvisne množice. Za graf G bomo njegovo neodvisno množico največje moči imenovali $\alpha(G)$ -množica.

Če ima vsaka povezava iz $E(G)$ vsaj eno krajišče v množici S , potem množico S imenujemo *vozliščno pokritje* grafa G .

Če za vsako vozlišče iz $V(G) - S$ velja, da je sosednje z vsaj enim vozliščem iz S , potem množico S imenujemo *dominantna množica*. Pravimo, da vozlišče v dominira $N[v]$, kjer $N[v]$ označuje zaprto okolico vozlišča v . V digrafu $D = (V(D), A(D))$ je množica S *dominantna množica*, če ima vsako vozlišče iz $V(D) - S$ vsaj enega vhodnega sosedu v S . *Dominantno število* grafa, ki ga označimo z $\gamma(G)$, je moč najmanjše dominantne množice. Množica S je *celotno dominantna množica*, če ima vsako vozlišče grafa G vsaj enega sosedu v S . Množica S je celotno dominantna množica za digraf D , če ima vsako vozlišče digrafa D vsaj enega vhodnega sosedu v S . *Celotno dominantno število* $\gamma_t(G)$ je moč najmanjše celotno dominantne množice.

Če so vsa vozlišča v množici S paroma na razdalji večji od k , potem to množico imenujemo *k -pakirna množica* oziroma *k -pakiranje*. Potem je *k -pakirno število* grafa

G , ki ga označimo z $\rho_k(G)$, moč največjega k -pakiranja v grafu G . Za $k = 1$ je to kar neodvisnostno število grafa. Za $k = 2$ bomo uporabljali kar izraz pakiranje (namesto 2-pakiranje) in ga označevali z $\rho(G)$ (namesto z $\rho_2(G)$). Za graf G bomo poljubno njegovo pakiranje največje moči imenovali $\rho(G)$ -množica. Ni težko videti, da so okolice vozlišč pakiranja S paroma disjunktne. To lahko prenesemo na odprte okolice. Množica S je *odprto pakiranje* grafa, če velja, da so vse odprte okolice vozlišč iz S paroma disjunktne v G . Množica S je odprto pakiranje digrafa D , če velja, da so vse odprte vhodne okolice vozlišč iz S paroma disjunktne v D . *Pakirno kromatično število* $\chi_\rho(G)$ grafa G je najmanjše celo število k , za katerega lahko najdemo particijo množice $V(G)$ v podmnožice X_1, \dots, X_k , kjer X_i inducira i -pakiranje za vsak $i \in [k]$.

Celotno dominantno množico grafa (digrafa), ki je hkrati tudi odprto pakiranje, imenujemo *učinkovito odprto dominantna množica* (krajše EOD množica¹). Graf (digraf) imenujemo *učinkovito odprto dominiran* (krajše EOD (di)graf), če v njem obstaja kakšna učinkovito odprto dominantna množica.

Pravimo, da vozlišče v povezanega grafa G *razlikuje* dve vozlišči $u, w \in V(G)$, če $d(u, v) \neq d(w, v)$. Podmnožica vozlišč $S \subseteq V(G)$ je *metrični generator* grafa G , če je vsak par vozlišč grafa G razlikovan z vsaj enim vozliščem iz S . Metrični generator najmanjše moči imenujemo *metrična baza* grafa G in njeno moč *metrična dimenzija* grafa G , ki jo označimo z $\dim(G)$.

Za povezan graf G , vozlišče $v \in V(G)$ in povezavo $e = uw \in E(G)$, je razdalja med vozliščem v in povezavo e definirana kot $d_G(e, v) = \min\{d_G(u, v), d_G(w, v)\}$. Vozlišče $w \in V(G)$ *razlikuje* dve povezavi $e_1, e_2 \in E(G)$, če je $d_G(w, e_1) \neq d_G(w, e_2)$. Množica vozlišč S v povezanem grafu G je *povezavni metrični generator* grafa G , če sta vsaki dve povezavi grafa G razlikovani z nekim vozliščem iz S . Najmanjša moč povezavnega metričnega generatorja grafa G se imenuje *povezavna metrična dimenzija* in jo označimo z $\dim_e(G)$.

Podmnožico vozlišč $S \subseteq V(G)$ imenujemo *sosebnostni generator* grafa G , če za vsaki dve vozlišči $u, w \in V(G) - S$ obstaja vozlišče $v \in S$, da je $|N_G(v) \cap \{u, w\}| = 1$. Sosednosti generator najmanjše moči imenujemo *sosebnostna baza* grafa G in njeno moč *sosebnostna dimenzija* grafa G , ki jo označimo z $\dim_A(G)$.

Če v grafu obstaja natanko ena množica z določenimi lastnostmi, taki množici pra-

¹Ime okrajšave izvira iz angleškega imena efficient open domination.

vimo *enolično določena* množica.

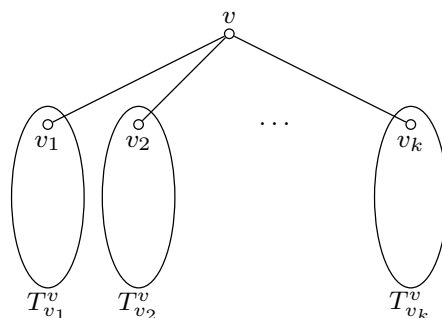
NP je razred problemov, ki jih je z nedeterminističnim Turingovim strojem mogoče rešiti v polinomskem času. Niso pa vsi problemi takšni. Problem je NP-poln, če je pravilnost odgovorov mogoče preveriti z algoritmom, katerega čas izvajanja je polinomski glede na velikost vhodnih podatkov (to pomeni, da je v razredu NP) in noben drug problem v razredu NP ni od njega težji za več kot le za polinomski faktor. Več o NP-polnih problemih (in tudi polinomski prevedljivosti problemov) najdemo v knjigi [26].

3

ENOLIČNO NAJVEČJE PAKIRANJE GRAFA

V tem poglavju bomo navedli nekatere lastnosti grafov, ki imajo enolično $\rho(G)$ -množico. S pomočjo teh lastnosti bomo na dva različna načina karakterizirali drevesa, ki imajo enolično $\rho(G)$ -množico. Vsebina poglavja je povzeta po članku [7].

Imejmo drevo T in naravno število k . Naj bo v poljubno vozlišče drevesa T stopnje k in v_1, \dots, v_k njegovi sosedi. S $T_{v_1}^v, \dots, T_{v_k}^v$ označimo drevesa v $T - v$, kjer je $v_i \in T_{v_i}^v$ za vsak $i \in [k]$, glej sliko 3.1. Koren je posebej določeno vozlišče v drevesu. Naj bosta vozlišči u in v sosednji v T in naj za koren r velja $d(u, r) > d(v, r)$. V tem primeru pravimo, da je vozlišče u spodnji sosed vozlišča v in vozlišče v zgornji sosed vozlišča u . Naj bo z poljubno vozlišče za katerega je $d(z, r) > d(v, r)$. V tem primeru pravimo, da je vozlišče z potomec vozlišča v .



Slika 3.1: Drevesa v $T - v$.

3.1 Splošne lastnosti grafov z enoličnim največjim pakiranjem

Začnemo z nekaj osnovnimi lastnostmi grafov, ki imajo enolično $\rho(G)$ -množico. Te so predstavljene s štirimi lemmami.

Lema 3.1 Če ima graf G enolično $\rho(G)$ -množico P , potem so vsi listi grafa G v množici P .

Dokaz. Naj bo P enolična $\rho(G)$ -množica. Predpostavimo, da obstaja list $\ell \notin P$. Če podporno vozlišče x vozlišča ℓ pripada P , potem je $P' = (P - \{x\}) \cup \{\ell\}$ $\rho(G)$ -množica, ki je različna od P , kar je protislovje s predpostavko. Torej $x \notin P$. Če je y nek sosed vozlišča x , ki je v P , potem je $P'' = (P - \{y\}) \cup \{\ell\}$ $\rho(G)$ -množica, ki je različna od P , kar nas ponovno privede do protislovja s predpostavko. Torej velja $N[x] \cap P = \emptyset$. To pa pomeni, da imamo protislovje s tem, da je množica P največja, saj je $P \cup \{\ell\}$ pakiranje, ki je večje moči kot P . Sledi, da so vsi listi grafa G v množici P . \square

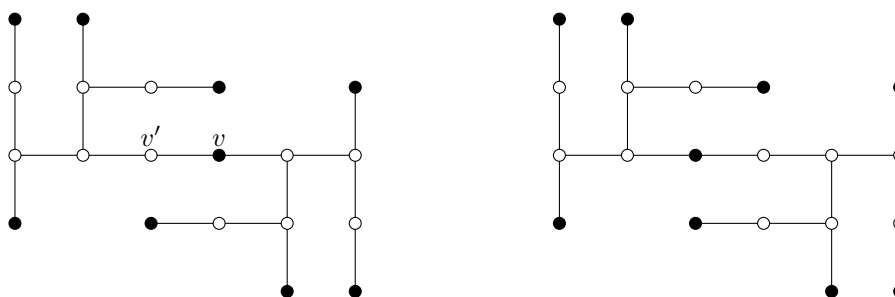
Lema 3.2 Če ima graf G enolično $\rho(G)$ -množico P , potem je vsako podporno vozlišče v G povezano z natanko enim listom.

Dokaz. Predpostavimo, da v G obstaja podporno vozlišče v , ki je povezano z vsaj dvema listoma ℓ_1 in ℓ_2 . Ker po Lemi 3.1 vsi listi grafa G pripadajo množici P , imamo $\ell_1, \ell_2 \in P$, za katera velja $d(\ell_1, \ell_2) = 2$. To je v protislovju z definicijo pakiranja P . \square

Lema 3.3 Naj bo G graf na vsaj dveh vozliščih. Če ima graf G enolično $\rho(G)$ -množico P , potem za vsako vozlišče $v \in P$ in njegovega soseda v' obstaja vozlišče $u \in P$, da velja $d(v, u) = 3$ in je v' na najkrajši poti od v do u .

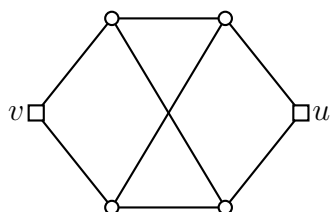
Dokaz. Predpostavimo, da obstaja vozlišče $v \in P$ in njegov sosed v' , da za vsako vozlišče $u \in P - \{v\}$ velja $d(v, u) > 3$ ali $d(v, u) = 3$ in $d(v', u) > 2$. Množica $(P - \{v\}) \cup \{v'\}$ je tudi $\rho(G)$ -množica, kar je protislovje s predpostavko, da ima graf G enolično $\rho(G)$ -množico P . \square

Zgled 3.4 Na levi strani slike 3.2 so s črno barvo označena vozlišča, ki so v $\rho(G)$ -množici P^1 narisane grafa G . Vozlišče v in njegov sosed v' ne izpolnjujeta pogoja iz leme 3.3. Na desni strani slike so s črno barvo označena vozlišča, ki so v $\rho(G)$ -množici $P^2 \neq P^1$ grafa G .



Slika 3.2: Graf G in njegovi $\rho(G)$ -množici.

Zgled 3.5 Slika 3.3 prikazuje, da je lahko v lemi 3.3 več sosedov vozlišča $v \in P$ na najkrajši poti do istega vozlišča $u \in P$, kjer je $d(v, u) = 3$.



Slika 3.3: Na najkrajši poti od v do u sta obe vozlišči, ki sta sosednji vozlišču v .

Lastnost iz zgleda 3.5 se ne more zgoditi v drevesu, saj med poljubnima vozliščema v drevesu obstaja enolična najkrajša pot. Naslednja posledica opisuje takšen primer.

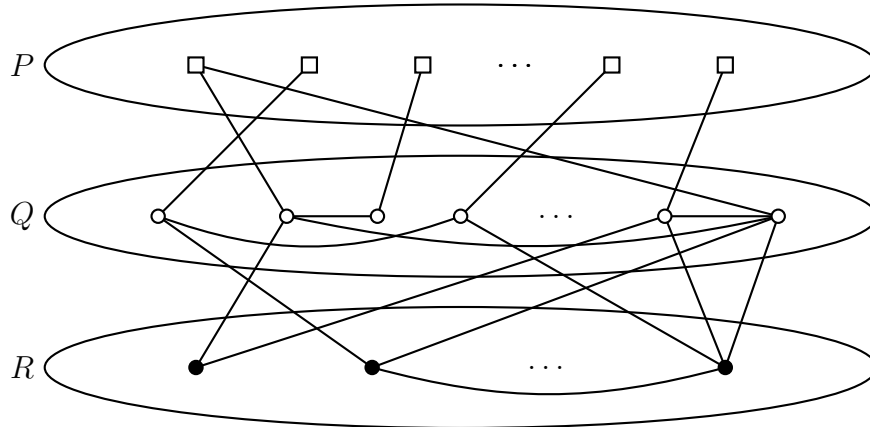
Posledica 3.6 Naj bo T drevo na vsaj dveh vozliščih. Če ima T enolično $\rho(T)$ -množico P , potem za vsako vozlišče $v \in P$ stopnje k in njegove sosedne v_1, \dots, v_k obstajajo različna vozlišča $u_1, \dots, u_k \in P$, da velja $d(v, u_i) = 3$ in $u_i \in V(T_{v_i}^v)$ za vsak $i \in [k]$.

Zgornja posledica zagotavlja, da v drevesu z enolično $\rho(T)$ -množico P , za vsako vozlišče $v \in P$ obstaja vozlišče v P na razdalji 3 od v v smeri vsakega od njegovih sosedov. Ta lastnost je zelo pomembna za prvo karakterizacijo dreves z enolično $\rho(T)$ -množico, glej izrek 3.10.

V nadaljevanju bomo predstavili strukturo grafa G z enolično $\rho(G)$ -množico P (bela kvadratna vozlišča na sliki 3.4). Množico $V(G) - P$ lahko zapišemo kot unijo disjunktne množice Q (bela vozlišča na sliki 3.4) in R (črna vozlišča na sliki 3.4), kjer je Q množica vseh sosedov vozlišč iz P , R pa je $V(G) - (P \cup Q)$. Očitno je lahko množica R prazna, množica Q pa je prazna natanko tedaj, ko je G graf brez povezav. Iz definicije enolične $\rho(T)$ -množice sledijo še naslednje lastnosti:

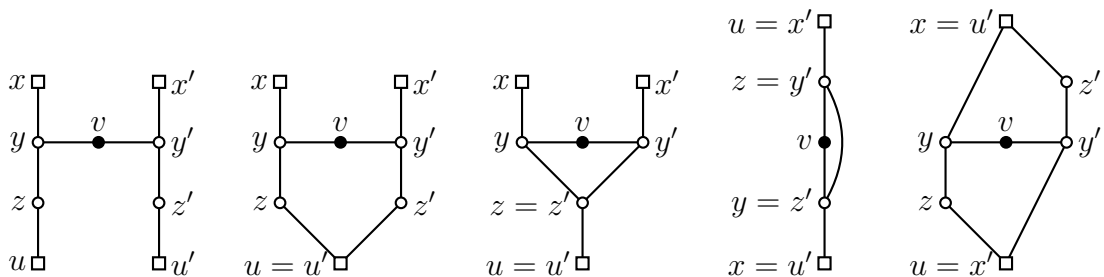
- (1) P je neodvisna množica;
- (2) za vsako neizolirano vozlišče $v \in P$ obstaja vozlišče $u \in P$, da velja $d(v, u) = 3$, razen če je $\deg(v) = 0$ (po lemi 3.3);
- (3) vsako vozlišče iz Q ima natanko enega sosedo v P ;
- (4) za vsako vozlišče $v' \in Q$ obstaja vozlišče $v \in P$, da velja $d(v, v') = 2$ (po lemi 3.3);
- (5) vozlišča iz množice P niso sosednja z vozlišči iz množice R ;
- (6) vsako vozlišče $u \in R$ ima vsaj dva sosedo v množici Q (saj če je w sosed od $v \in P$ in je w edini sosed od $u \in Q$, potem je tudi $(P - \{v\}) \cup \{u\}$ $\rho(T)$ -množica, kar je protislovje);
- (7) graf $G[Q]$ je brez izoliranih vozlišč (to sledi iz leme 3.3).

Nadaljujemo z lemo, ki opisuje, kaj se v grafu z enoličnim največjim pakiranjem dogaja okrog vozlišča iz množice R .



Slika 3.4: Particija množice vozlišč grafa G z enolično $\rho(G)$ -množico P .

Lema 3.7 Naj bo G graf z enolično $\rho(G)$ -množico P . Če G vsebuje vozlišče $v \in R$, potem obstajata takšni poti $xyzu$ in $x'y'z'u'$, da velja $x, x', u, u' \in P$, $y, y', z, z' \in Q$ in $vy, vy' \in E(G)$ (glej sliko 3.5). Še več, velja $x \neq x'$ in $y \neq y'$.

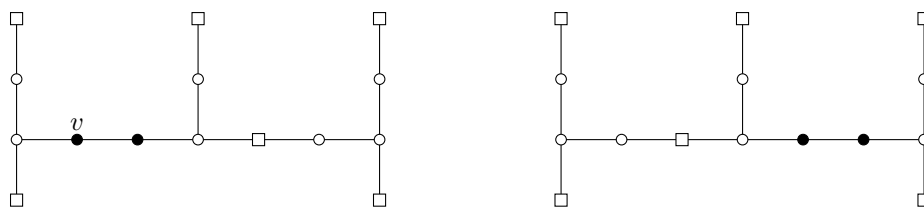


Slika 3.5: Nekateri možni podgrafi grafa, ki vsebuje vozlišče $v \in R$.

Dokaz. Naj bo v vozlišče iz množice R . Po lastnostih (6) in (3) obstaja $x \in P$ na razdalji dve od vozlišča v . Naj bo vozlišče y skupni sosed vozlišč x in v . Lastnost (4) nam pove, da obstaja vozlišče $u \in P$, ki je na razdalji dve od vozlišča y . Naj bo vozlišče z skupni sosed vozlišč u in y . Očitno je vozlišče $z \in Q$ in je tako različno od vozlišča v . Če je x edino vozlišče iz P , ki je na razdalji dve od vozlišča v , potem je tudi množica $(P - \{x\}) \cup \{v\}$ $\rho(G)$ -množica, kar je protislovje s predpostavko o enoličnosti P . Torej obstaja vozlišče $x' \in P, x' \neq x$, da velja $d(v, x') = 2$. Naj bo vozlišče y' skupni sosed vozlišč v in x' . Očitno je vozlišče $y' \in Q$ in $y' \neq y$, sicer bi veljalo $d(x, x') \leq 2$, kar seveda ni možno. Predpostavimo, da ne obstaja vozlišče $u' \in P$, ki je na razdalji dve od vozlišča y' , in ne obstaja vozlišče $z' \in Q$, ki

je skupni sosed vozlišč u' in y' . V tem primeru je $(P - \{x'\}) \cup \{y'\}$ $\rho(G)$ -množica, kar je ponovno protislovje s predpostavko o enoličnosti P . \square

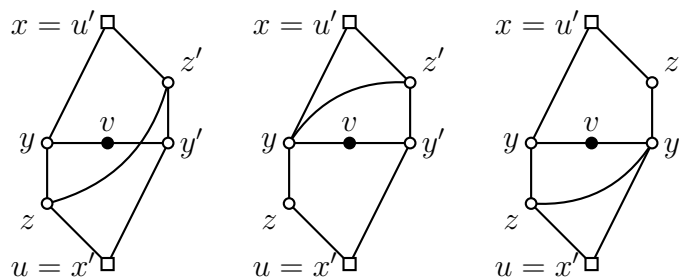
Zgled 3.8 Na levi strani slike 3.6 bela kvadratna vozlišča sestavljajo $\rho(G)$ -množico P^1 narisane grafa H . Vozlišče $v \in R$ ne izpolnjuje pogoja iz leme 3.7. Na desni strani slike bela kvadratna vozlišča sestavljajo $\rho(G)$ -množico $P^2 \neq P^1$ narisane grafa H .



Slika 3.6: Graf H in dve njegovi $\rho(H)$ -množici.

Na sliki 3.5 so prikazane nekatere možnosti za lemo 3.7. To so nekateri grafi, ki so možni podgrafi grafa z enoličnim največjim pakiranjem P . Prvi štirje (z leve proti desni) so sami po sebi grafi z enolično $\rho(G)$ -množico P , zadnji graf pa ni takšen.

Zgled 3.9 Najmanjši primer grafa, ki ima enolično $\rho(G)$ -množico P , in vsebuje za podgraf povsem desni graf s slike 3.5, lahko dobimo tako, da dodamo natanko eno od povezav zz' , yz' ali zy' , glej sliko 3.7.



Slika 3.7: Najmanjši primeri grafov, ki imajo enolično $\rho(G)$ -množico P , in vsebujejo za podgraf povsem desni graf s slike 3.5.

3.2 Drevesa z enoličnim največjim pakiranjem

V tem razdelku se bomo omejili na razred dreves. Predstavili bomo dve karakterizaciji dreves z enolično $\rho(T)$ -množico. Prva opisuje lastnosti enolične $\rho(T)$ -množice. Tukaj uporabimo leme iz prejšnjega razdelka. Natančneje, edina možnost za lemo 3.7 v primeru dreves je povsem levo drevo s slike 3.5.

Spomnimo se, da $\rho(T)$ -množico označimo s P , da množica Q vsebuje vse sosede vozlišč iz množice P , in da je $R = V(T) - (P \cup Q)$.

Izrek 3.10 *Naj bo T drevo in P njegova $\rho(T)$ -množica. Množica P je enolična $\rho(T)$ -množica natanko tedaj, ko P zadošča naslednjim lastnostim.*

- (i) Vsak list drevesa T je v P .
- (ii) Za vsako vozlišče $v \in P$ in za vsak $i \in [\deg(v)]$ obstaja vsaj eno vozlišče iz $P \cap V(T_{v_i}^v)$, ki je na razdalji 3 od v .
- (iii) Za vsako vozlišče $v \in R$ obstajata poti $xyzu$ in $x'y'z'u'$ brez skupnih vozlišč, da velja $x, x', u, u' \in P, y, y', z, z' \in Q$ in $vy, vy' \in E(T)$ (glej povsem levi graf na sliki 3.5).

Dokaz. Če je T drevo z enolično $\rho(T)$ -množico P , potem lastnost (i) sledi iz leme 3.1, lastnost (ii) iz posledice 3.6 in lastnost (iii) iz leme 3.7.

Za dokaz obratne smeri predpostavimo, da (i), (ii) in (iii) veljajo za $\rho(T)$ -množico P . Nadaljujemo z uporabo matematične indukcije po številu vozlišč n drevesa T . Če je $n = 1$, potem $T \cong K_1$, ki je najmanjše drevo z enolično $\rho(T)$ -množico. Podobno velja, če $T \cong P_4$, kjer sta v množici P oba lista. S T' označimo drevo, ki ga dobimo iz T tako, da izbrišemo nekaj vozlišč. S P' označimo njegovo $\rho(T')$ -množico. Na poti k protislovju predpostavimo, da obstaja $\rho(T)$ -množica $P^1 \neq P$, skupaj z množicama Q^1 in R^1 . Naj bo $r \in V(T)$ koren drevesa T . Izberimo vozlišče $t \in P \oplus P^1$, ki je na največji razdalji od r , kjer je $P \oplus P^1 = (P - P^1) \cup (P^1 - P)$ simetrična razlika množic P in P^1 .

Predpostavimo najprej, da je $t \in P^1 - P$. Zaradi lastnosti (i) vemo, da t ni list, torej obstaja spodnji sosed v vozlišča t . Zaradi izbire vozlišča t velja, da sta množici

$P \cap V(T_v^t)$ in $P^1 \cap V(T_v^t)$ enaki. Če je $v \in P$, potem je tudi $v \in P^1$, kar je protislovje, saj sta t in v sosednji vozlišči v P . Če je $v \in Q$, potem za v obstaja spodnji sosed $w \in P$ in je zaradi izbire t vozlišča w tudi v P^1 . Ker $d(w, t) = 2$ in $w, t \in P^1$, imamo protislovje. Torej je $v \in R$.

Predpostavimo najprej, da je $t \in Q$. Vsako vozlišče iz množice Q ima soseda $u \in P$. Če je u spodnji sosed vozlišča t , potem glede na izbiro vozlišča t velja $u \in P \cap P^1$. Tako sta sosednji vozlišči t in u v $\rho(T)$ -množici P^1 , kar je protislovje. Torej je u zgornji sosed vozlišča t . Po lastnosti (ii) obstaja tako vozlišče $z \in P$, da velja $d(u, z) = 3$ in $d(t, z) = 2$. Očitno je z potomec od t in je v množici P^1 glede na izbiro vozlišča t . Ponovno dobimo protislovje s predpostavko, da je P^1 $\rho(T)$ -množica, saj $t, z \in P^1$.

Naj bo sedaj $t \in R$. Po lastnosti (iii) obstajata dve poti P_4 in vsaj ena je povezana s t prek spodnjega soseda. Naj bo ta pot $xyzuz$, kjer $x, u \in P$ in je y spodnji sosed vozlišča t . Glede na izbiro vozlišča t velja $x \in P^1$, kar je ponovno protislovje, saj $t, x \in P^1$ in $d(t, x) = 2$.

Torej v množici $P^1 - P$ ne obstaja vozlišče na največji razdalji od r , kar pomeni, da je $t \in P - P^1$.

Možnost 1. Vozlišče t ni list drevesa T .

Torej obstaja njegov spodnji sosed v . Glede na izbiro vozlišča t sta množici $P \cap V(T_v^t)$ in $P^1 \cap V(T_v^t)$ enaki.

Naj bo $T' = T - V(T_v^t)$ in naj bo $P' = P \cap V(T')$. Če t ni list drevesa T' , potem lastnost (i) velja za P' in T' , saj (i) velja za vse liste drevesa T . Sicer je t list drevesa T' in $t \in P'$. Torej lastnost (i) velja za P' . Očitno tudi lastnost (ii) velja za P' in T' , saj velja za P in T . Naj bo w poljubno vozlišče iz množice $R' = R \cap V(T')$. Ker je $t \in P$, velja $d(t, w) \geq 2$. Očitno lastnost (iii) velja za R' , P' in $Q' = Q \cap V(T')$ v drevesu T' , kadar je $d(t, w) > 2$. Naj bo torej $d(t, w) = 2$ in naj bosta $xyzuz$ in $x'y'z'u'$ taki poti v T , da velja $x, x', u, u' \in P$, $y, y', z, z' \in Q$ in $wy, wy' \in E(T)$. (Ti dve poti obstajata v T po lastnosti (iii).) Obe poti morata biti tudi v T' , saj $t \in P$ in $d(t, w) \geq 2$. Lastnost (iii) torej velja tudi za R' , P' in Q' v T' .

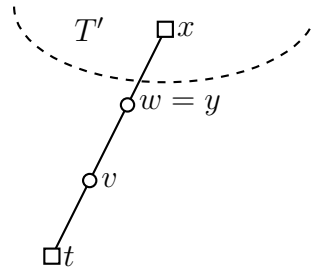
Po indukcijski predpostavki ima drevo T' enolično $\rho(T')$ -množico P' . Torej velja $|P'| > |P^{1'}|$, kjer je $P^{1'} = P^1 \cap V(T')$. Ker je $|P \cap V(T_v^t)| = |P^1 \cap V(T_v^t)|$, sledi da je $|P| > |P^1|$, kar je protislovje s predpostavko, da je P^1 $\rho(T)$ -množica.

Možnost 2. Vozlišče t je list drevesa T .

Označimo z v zgornjega soseda od t . Očitno $v \neq r$ glede na izbiro vozlišča t . Naj bo w zgornji sosed od v . Po lastnosti (ii) obstaja vozlišče $x \in P$, da velja $d(t, x) = 3$ in $d(v, x) = 2$. Označimo z y skupnega soseda od x in v . Velja, da je ali vozlišče v ali vozlišče w v množici P^1 , saj bi sicer $P^1 \cup \{t\}$ bilo pakiranje, ki je večje velikosti od P . (Tukaj spodnji sosed od v ne more biti v P^1 , saj bi to pomenilo, da je v $P^1 - P$ in na enaki razdalji od r kot je t , kar kot smo že videli ni možno.)

Podmožnost 2.1. x je zgornji sosed od w in $w = y$.

Naj bo $T' = T - V(T_w^x)$ in naj bo $P' = P \cap V(T')$, glej sliko 3.8. Lastnosti (i), (ii) in (iii) veljajo za množico P' skupaj z množicama $Q' = Q \cap V(T')$ in $R' = R \cap V(T')$ iz enakih razlogov kot pri možnosti 1. Po indukcijski predpostavki ima T' enolično $\rho(T')$ -množico P' . Torej velja $|P'| > |P^{1'}|$, kjer je $P^{1'} = P^1 \cap V(T')$. V T_w^x ne obstaja nobeno drugo vozlišče iz P^1 , razen vozlišč w in v , ki bi bilo na enaki razdalji od r kot sta w in v . Prav tako v T_w^x , glede na izbiro t , ne obstaja vozlišče iz $P^1 - P$, ki bi bilo na enaki razdalji od r kot t . Še več, vsa vozlišča, ki so bolj oddaljena od r kot t , so tako v P kot v P^1 . Torej $|P \cap V(T_w^x)| \geq |P^1 \cap V(T_w^x)|$, kar pomeni, da $|P| > |P^1|$ in imamo protislovje s predpostavko, da je P^1 $\rho(T)$ -množica.

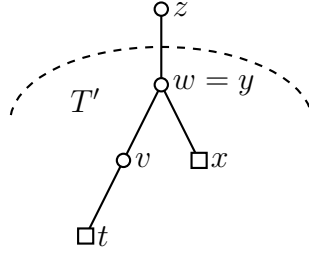


Slika 3.8: Primer, ko je t list, $w = y$ in je x zgornji sosed od w .

Podmožnost 2.2. x je spodnji sosed od w in $w = y$.

V tem primeru naj bo z zgornji sosed vozlišča w . Naj bo $T' = T - V(T_z^w)$, glej sliko 3.9. Opomnimo, da v tem primeru rez naredimo v obratni smeri, saj tokrat $r \notin V(T')$. Ponovno naj velja $P' = P \cap V(T)$, $Q' = Q \cap V(T')$ in $R' = R \cap V(T')$. Za P' v T' velja lastnost (i), ker w ni list drevesa T' , saj ima dva spodnja soseda in ker (i) velja za P v T . Lastnosti (ii) in (iii) veljata za P' , Q' in R' iz enakih razlogov kot prej. Po indukcijski predpostavki ima T' enolično $\rho(T')$ -množico P' .

Torej $|P'| > |P^1|$, kjer je $P^1 = P^1 \cap V(T')$. Ponovno je ali v ali w v množici P^1 . Vozlišče iz P^1 je torej bližje ali pa na enaki razdalji od z (in s tem tudi k T_z^w) kot je $x \in P$. Zaradi tega množica $P^1 \cap V(T_z^w)$ ne more imeti večje moči od $|P \cap V(T_z^w)|$ in imamo $|P \cap V(T_z^w)| \geq |P^1 \cap V(T_z^w)|$. Iz tega sledi, da je $|P| > |P^1|$, kar je ponovno protislovje s predpostavko, da je P^1 $\rho(T)$ -množica.

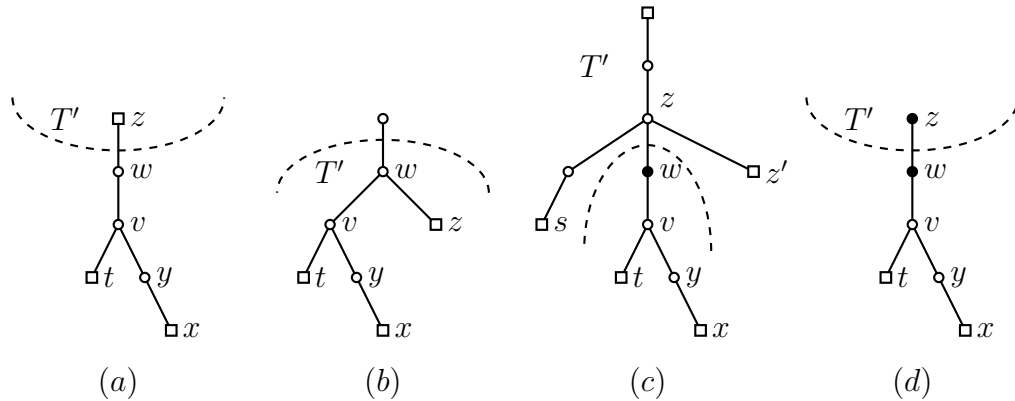


Slika 3.9: Primer, ko je t list, $w = y$ in je x spodnji sosed od w .

Podmožnost 2.3. $w \neq y$.

S tem je y spodnji sosed od v in x spodnji sosed od y . Če je zgornji sosed z vozlišča w v množici P , potem preimenujemo z v x in w v y in dobimo podmožnost 2.1, glej sliko 3.10(a). Podobno velja, če ima w spodnjega soseda z v množici P , saj s preimenovanjem $z = x$ in $w = y$ dobimo podmožnost 2.2, glej sliko 3.10(b). Torej je $w \in R$ in naj bo z njegov zgornji sosed. Naj bo $T' = T - V(T_z^w)$. Očitno velja $z \notin P$. Če je $z \in Q$, potem ima z soseda z' v množici $P \cap V(T')$, in po lastnosti (ii) obstaja tak $s \in P$, da velja $d(z', s) = 3$ in $d(z, s) = 2$, glej sliko 3.10(c). Skupni sosed od s in z skupaj z vozliščem z' zagotavlja, da z ni list drevesa T' . Če je $z \in R$, potem ima po lastnosti (iii) vsaj dva soseda v $Q \cap V(T')$, in z ponovno ni list, glej sliko 3.10(d). Torej za T' velja lastnost (i). Lastnosti (ii) in (iii) veljata za T' iz enakih razlogov kot prej. Po indukcijski predpostavki za T' obstaja enolična $\rho(T')$ -množica P' in $|P'| > |P^1|$, kjer $P^1 = P^1 \cap V(T')$. Eno od vozlišč v in w mora biti v P^1 in imamo $|P \cap V(T_z^w)| \geq |P^1 \cap V(T_z^w)|$ iz istih razlogov kot v podmožnosti 2.1. Torej sledi, da $|P| > |P^1|$, kar je še končno protislovje s predpostavko, da je P^1 $\rho(T)$ -množica. \square

Nadaljujemo z induktivno karakterizacijo dreves z enoličnim največjim pakiranjem. Naj bo T' drevo z enolično $\rho(T')$ -množico. Predstavili bomo pet operacij, s katerimi bomo iz drevesa T' konstruirali večje drevo T , ki ima enolično $\rho(T)$ -

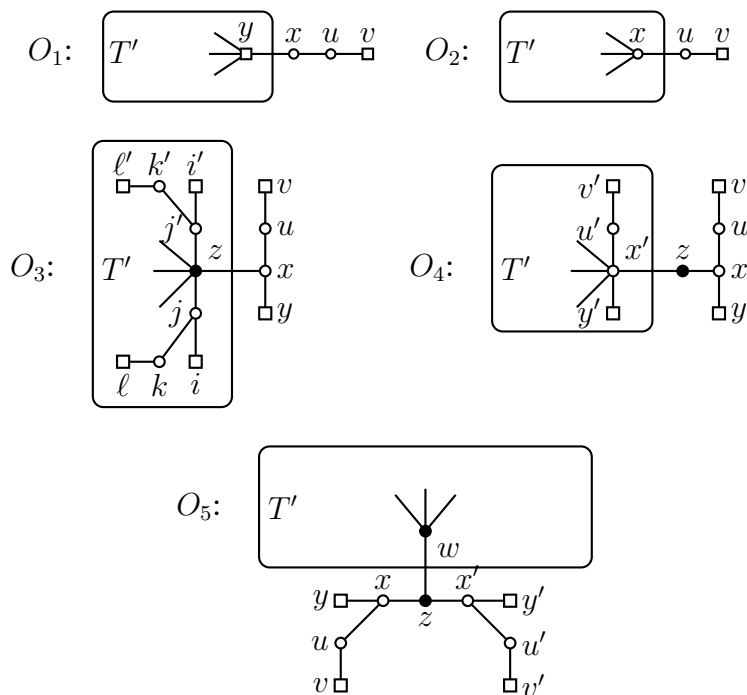
Slika 3.10: Možnosti za $w \neq y$.

množico. Dokazali bomo, da lahko iz K_1 s temi operacijami konstruiramo vsako drevo T z enolično $\rho(T)$ -množico. Operacije so prikazane na sliki 3.11, kjer so uporabljene oznake predstavljene v razdelku 3.1: vozlišče iz P' (ali P) je belo kvadratno, vozlišče iz Q' (ali Q) je belo okroglo in vozlišče iz R' (ali R) je črno okroglo.

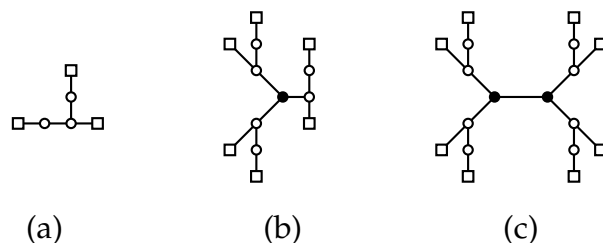
- (O_1) Za vozlišče $y \in P'$ dobimo T iz T' tako, da dodamo pot xuv in povezavo xy .
- (O_2) Za vozlišče $x \in Q'$ dobimo T iz T' tako, da dodamo pot wv in povezavo ux .
- (O_3) Za vozlišče $z \in R'$ dobimo T iz T' tako, da dodamo pot $vuxy$ in povezavo xz .
- (O_4) Za pot $v'u'x'y'$, kjer sta $u', x' \in Q'$ in $v', y' \in P'$, dobimo T iz T' tako, da dodamo vozlišče z , pot $vuxy$ in povezavi $x'z$ in zx .
- (O_5) Za vozlišče $w \in R'$ dobimo T iz T' tako, da dodamo pot $vuxzx'u'v'$ in vozlišča y in y' skupaj s povezavami xy , $x'y'$ in zw .

Hitro opazimo, da se nobena operacija ne more nadomestiti s kombinacijo ostalih, torej so operacije neodvisne. Operacijo O_1 potrebujemo zato, ker pot P_{3k+1} dobimo iz K_1 tako, da k -krat uporabimo operacijo O_1 . Zaporedje operacij O_1, O_2 nam da drevo z enoličnim največjim pakiranjem, ki ga ne moremo dobiti na noben drug način, glej sliko 3.12(a). Podobno iz zaporedja O_1, O_4 dobimo skrajno levo drevo slike 3.5, torej je tudi operacija O_4 potrebna. Če prejšnjemu zaporedju

dodamo operacijo O_3 , da dobimo O_1, O_4, O_3 , oziroma dodamo operacijo O_5 , da dobimo O_1, O_4, O_5 , ponovno dobimo dve drevesi, ki ju ne moremo dobiti na noben drug način, glej sliki 3.12(b) oziroma 3.12(c). Torej potrebujemo vseh pet operacij, in ker so omenjena zaporedja enolična, so operacije $O_1 - O_5$ neodvisne.



Slika 3.11: Operacije $O_1 - O_5$.



Slika 3.12: Drevesa, ki jih dobimo iz K_1 z uporabo operacij O_1 in O_2 (a), O_1, O_4 in O_3 (b) ter O_1, O_4 in O_5 (c).

Izrek 3.11 Drevo T ima enolično $\rho(T)$ -množico P natanko tedaj, ko ga lahko konstruiramo iz K_1 z zaporedjem operacij $O_1 - O_5$.

Dokaz. Predpostavimo najprej, da je T drevo dobljeno iz K_1 z zaporedjem operacij $O_1 - O_5$. S pomočjo matematične indukcije po dolžini k omenjenega zaporedja

bomo pokazali, da je T drevo z enolično $\rho(T)$ -množico. Če je $k = 0$, potem $T \cong K_1$, kar je najmanjše drevo z enolično $\rho(T)$ -množico. Naj bo $k > 0$ in naj bo T' drevo dobljeno iz K_1 z uporabo istega zaporedja kot za T , le da brez zadnje operacije. Po indukcijski predpostavki ima drevo T' enolično $\rho(T')$ -množico P' . Uporabili bomo notacijo prikazano na sliki 3.11.

Naj bo T drevo dobljeno iz T' z operacijo O_1 . Očitno je $P = P' \cup \{v\}$ največje pakiranje za T' . Naj bo P^1 takšno pakiranje za T , da je ali $u \in P^1$ ali pa $x \in P^1$. Imamo $P^1 \cap V(T') \neq P'$, saj $y \notin P^1$. Zaradi enoličnosti P' velja $|P^1 \cap V(T')| < |P'|$. Torej $|P^1| < |P|$ in P^1 ni $\rho(T)$ -množica. S tem je P enolična $\rho(T)$ -množica.

Predpostavimo sedaj, da je T drevo dobljeno iz T' z uporabo operacije O_2 . Pokazali bomo, da je T drevo z enolično $\rho(T)$ -množico $P = P' \cup \{v\}$. Ker je $x \in Q$, obstaja $y \in P'$, ki je sosed vozlišča x . Naj bo P^1 tako pakiranje za T , da $u \in P^1$. Očitno $P^1 \cap V(T') \neq P'$, saj $y \notin P^1$. Zaradi enoličnosti P' velja $|P^1 \cap V(T')| < |P'|$. Torej $|P^1| < |P|$ in P^1 ni $\rho(T)$ -množica. Kar pomeni, da je P enolična $\rho(T)$ -množica.

Predpostavimo najprej, da izvedemo operacijo O_3 nad T' , da dobimo drevo T . Če je $u \in P$ (ali $x \in P$), potem ima $P' \cup \{u\}$ (ali $P' \cup \{x\}$) $|P'| + 1$ elementov. Če pa nastavimo $P = P' \cup \{v, y\}$, potem dobimo pakiranje za T s $|P'| + 2$ elementi, torej $P' \cup \{u\}$ (ali $P' \cup \{x\}$) ni $\rho(T)$ -množica. Opazimo še, da ima vsako pakiranje P^1 drevesa T , kjer $|P^1 \cap V(T')| < |P'|$, manj kot $|P'| + 2$ elementov. To pomeni, da ima T enolično $\rho(T)$ -množico $P = P' \cup \{v, y\}$.

Če izvedemo operacijo O_4 , da iz T' dobimo T , potem vozlišči u in x ne pripadata $\rho(T)$ -množici iz istih razlogov kot pri operaciji O_3 . Predpostavimo, da za T obstaja tako pakiranje P^1 , da velja $z \in P^1$. Očitno $y, y' \notin P^1$ in $|P^1 \cap V(T')| < |P'|$, saj je P' enolično največje pakiranje za T' . To pomeni, da $|P^1| < |P|$, kjer je $P = P' \cup \{v, y\}$. Torej P^1 ni največje pakiranje za T in je P enolična $\rho(T)$ -množica.

Na koncu še predpostavimo, da je drevo T dobljeno iz T' z operacijo O_5 . Če pakiranje za T' vsebuje x (ali x'), potem $P' \cup \{x, y', v'\}$ (ali $P' \cup \{x', y, v\}$) vsebuje $|P'| + 3$ elemente in nobeno pakiranje za T , ki vsebuje x (ali x'), ni večje moči. Podobno, če je $u \in P$ (ali je $u' \in P$), potem $P' \cup \{u, y', v'\}$ (ali $P' \cup \{u', y, v\}$) vsebuje $|P'| + 3$ elementov, kar je ponovno največ možno v tem primeru. Če $z \in P$, potem tudi $P' \cup \{z, v, v'\}$ vsebuje $|P'| + 3$ elemente in jih ne more imeti več. Ampak, če nastavimo $P = P' \cup \{v, y, v', y'\}$ dobimo pakiranje za T s $|P'| + 4$ elementi, torej nobeno

pakiranje s $|P'| + 3$ ali manj elementi ni $\rho(T)$ -množica. Kar pomeni, da ima T enolično $\rho(T)$ -množico $P = P' \cup \{v, y, v', y'\}$.

Za dokaz nasprotne smeri naj bo T drevo z enolično $\rho(T)$ -množico P . Naj bo še r koren drevesa T . Nadaljujemo z matematično indukcijo po številu vozlišč drevesa T . Če $T \cong K_1$, potem je T najmanjše drevo z enolično $\rho(T)$ -množico, torej je baza indukcije jasna. Naj bo v list drevesa T , ki je na največji razdalji od r . Seveda $v \neq r$ in naj bo u podporno vozlišče vozlišča v . Očitno $u \neq r$, saj ima T enolično $\rho(T)$ -množico. Ker je v list drevesa T , ki je na največji razdalji od r , po lemi 3.2 velja, da $\deg(u) = 2$. Naj bo x zgornji sosed vozlišča u . Očitno $x \notin P$, saj $d(x, v) = 2$. Predpostavimo, da $x \in R$. Po lemi 3.7 takoj dobimo protislovje, saj je v list, ki je na največji razdalji od r . Torej je $x \in Q$. Naj bo y sosed vozlišča x , ki je v množici P . Če ima T samo 4 vozlišča, potem $T \cong P_4 = vuxy$, in z brisanjem vozlišč v, u in x dobimo $K_1 = y$. Očitno lahko dobimo T iz K_1 z operacijo O_1 in smo s tem končali. Predpostavimo lahko torej, da je $|V(T)| > 4$ in je z zgornji sosed vozlišča x ter w zgornji sosed vozlišča z (če obstaja). Če ima x soseda v R , potem mora po lemi 3.7 to biti zgornji sosed. Označimo s T' drevo, ki ga dobimo iz T z brisanjem nekaterih vozlišč in s P' njegovo $\rho(T')$ -množico. Ločimo naslednje primere.

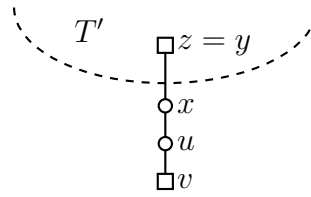
Možnost 1: $z \notin R$

Podmožnost 1.1: $\deg(x) = 2$.

Opazimo lahko, da v tem primeru velja $z = y$. Drevo T' dobimo iz T z brisanjem vozlišč x, u in v , glej sliko 3.13. Predpostavimo, da ima T' dve $\rho(T')$ -množici P^1 in P^2 . Potem sta $P^1 \cup \{v\}$ in $P^2 \cup \{v\}$ obe $\rho(T)$ -množici, kar je protislovje s predpostavko o enoličnosti $\rho(T)$ -množice. Drevo T' ima torej enolično $\rho(T')$ -množico. Po indukcijski predpostavki lahko T' konstruiramo iz K_1 z zaporedjem operacij $O_1 - O_5$. Če na koncu dodamo še operacijo O_1 za pot xuv in povezavo zx , potem smo T dobili iz K_1 z zaporedjem operacij $O_1 - O_5$.

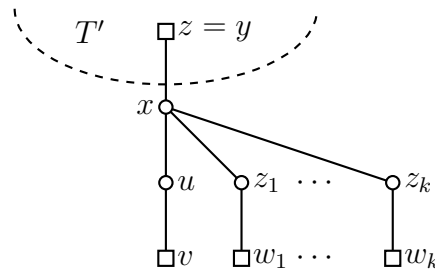
Podmožnost 1.2: $\deg(x) \geq 3$.

Naj bodo z_1, \dots, z_k spodnji sosedi vozlišča x (različni od u in različni od y , v primeru da je y spodnji sosed od x). Vozlišče $z_i, i \in [k]$, ni v R po lemi 3.7 in glede na izbiro vozlišča v in je torej v Q . Opazimo, da je glede na izbiro vozlišča v , vsak spodnji sosed od $z_i, i \in [k]$, list. Po lemi 3.2 ima vsak $z_i, i \in [k]$, natanko enega

Slika 3.13: Primer, ko $z \notin R$ in je $\deg(x) = 2$.

spodnjega soseda w_i , ki je v P , saj je $y \in P$.

Če $z = y$, potem dobimo T' iz T s brisanjem poddrevesa s korenom x , glej sliko 3.14. Če obstajata dve $\rho(T')$ -množici P^1 in P^2 s $|P| - 1 - k$ elementi, potem sta $P^1 \cup \{v, w_1, \dots, w_k\}$ in $P^2 \cup \{v, w_1, \dots, w_k\}$ obe $\rho(T)$ -množici, kar je protislovje z enoličnostjo $\rho(T)$ -množice. Torej je T' drevo z enolično $\rho(T')$ -množico. Po indukcijski predpostavki lahko T' konstruiramo iz K_1 z zaporedjem operacij $O_1 - O_5$. Če na koncu dodamo še operacijo O_1 za x , u in v ter k -krat operacijo O_2 za z_i in w_i , $i \in [k]$, potem smo T dobili iz K_1 z zaporedjem operacij $O_1 - O_5$.

Slika 3.14: Primer, ko $z \notin R$, $\deg(x) \geq 3$ in $z = y$.

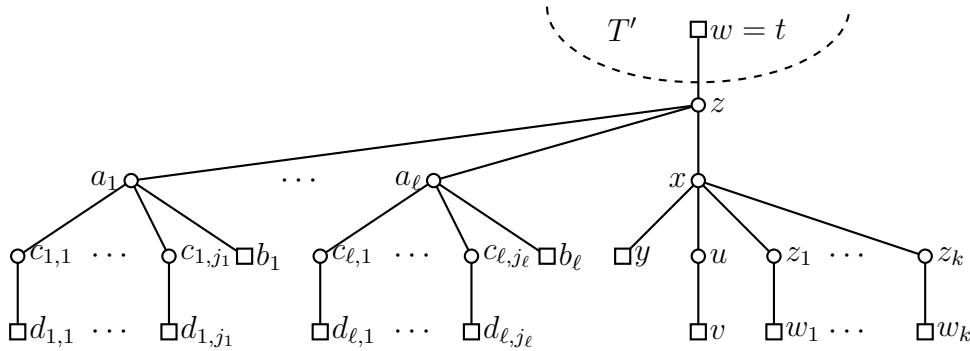
Če $z \neq y$ (torej je y spodnji sosed od x), potem je $z \in Q$, saj je $d(y, z) = 2$. Torej ima vozlišče z soseda t , ki je v P . Vozlišča z_i in w_i , $i \in [k]$, imajo enako vlogo kot prej. Označimo z a_1, \dots, a_ℓ spodnje sosede vozlišča z različne od t (če je t spodnji sosed). Nobeno vozlišče a_i , $i \in [\ell]$, ni v R po lemi 3.7 in glede na izbiro vozlišča v . Prav tako nobeno vozlišče a_i , $i \in [\ell]$, ni v P , saj $d(t, a_i) = 2$, in je s tem torej v Q . Vsako vozlišče iz Q ima natanko enega soseda v P in naj bo b_i tak sosed za a_i , $i \in [\ell]$. Ker vozlišče z ni v množici P , je vozlišče b_i spodnji sosed od a_i . Še več, vsak a_i , $i \in [\ell]$, lahko ima spodnje sosede $c_{i,1}, \dots, c_{i,j_i}$, ki morajo pripadati množici Q (ne morejo pripadati množici R po lemi 3.7 in niso v P , saj $d(c_{i,s}, b_i) = 2$ za $s \in [j_i]$).

Vsak $c_{i,s}$, $i \in [\ell]$ in $s \in [j_i]$, ima natanko enega spodnjega soseda $d_{i,s}$ glede na izbiro vozlišča v in glede na lemo 3.2. Po lemi 3.1 mora vozlišče $d_{i,s}$ pripadati množici P .

Če $w = t$, potem dobimo drevo T' iz T z brisanjem poddrevesa s korenom z , glej sliko 3.15. Če obstajata dve $\rho(T')$ -množici P^1 in P^2 s $|P| - 2 - k - \ell - j_1 - \dots - j_\ell$ elementi, potem sta za

$$A = \{v, y, w_1, \dots, w_k, b_1, \dots, b_\ell, d_{1,1}, \dots, d_{1,j_1}, \dots, d_{\ell,1}, \dots, d_{\ell,j_\ell}\}$$

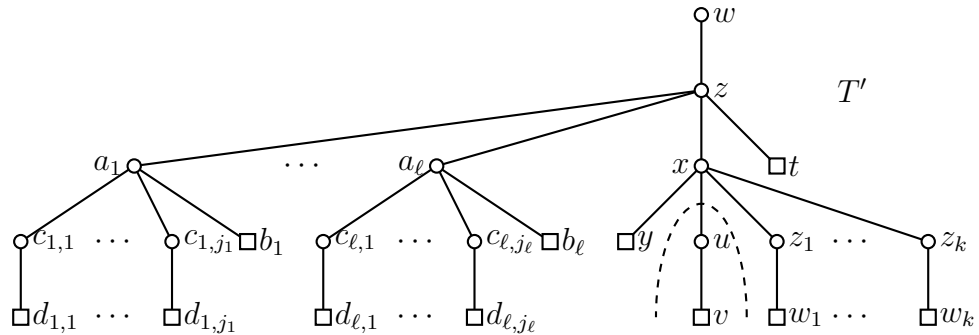
množici $P^1 \cup A$ in $P^2 \cup A$ obe $\rho(T)$ -množici, kar je protislovje s predpostavko o enoličnosti $\rho(T)$ -množice. Torej ima drevo T' enolično $\rho(T')$ -množico. Po indukcijski predpostavki lahko T' konstruiramo iz K_1 z zaporedjem operacij $O_1 - O_5$. Če na koncu dodamo še operacijo O_1 za z , x in y in operacijo O_2 enkrat za u in v , k -krat za z_i in w_i , $i \in [k]$, ℓ -krat za a_i in b_i , $i \in [\ell]$, ter $j_1 + \dots + j_\ell$ -krat za $c_{i,q}$ in $d_{i,q}$, $i \in [\ell]$ in $q \in [j_i]$, potem smo T dobili iz K_1 z zaporedjem operacij $O_1 - O_5$.



Slika 3.15: Primer, ko $z \notin R$, $\deg(x) \geq 3$, $z \neq y$ in $w = t$.

Če $w \neq t$ (torej je t spodnji sosed od z), potem dobimo T' iz T z brisanjem vozlišč u in v , glej sliko 3.16. Opazimo, da nobena $\rho(T')$ -množica ne vsebuje vozlišča x , saj bi s tem $(P' - \{x\}) \cup \{y, t, w_1, \dots, w_k\}$ bilo pakiranje večje moči kot $\rho(T')$ -množica. Če obstajata dve množici P^1 in P^2 s $|P| - 1$ elementi, potem sta množici $P^1 \cup \{v\}$ in $P^2 \cup \{v\}$ obe $\rho(T)$ -množici, kar je protislovje z enoličnostjo $\rho(T)$ -množice. Torej ima drevo T' enolično $\rho(T')$ -množico. Po indukcijski predpostavki lahko T' konstruiramo iz K_1 z zaporedjem operacij $O_1 - O_5$. Če na koncu dodamo še operacijo

O_2 za u in v , potem smo T dobili iz K_1 z zaporedjem operacij $O_1 - O_5$.



Slika 3.16: Primer, ko $z \notin R$, $\deg(x) \geq 3$, $z \neq y$ in $w \neq t$.

Možnost 2: $z \in R$

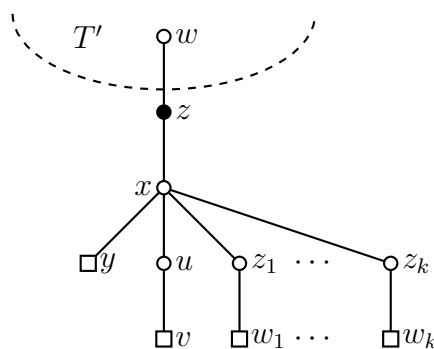
V tem primeru obstaja $y \in P$, ki je spodnji sosed od x , sicer bi tudi množica $(P - \{v\}) \cup \{u\}$ bila $\rho(T)$ -množica, kar pa ni možno. Označimo z z_1, \dots, z_k spodnje sosede vozlišča x (če obstajajo), ki so različni od y in u . Očitno je vsak $z_i, i \in [k]$, v množici Q , saj ne more biti v R po lemi 3.7, in ne more biti v P , saj je $d(z_i, y) = 2$. Po lemi 3.1 ima vsak $z_i, i \in [k]$, spodnjega soseda w_i v P . Glede na izbiro vozlišča v in po lemi 3.2 je vozlišče w_i enoličen spodnji sosed od z_i . Naj bodo a_1, \dots, a_ℓ spodnji sosedi vozlišča z , če obstajajo (glej sliko 3.17 za primer, ko ne obstajajo). Očitno je vsak $a_i, i \in [\ell]$, v množici Q , saj a_i ni v R po lemi 3.7 in glede na izbiro vozlišča v ter ni v P , saj je sosed od z . Vsak $a_i, i \in [\ell]$, ima natanko enega spodnjega soseda, ki je v P , označimo ga s t_i . Vsi ostali spodnji sosedi vozlišča a_i so v Q , saj so na razdalji dve od t_i , torej niso v P , in prav tako niso v R glede na izbiro vozlišča v in lemo 3.7. Označimo jih z $b_{a_i,j}, i \in [\ell], j \in [m_i]$. Vsak $b_{a_i,j}, i \in [\ell], j \in [m_i]$, ima natanko enega spodnjega soseda $c_{a_i,j} \in P$. Glede na izbiro vozlišča v in lemo 3.2 je $c_{a_i,j}$ enoličen spodnji sosed vozlišča $b_{a_i,j}$. Opazimo, da glede na lemo 3.3 za t_i in a_i za vsak $i \in [\ell]$ velja $m_i \geq 1$. Za opisano glej sliko 3.18 in 3.19. Uporabili bomo naslednjo notacijo

$$A = \{v, y, w_1, \dots, w_k, t_1, \dots, t_\ell, c_{a_1,1}, \dots, c_{a_1,m_1}, \dots, c_{a_\ell,1}, \dots, c_{a_\ell,m_\ell}\}.$$

Podmožnost 2.1: $\deg(z) = 2$.

Opazimo lahko, da v tem primeru vozlišča $a_i, i \in [\ell]$, ne obstajajo, če je $z \neq r$, in če

je $z = r$, potem $\ell = 1$. Drevo T' dobimo iz T z brisanjem poddrevesa s korenem z , glej sliko 3.17. Predpostavimo, da ima T' dve $\rho(T')$ -množici P^1 in P^2 . V tem primeru sta $P^1 \cup \{v, y, w_1, \dots, w_k\}$ in $P^2 \cup \{v, y, w_1, \dots, w_k\}$ obe $\rho(T)$ -množici, kar je protislovje s predpostavko o enoličnosti $\rho(T)$ -množice. To pomeni, da ima T' enolično $\rho(T')$ -množico. Po indukcijski predpostavki lahko drevo T' konstruiramo iz K_1 z zaporedjem operacij $O_1 - O_5$. Če na konec tega zaporedja dodamo še operacijo O_4 za vozlišča z, y, x, u, v in k -krat operacijo O_2 za z_i in $w_i, i \in [k]$, potem smo drevo T konstruirali iz K_1 z zaporedjem operacij $O_1 - O_5$.



Slika 3.17: Primer, ko $z \in R$ in $\deg(z) = 2$.

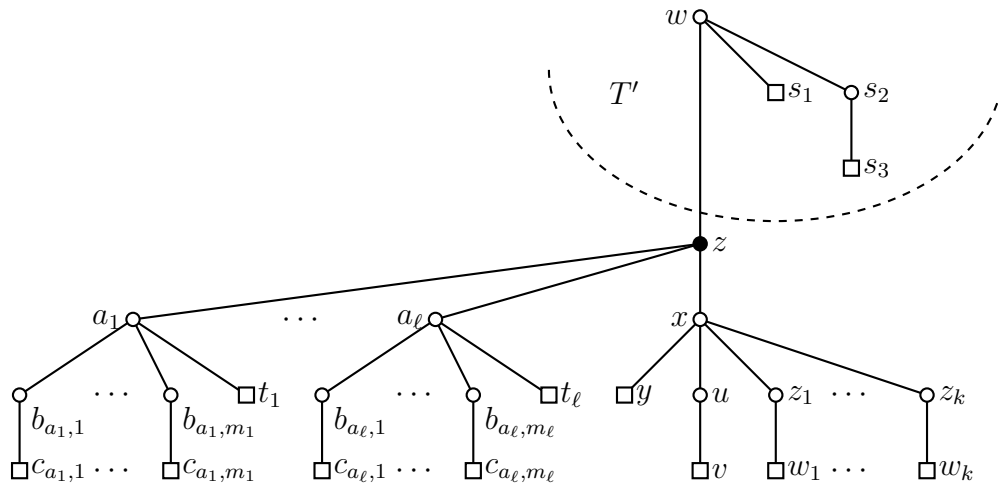
Podmožnost 2.2: $\deg(z) \geq 3$ in z nima sosedov v R .

Očitno je $w \in Q$, saj z nima sosedov v množici R . Torej ima vozlišče w soseda $s_1 \in P$, glej sliko 3.18. Po lemi 3.3 obstaja sosed $s_2 \in Q$ vozlišča w in sosed $s_3 \in P$ vozlišča s_2 .

Drevo T' dobimo iz T z brisanjem poddrevesa s korenem z . Če obstajata dve različni $\rho(T')$ -množici P^1 in P^2 s $|P^1| - 2 - k - \ell - m_1 - \dots - m_\ell$ elementi, potem sta $P^1 \cup A$ in $P^2 \cup A$ obe $\rho(T)$ -množici, kar je protislovje z enoličnostjo $\rho(T)$ -množice. Torej ima drevo T' enolično $\rho(T')$ -množico. Po indukcijski predpostavki lahko T' konstruiramo iz K_1 z zaporedjem operacij $O_1 - O_5$. Če na konec tega zaporedja dodamo še operacijo O_4 za z, x, y, u, v , ℓ -krat operacijo O_3 za $a_i, t_i, b_{a_i,1}, c_{a_i,1}, i \in [\ell]$, $m_1 + \dots + m_\ell - \ell$ -krat operacijo O_2 za $b_{a_i,r}, c_{a_i,r}, i \in [\ell], r \in [m_i]_{\geq 2}$, in k -krat operacijo O_2 za $z_i, w_i, i \in [k]$, potem smo T dobili iz K_1 z zaporedjem operacij $O_1 - O_5$.

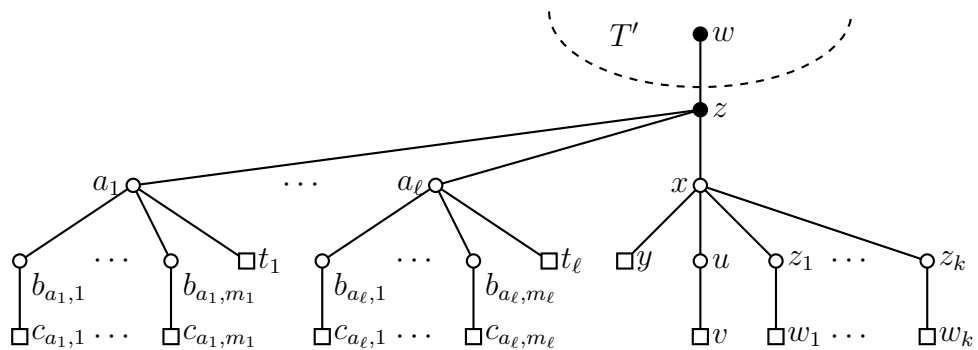
Podmožnost 2.3: $\deg(z) \geq 3$ in z ima soseda v R .

Po lemi 3.7 in glede na izbiro vozlišča v , je vozlišče w v množici R , glej sliko 3.19.



Slika 3.18: Primer, ko $z \in R$, $\deg(z) \geq 3$ in z nima sosedov v množici R .

Drevo T' dobimo iz T z brisanjem poddrevesa s korenem z . Po lemi 3.7 ima z vsaj enega spodnjega soseda, ki je različen od x , kar pomeni, da je $\ell \geq 1$. Predpostavimo, da ima T' dve različni $\rho(T')$ -množici P^1 in P^2 . Potem sta $P^1 \cup A$ in $P^2 \cup A$ obe $\rho(T)$ -množici, kar je protislovje z enoličnostjo $\rho(T)$ -množice. Torej ima T' enolično $\rho(T')$ -množico. Po indukcijski predpostavki lahko T' konstruiramo iz K_1 z zaporedjem operacij $O_1 - O_5$. Če na konec tega zaporedja dodamo še operacijo O_5 za $z, x, y, u, v, a_1, t_1, b_{a_1,1}, c_{a_1,1}$, $\ell - 1$ -krat operacijo O_3 za $a_i, t_i, b_{a_i,1}, c_{a_i,1}$, $i \in [\ell]_2$, $m_1 + \dots + m_\ell - \ell$ -krat operacijo O_2 za $b_{a_i,r}, c_{a_i,r}$, $i \in [\ell]$, $r \in [m_i]_2$, in k -krat operacijo O_2 za z_i, w_i , $i \in [k]$, potem smo T dobili iz K_1 z zaporedjem operacij $O_1 - O_5$.



Slika 3.19: Primer, ko $z \in R$, $\deg(z) \geq 3$ in ima z soseda v množici R .

□

4

DIMENZIJA INCIDENČNOSTI

Poglavje namenimo uvedbi nove dimenzije imenovane dimenzija incidenčnosti. Ta je tesno povezana s konceptom pakirne množice grafa. V prvem delu poglavja predstavimo osnovne pojme, vrednosti za nekatere znane družine grafov in glavni izrek, ki dimenzijo incidenčnosti poveže s pakirnim številom grafa. V drugem delu pokažemo, da je problem dimenzije incidenčnosti NP-poln. Vsebina poglavja je povzeta po članku [5].

4.1 Generator incidenčnosti

Zanimajo nas lastnosti komplementa pakirne množice grafa G . Naslednji rezultat prispeva k motivaciji za definicijo dimenzije incidenčnosti.

Trditev 4.1 Če je množica $X \subseteq V(G)$ pakirna množica grafa G , potem je množica $S = V(G) - X$ vozliščno pokritje za G , in za vsaki dve različni povezavi e in f obstaja tak $x \in S$, da je x ali krajišče povezave e ali krajišče povezave f , ne pa obeh.

Dokaz. Naj bo $e = uv$ poljubna povezava grafa G . Če je $\{u, v\} \cap S = \emptyset$, potem sta $u, v \in X$. Ker je $d(u, v) = 1$, imamo protislovje s tem, da je množica X pakirna množica grafa G . Torej je S vozliščno pokritje. (To sledi tudi iz dejstva, da je vsako pakiranje tudi 1-pakiranje in s tem hkrati tudi neodvisna množica. Vemo pa, da so komplementi neodvisnih množic vozliščna pokritja.)

Vzemimo sedaj dve poljubni povezavi $e, f \in E(G)$. Če $e = uv$ in $f = ab$ nista sosednji, potem sta razlikovani z enim krajiščem povezave e , ki je v množici S , saj je S vozliščno pokritje za G . Sicer se ujemata v enem vozlišču, recimo $u = a$. Če je $\{v, b\} \cap S = \emptyset$, potem sta $v, b \in X$. To je protislovje s tem, da je X pakirna množica za G , saj $d(b, v) \leq 2$. Torej je vsaj eno izmed vozlišč v in b v množici S in to je tudi iskano vozlišče. \square

Z drugo lastnostjo prejšnje trditve lahko definiramo dimenzijo incidenčnosti na naslednji način. Smiselno je, da v definiciji zahtevamo množico z najmanjšo močjo, ki ima to lastnost. S tem ohranimo analogijo s povezavo med neodvisnostnim številom in vozliščnim pokritjem.

Definicija 4.2 Naj bosta e in f poljubni povezavi grafa G in x poljubno vozlišče grafa G . Pravimo, da x incidenčno razlikuje par e, f , če je x krajišče natanko ene izmed povezav e in f . Množica S vozlišč grafa G je incidenčni generator za G , če za vsaki dve različni povezavi $e, f \in E(G)$ obstaja vozlišče $x \in S$, da x incidenčno razlikuje par e, f . Incidenčni generator najmanjše moči imenujemo incidenčna baza grafa G in njeno kardinalnost incidenčna dimenzija grafa G . Slednjo označimo z $\dim_I(G)$.

Na primeru grafa K_2 lahko vidimo, da je incidenčni generator najmanjše moči kar prazna množica, saj v grafu obstaja le ena povezava. Torej je $\dim_I(K_2) = 0$. Očitno lahko to razširimo na katerikoli graf z eno povezavo. Kakor hitro pa ima graf G vsaj dve povezavi, velja $\dim_I(K_2) > 0$.

Nadalje opazimo, da če je S incidenčni generator za G , potem obstaja največ ena povezava, ki ima obe krajišči izven S . Če bi obstajali dve takšni povezavi, potem ju ne bi mogli incidenčno razlikovati z vozliščem iz S . To bi bilo protislovje s tem, da je S incidenčni generator za G .

Preden podamo konkretnejšo povezavo med dimenzijo incidenčnosti in pakirnim številom grafa, potrebujemo še nekaj dodatne terminologije.

Definicija 4.3 Naj bo $e = uv$ povezava grafa G . Pakiranje P grafa $G - e$ imenujemo e -kritično za $G - e$, če je P največje pakiranje grafa $G - e$, ki vsebuje obe krajišči povezave e ali pa je tudi pakiranje grafa G . Poljubno, a fiksno e -kritično pakiranje grafa $G - e$ bomo označili s $P_e(G)$.

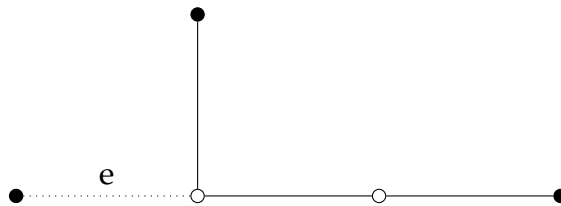
Pogoj iz definicije lahko zapišemo tudi kot:

$$\text{Če } |\{u, v\} \cap P_e(G)| < 2, \text{ potem je } P_e(G) \text{ pakiranje za } G. \quad (4.1)$$

Naj bo $e = uv \in E(G)$. Opazimo, da sta tako u kot v lahko v $P_e(G)$, in potem je pogoj (4.1) trivialno izpolnjen. V takšnem primeru $P_e(G)$ ni pakiranje za G . Pakiranje za G pa dobimo, če iz $P_e(G)$ odstranimo eno izmed vozlišč u in v . Množica $P_e(G)$ je pakiranje za G tudi, če velja $u, v \notin P_e(G)$. Če je natanko eno krajišče povezave e , recimo u , v množici $P_e(G)$, potem velja $N_G(v) \cap P_e(G) = \{u\}$, saj sicer $P_e(G)$ ni pakiranje za G , kar je v protislovju s pogojem (4.1). Ker je vsako (tudi največje) pakiranje v G hkrati tudi pakiranje v $G - e$, velja

$$\rho(G) \leq |P_e(G)| \leq \rho(G) + 1. \quad (4.2)$$

Zgled 4.4 Na sliki 4.1 vidimo primer grafa G , za katerega je e -kritično pakiranje za črtkano označeno povezavo e manjše od $\rho(G - e)$. Črna vozlišča predstavljajo enolično največje pakiranje za $G - e$, ki pa ni e -kritično, saj ne izpolnjuje pogoja (4.1). Torej je vsako e -kritično pakiranje za G moči 2.



Slika 4.1: Graf G in povezava e za katero velja, da $\rho(G - e) > |P_e(G)|$.

Izrek 4.5 Če je G graf na n vozliščih z vsaj eno povezavo in k celo število definirano kot $k = \max_{e \in E(G)} |P_e(G)|$, potem je $\dim_I(G) = n - k$. Incidenčna baza za G je katerakoli množica oblike $S = V(G) - P_e(G)$ z lastnostjo $k = |P_e(G)|$.

Dokaz. Naj bo $e = uv$ takšna povezava grafa G , da za množico $X = P_e(G)$ velja $|X| = k$. Dokazati želimo, da je $S = V(G) - X$ incidenčni generator za G .

Če je $|\{u, v\} \cap X| < 2$, potem je X tudi pakiranje v G , in po trditvi 4.1 velja, da je S incidenčni generator za G . Sicer sta $u, v \in X$ in je X pakiranje v $G - e$. Torej je po trditvi 4.1 množica S incidenčni generator za $G - e$ in ima vsaka povezava v $G - e$ vsaj eno krajišče v S . Ker je S incidenčni generator za $G - e$, moramo obravnavati le tiste pare povezav, ko je ena izmed povezav povezava e . Vzemimo povezavo e in poljubno povezavo $f \neq e$ grafa G . Očitno sta e in f razlikovani s krajiščem povezave f iz množice S , ki je različno od vozlišč u in v . Seveda takšno vozlišče vedno obstaja, saj sta $u, v \in X$. Sledi, da je S incidenčni generator za G in velja $\dim_I(G) \leq n - k$.

Sedaj predpostavimo, da za G obstaja incidenčni generator S' , ki je moči $|S'| = d' < n - k$. V G obstaja največ ena povezava inducirana s $P = V(G) - S'$, saj je S' incidenčni generator za G . Predpostavimo, da takšna povezava $f = st$ obstaja. Najprej opazimo, da v $G - f$ ne obstaja povezava med nobenima dvema vozliščema iz P . Prav tako ne obstajata dve poljubni vozlišči $x, y \in P$, da velja $d_{G-f}(x, y) = 2$, saj je S' incidenčni generator za G . Sledi torej, da je P pakiranje za $G - f$ in $s, t \in P$. Ker je moč množice P enaka $n - d' > k$, imamo protislovje z maksimalnostjo množice X . Če v grafu induciranim s P ni povezav, je P pakiranje za G , saj v P ne obstajata vozlišči na razdalji 2. Vsako pakiranje za G je tudi pakiranje za $G - f$, ki za poljubno povezavo f zadostuje lastnosti iz definicije 4.3. Ponovno imamo protislovje z maksimalnostjo množice X . Zaključimo lahko torej, da ne obstaja incidenčni generator za G , katerega moč je manj kot $n - k$. \square

Sledi direktna posledica izreka 4.5 in lastnosti (4.2).

Posledica 4.6 *Za vsak graf G z n vozlišči velja, da $n - \rho(G) - 1 \leq \dim_I(G) \leq n - \rho(G)$.*

S tem dobimo naravno particijo grafov na dva razreda. En razred sestavljajo grafi, katerih incidenčna dimezija je enaka $|V(G)| - \rho(G) - 1$, drugega pa tisti katerih incidenčna dimezija je enaka $|V(G)| - \rho(G)$. Da pokažemo, da graf pripada prvemu razredu, moramo poiskati povezavo e , da velja $|P_e(G)| = \rho(G) + 1$. Da pokažemo, da graf pripada drugemu razredu, pa moramo pokazati, da za vsako povezavo e velja $|P_e(G)| = \rho(G)$.

Sedaj bomo izpeljali natančne rezultate za incidenčno dimezijo nekaterih razredov grafov. Najprej bomo obravnavali razred povezavno-trikotnih grafov. Graf

imenujemo *povezavno-trikoten*, če je vsaka povezava grafa del vsaj enega cikla na treh vozliščih.

Trditev 4.7 *Graf G je povezavno-trikoten natanko tedaj, ko za vsak incidenčni generator S in za vsako povezavo $e = uv$ velja, da je $|\{u, v\} \cap S| > 0$.*

Dokaz. Naj bo graf G povezavno-trikoten. Predpostavimo, da obstaja povezava $e = uv$ in incidenčni generator S za G , da velja $|\{u, v\} \cap S| = 0$. Ker je G povezavno-trikoten graf, obstaja vozlišče w , da je $uvwu$ cikel na treh vozliščih. Opazimo, da vozlišče w mora biti v množici S , saj moramo e in uw razlikovati z vsaj enim krajiščem. To pa pomeni, da povezavi uw in vw nista razlikovani z nobenim vozliščem iz S , kar je protislovje s tem, da je S incidenčni generator za G .

Obratno predpostavimo, da G ni povezavno-trikoten graf. Torej obstaja povezava $e = uv$, ki ni del nobenega cikla na treh vozliščih. Posledično je množica $S = V(G) - \{u, v\}$ incidenčni generator za G , kar pomeni, da obstaja povezava $e = uv$, da velja $|\{u, v\} \cap S| = 0$. \square

Trditev 4.7 je ekvivalentna trditvi, da je graf G povezavno-trikoten natanko tedaj, ko je vsak incidenčni generator grafa G tudi vozliščno pokritje.

Zaradi trditve 4.7 velja tudi naslednja posledica.

Posledica 4.8 *Naj bo G povezavno-trikoten graf. Množica S je incidenčni generator za G natanko tedaj, ko je $V(G) - S$ pakiranje za G .*

Dokaz. Predpostavimo, da je S incidenčni generator za G . Po trditvi 4.7 vemo, da v $V(G) - S$ ne obstajata dve vozlišči na razdalji 1. Prav tako v $V(G) - S$ ne obstajata dve vozlišči na razdalji 2, saj je S incidenčni generator. Sledi, da je $V(G) - S$ pakiranje za G .

Po trditvi 4.1 obrat posledice velja za vsak graf G . \square

Trditev 4.9 *Naj bodo n, r in t naravna števila.*

- (i) Če je $n \geq 3$, potem je $\dim_I(K_n) = n - 1$.

- (ii) Če je $n \geq 3$, potem je $\dim_I(P_n) = \lfloor \frac{2(n-1)}{3} \rfloor$.
- (iii) Če je $n \geq 4$, potem je $\dim_I(C_n) = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$.
- (iv) Če sta $r, t \geq 1$, potem je $\dim_I(K_{r,t}) = r + t - 2$.

Dokaz. (i) Očitno je K_n povezavno-trikoten graf. Rezultat torej sledi iz posledice 4.8 in dejstva, da je vsaka množica, ki vsebuje vsa vozlišča grafa G razen enega, najmanjši incidenčni generator za G .

(ii) Naj bo množica $V(P_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ takšna, da za vsak $i \in \{0, \dots, n-2\}$ velja $v_i v_{i+1} \in E(P_n)$. Obravnavajmo množico $S' = \{v_i : i \geq 2 \text{ in } i \equiv 0 \text{ ali } i \equiv 2 \pmod{3}\}$. Opazimo lahko, da sta poljubni vozlišči grafa P_n incidenčno razlikovani z množico S' , in da je $\dim_I(P_n) \leq |S'| = \lfloor \frac{2(n-1)}{3} \rfloor$.

Naj bo sedaj S incidenčni generator za P_n . Obstaja lahko največ ena povezava, ki nima krajišča v množici S . Če $v_i \in S$ in $i \notin \{0, n-1\}$, potem $v_{i-1} \in S$ ali $v_{i+1} \in S$. Torej za katerakoli tri zaporedna vozlišča v_i, v_{i+1}, v_{i+2} velja, da sta vsaj dva v S (z le eno možno izjemo). Iz teh dejstev sledi, da je $\dim_I(P_n) = |S| \geq \lfloor \frac{2(n-1)}{3} \rfloor$, kar zaključí dokaz točke (ii).

(iii) Naj bo $e = uv$ poljubna povezava cikla C_n . Očitno je $C_n - e \cong P_n$. Znano je, glej [43], da je $\rho(T) = \gamma(T)$ za vsako drevo T , in velja, da je $\rho(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Še več, vedno obstaja taka $\rho(P_n)$ -množica P , da sta $u, v \in P$. Torej je $|P_e(C_n)| = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Naj bo sedaj $\rho(C_n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. Če $n \neq 3k$, potem je $|P_e(C_n)| = \rho(C_n) + 1$, in po izreku 4.5 velja, da je $\dim_I(C_n) = n - \lceil \frac{n}{3} \rceil = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$. Če je $n = 3k$, potem za vsako povezavo e velja, da je $|P_e(C_n)| = \rho(C_n) = k$. Tako ponovno po izreku 4.5 velja, da je $\dim_I(C_n) = n - \rho(C_n) = 3k - k = \frac{2n}{3} = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$. S tem smo zaključili z dokazom točke (iii).

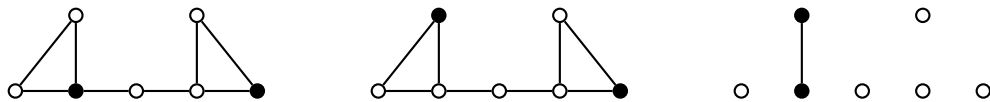
(iv) Očitno za vsako povezavo $e = uv$ grafa $K_{r,t}$ velja, da je $P_e(K_{r,t}) = \{u, v\}$, medtem ko je $\rho(K_{r,t}) = 1$. Ker so vse povezave druga drugi simetrične, po izreku 4.5 velja, da je $\dim_I(K_{r,t}) = r + t - 2$. \square

Spomnimo, s $P_1 \oplus P_2 = (P_1 - P_2) \cup (P_2 - P_1)$ označimo simetrično razliko množic P_1 in P_2 .

Izrek 4.10 Naj bo G poljuben graf. Če je $\dim_I(G) = |V(G)| - \rho(G) - 1$, potem obstajata največji pakiranja P_1 in P_2 grafa G , da je graf $G[P_1 \oplus P_2]$ izomorfen grafu K_2 .

Dokaz. Naj bo G poljuben graf in S incidenčna baza za G z lastnostjo $\dim_I(G) = |V(G)| - \rho(G) - 1$. Naj bo še $P = V(G) - S$. Množica P ni pakiranje za G , saj $|P| = \rho(G) + 1$. Torej obstajata dve različni vozlišči $u, v \in P$, da je $1 \leq d(u, v) \leq 2$. Če je $d(u, v) = 2$, potem povezavi uw in wv , kjer je w skupni sosed od u in v , nista razlikovani z množico S , kar je protislovje. Torej velja $d(u, v) = 1$. Naj bo $P_1 = V(G) - (S \cup \{u\})$ in $P_2 = V(G) - (S \cup \{v\})$. Moč obeh pakiranj je največja možna, saj je $|P_1| = |P_2| = |V(G)| - ((|V(G)| - \rho(G) - 1) + 1) = \rho(G)$. Ker sta u in v sosednji, sledi, da je graf $G[P_1 \oplus P_2]$ izomorfen grafu K_2 . \square

Obrat implikacije izreka 4.10 ne velja v splošnem, kar lahko vidimo na primeru na sliki 4.2. Na levi in na sredini vidimo dve različni največji pakiranji grafa G , ki sta označeni s črnimi vozlišči. Na desni strani je slika grafa $G[P_1 \oplus P_2]$, ki je očitno izomorfen grafu K_2 , vendar incidenčna dimenzija grafa G ni enaka $|V(G)| - \rho(G) - 1$.



Slika 4.2: Primer, ki pokaže, da obrat implikacije izreka 4.10 v splošnem ne velja.

Iz posledice 4.6 in izreka 4.10 izpeljemo natančno vrednost incidenčne dimenzije grafov z enoličnim največjim pakiranjem. Dve karakterizaciji dreves s to lastnostjo sta predstavljeni v poglavju 3.

Izrek 4.11 Če je G graf z enoličnim največjim pakiranjem, potem je $\dim_I(G) = |V(G)| - \rho(G)$.

Hitro opazimo, da je za vsak graf G poljubna množica, ki vsebuje vsa vozlišča grafa razen enega, incidenčni generator za G . Po drugi strani naj bo G povezan graf z $n \geq 3$ vozlišči, naj bo S poljuben incidenčni generator grafa G in naj bo $X = V(G) - S$. Naj bo Y množica tistih vozlišč v X , ki imajo kakšnega soseda v

množici S . Ker množica X inducira kvečjemu eno povezavo, graf G pa je povezan z vsaj tremi vozlišči, velja $|Y| \geq |X| - 1$. Poleg tega ne obstajata dve različni vozlišči $y_1, y_2 \in Y$, ki bi imeli skupnega soseda s v množici S , sicer množica S ne bi razlikovala povezav y_1s in y_2s . Če torej sedaj vsakemu izmed vozlišč v množici Y priredimo poljubnega soseda v množici S , je dobljena preslikava injektivna. Zato velja $n - |S| - 1 = |X| - 1 \leq |Y| \leq |S|$, od koder izpeljemo $|S| \geq \frac{n-1}{2}$. Ker je $|S|$ seveda celo število, velja tudi $|S| \geq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Posledično lahko zapišemo naslednje meje za incidenčno dimenzijo.

Opomba 4.12 Za vsak povezan graf G z $n \geq 3$ vozlišči velja

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq \dim_I(G) \leq n - 1.$$

Spodnjo mejo opombe 4.12 dosežemo za P_n , $n \in \{3, 4, 5, 6, 8\}$, za cikel C_4 , za zvezdo $K_{1,3}$ in nekatere grafe, ki jih dobimo z dodajanjem vozlišča ali povezave na eno od vozlišč iz prej omenjenih primerov. To ni celoten seznam grafov, za katere je dosežena spodnja meja, lahko pa v celoti opišemo grafe, za katere je dosežena zgornja meja iz iste opombe.

Trditev 4.13 Naj bo G povezan graf z n vozlišči in vsaj dvema povezavama. Potem je $\dim_I(G) = n - 1$ natanko tedaj, ko ima vsak par vozlišč iz G skupnega soseda.

Dokaz. Naj bo najprej $\dim_I(G) = n - 1$. Recimo, da obstajata dve različni vozlišči $x, y \in V(G)$, ki nimata skupnega soseda. Potem je množica $V(G) - \{x, y\}$ incidenčni generator za G , kar je protislovje, saj je $|V(G) - \{x, y\}| = n - 2 < n - 1$. Torej je za incidenčni generator najmanjše moči $n - 1$ nujno, da ima vsak par vozlišč iz G skupnega soseda.

Naj sedaj velja, da ima vsak par vozlišč skupnega soseda. Označimo s S incidenčni generator za G . Recimo, da obstajata dve vozlišči x in y , ki nista v S . Naj bo z skupni sosed teh dveh vozlišč. Potem povezavi xz in yz nista razlikovani z nobenim vozliščem iz S , kar je protislovje s tem, da je S incidenčni generator za G . \square

Nadaljujemo s preučevanjem mej iz opombe 4.12. Tokrat nas zanima, ali za vsak par naravnih števil r in n , za kateri velja $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq r \leq n - 1$, obstaja graf G z n vozlišči in $\dim_I(G) = r$.

Trditev 4.14 Za poljubni naravni števili r in n , za kateri velja $1 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq r \leq n - 1$, obstaja graf G z n vozlišči, da je $\dim_I(G) = r$.

Dokaz. Če je $r = 1$, potem je $n = 3$. V tem primeru grafa P_3 in K_3 zadoščata pogojem. Če je $r = 2$, potem je $n \in \{4, 5\}$. V tem primeru grafa P_4 in P_5 zadoščata pogojem. Zato lahko predpostavimo, da je $r \geq 3$.

Naj bo n liho število in $r = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor < n - 1$. Graf $G_{r,n}$ konstruiramo na naslednji način.

- Začnemo s polnim grafom K_r z množico vozlišč $V = \{u_1, \dots, u_r\}$.
- Dodamo $r + 1$ vozlišč w, v_1, \dots, v_r .
- Dodamo povezave $u_i v_i$ za vsak $i \in [r]$ in dodamo še povezavo $w v_1$.

Očitno je število vozlišč v grafu $G_{r,n}$ enako $2r + 1 = n$. Množica V je incidenčni generator za $G_{r,n}$ in je s tem $\dim_I(G_{r,n}) \leq r$. Predpostavimo sedaj, da je $\dim_I(G_{r,n}) < r$, in naj bo S incidenčni generator za $G_{r,n}$. To pomeni, da obstaja vsaj eno tako vozlišče $u_j \in V$, da $u_j \notin S$. Če obstaja še kakšno drugo vozlišče $u_i \in V$, $i \neq j$, da velja $u_i \notin S$, potem obstajata dve povezavi $u_j u_k, u_i u_k$, $k \neq i, j$ (saj $r \geq 3$), ki nista incidenčno razlikovani s S , kar je protislovje. Torej je $V - \{u_j\} \subseteq S$, kar pomeni, da je $|S| = r - 1$ in velja $S = V - \{u_j\}$. Ampak v tem primeru povezavi $w v_1$ in $u_j v_j$ nista incidenčno razlikovani s S , kar je ponovno protislovje. Torej je $\dim_I(G_{r,n}) = r$.

Sedaj obravnavamo še primer, ko je (n sod in $r = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor < n - 1$) ali pa velja $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < r < n - 1$. Konstruiramo graf $G'_{r,n}$ na naslednji način.

- Začnemo s polnim grafom K_r z množico vozlišč $V = \{u_1, \dots, u_r\}$.
- Dodamo $n - r$ vozlišč v_1, \dots, v_{n-r} .
- Dodamo povezave $u_i v_i$ za vsak $i \in [n - r - 1]$.
- Dodamo povezave $v_{n-r} u_i$ za vsak $i \in \{n - r, \dots, r\}$.
- Dodamo povezavo $v_1 v_2$ (ti dve vozlišči vedno obstajata, saj $r < n - 1$).

Očitno je število vozlišč grafa $G'_{r,n}$ enako n . S tem je $\dim_I(G_{r,n}) \leq r$ in množica V je incidenčni generator za $G'_{r,n}$. Predpostavimo, da je $\dim_I(G_{r,n}) < r$ in naj bo S' incidenčna baza za $G'_{r,n}$. Posledično obstaja vsaj eno tako vozlišče $u_j \in V$, da $u_j \notin S'$. Podoben razmislek kot prej nas privede do zaključka, da je $\dim_I(G_{r,n}) = r - 1$ in $S' = V - \{u_j\}$. Ampak v tem obstaja še taka povezava $u_j v_\ell$ za nek $\ell \in [r]$, da povezavi $v_1 v_2$ in $u_j v_\ell$ nista incidenčno razlikovani z S' , kar je protislovje. Torej je $\dim_I(G_{r,n}) = r$.

Na koncu obravnavamo primer, ko je $r = n - 1$. V tem primeru je iskani graf poln graf K_n . S tem je dokaz zaključen. \square

Zanimiva pa je tudi povezava incidenčne dimenzije z ostalimi dimenzijami v grafu. Sledi primerjava $\dim_I(G)$ s povezavno metrično dimenzijo $\dim_e(G)$ in sosednostno dimenzijo $\dim_A(G)$.

Trditve 4.15 *Za vsak graf G brez izoliranih vozlišč velja, da je*

$$\dim_I(G) \geq \max\{\dim_A(G), \dim_e(G)\}.$$

Dokaz. Naj bo S incidenčni generator za G . Naj bosta x in y dve različni vozlišči iz $V(G) - S$. Če $N(x) \cap S = \emptyset$ in $N(y) \cap S = \emptyset$, potem obstajata vsaj dve povezavi xx' in yy' , da velja $x', y' \notin S$, saj G nima izoliranih vozlišč. Torej xx' in yy' nista incidenčno razlikovani z nobenim vozliščem iz S , kar je protislovje s predpostavko. Kar pomeni, da velja $N(x) \cap S \neq \emptyset$ ali $N(y) \cap S \neq \emptyset$. Predpostavimo, da velja $N(x) \cap S = N(y) \cap S$. V tem primeru obstaja vozlišče $w \in N(x) \cap S$, da povezavi xw in yw nista incidenčno razlikovani z nobenim vozliščem iz S , kar je ponovno protislovje s predpostavko. Torej $N(x) \cap S \neq N(y) \cap S$. Posledično je S sosednostni generator za G in $\dim_I(G) \geq \dim_A(G)$.

Ker sta poljubni povezavi e_1, e_2 incidenčni z vsaj dvema različnima vozliščema x in y , pri čemer je vsaj eno od njiju v množici S , velja, da sta povezavi e_1, e_2 razlikovani z x ali z y . Torej je S tudi povezavni metrični generator za G in $\dim_I(G) \geq \dim_e(G)$. S tem je dokaz zaključen. \square

Po [35] vemo, da $\dim_A(K_{r,t}) = r + t - 2$. Iz [38] vemo tudi, da $\dim_e(K_{r,t}) = r + t - 2$. Tako iz trditve 4.9 (iv) sklepamo, da je meja iz trditve 4.15 natančna. V tem primeru imamo enakost $\dim_I(K_{r,t}) = \dim_A(K_{r,t}) = \dim_e(K_{r,t})$.

4.2 Zahtevnost problema dimenzije incidenčnosti

V tem razdelku bomo obravnavali računsko zahtevnost izračuna dimenzije incidenčnosti grafa. V knjigi [21] je bilo navedeno in v [39] formalno dokazano, da je odločitveni problem metrične dimenzije grafa NP-poln. Pokazali bomo, da je tudi odločitveni problem incidenčne dimenzije poljubnega grafa NP-poln. Za to se bomo močno zanašali na povezavno-trikotne grafe. Najprej obravnavajmo naslednji odločitveni problem.

PROBLEM DIMENZIJE INCIDENČNOSTI (krajše problem IDIM)
 NALOGA: Graf G z $n \geq 3$ vozlišči in naravno število $r \in [n - 1]$.
 VPRAŠANJE: Ali velja $\dim_I(G) \leq r$?

Za preučitev zahtevnosti problema IDIM bomo naredili prevedbo s problema 3-SAT, ki je v literaturi eden od najbolj znanih klasičnih NP-polnih problemov. Za več informacij o problemu 3-SAT in prevedljivosti NP-polnih problemov v splošnem predlagamo [21].

Izrek 4.16 *Problem IDIM je NP-poln problem.*

Dokaz. V množici S , ki jo za problem ugane nedeterministični algoritem, moramo pregledati vse pare povezav in preveriti ali je vsak par incidenčno razlikovan z vozliščem iz S . To lahko storimo v polinomskem času, zato je problem IDIM v razredu NP.

Polinomsko prevedbo problema 3-SAT na problem IDIM bomo naredili na naslednji način. Vzemimo poljubno instanco problema 3-SAT, torej končno množico Boolovih spremenljivk $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ in množico stavkov nad temi Boolovimi spremenljivkami $C = \{c_1, \dots, c_m\}$. Konstruirali bomo graf $G = (V, E)$ in določili pozitivno celo število $r \leq |V| - 1$, da bo $\dim_I(G) \leq r$ natanko tedaj, ko je C izpolnjiva. Konstrukcija bo sestavljena iz več komponent in povezav med njimi.

Za vsako spremenljivko $u_i \in U$, $i \in [n]$, konstruiramo komponento $X_i = (V_i, E_i)$, kjer $V_i = \{x_i, y_i, z_i, w_i, T_i, F_i\}$ in $E_i = \{x_i y_i, x_i z_i, y_i z_i, y_i w_i, z_i w_i, w_i T_i, w_i F_i, T_i F_i\}$, glej

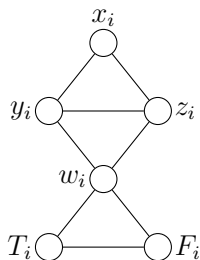
sliko 4.3. Vsaka komponenta je povezana s preostankom grafa prek vozlišča T_i , ki predstavlja vrednost TRUE, in F_i , ki predstavlja vrednost FALSE.

V nadaljevanju dokaza si bomo pomagali z nekaj trditvami.

Trditev 4.17 Naj bo u_i poljubna spremenljivka iz U . Vsak incidenčni generator S mora vsebovati vsaj 4 vozlišča iz pripadajoče komponente. Še več, če obstajajo v S natanko 4 vozlišča, ki so del komponente, potem so $y_i, w_i, z_i \in S$ in $x_i \notin S$.

Dokaz. Predpostavimo na poti do protislovja, da obstaja incidenčni generator S z manj kot 4 vozlišči iz komponente za u_i . Iz tega sledi, da obstaja množica 3 vozlišč $W_i = \{v_1, v_2, v_3\} \subset V_i$, ki niso v S . Naredimo particijo množice V_i na dve množici, in sicer $V_i = \{x_i, y_i, z_i\} \cup \{w_i, T_i, F_i\}$. V eni množici iz particije obstajata vsaj dve vozlišči iz W_i . Ker vsaka množica iz particije tvori trikotnik, obstaja povezava, ki ni v S . To je protislovje s trditvijo 4.7.

Predpostavimo sedaj, da so v množici S natanko 4 vozlišča iz komponente. Če $w_i \notin S$, potem so $T_i, F_i, y_i, z_i \in S$ saj bi sicer imeli protislovje s trditvijo 4.7. Ampak potem $x_i \notin S$ in povezavi $w_i z_i$ in $x_i z_i$ nista razlikovani s S , kar je protislovje. Torej je $w_i \in S$. Če $y_i \notin S$ (oz. $z_i \notin S$), potem je $x_i \in S$ in je $z_i \in S$ (oz. $y_i \in S$) po trditvi 4.7. Očitno je natanko en izmed T_i in F_i v množici S . Če je $T_i \in S$, potem povezavi $F_i w_i$ in $y_i w_i$ (oz. $z_i w_i$) nista razlikovani s S , kar je protislovje. Podobno obravnavamo primer, ko je $F_i \in S$. Torej sta $y_i, z_i \in S$. Če bi še veljalo, da je $x_i \in S$, potem bi za trikotnik $w_i T_i F_i w_i$ imeli protislovje s trditvijo 4.7. Torej $x_i \notin S$. (□)



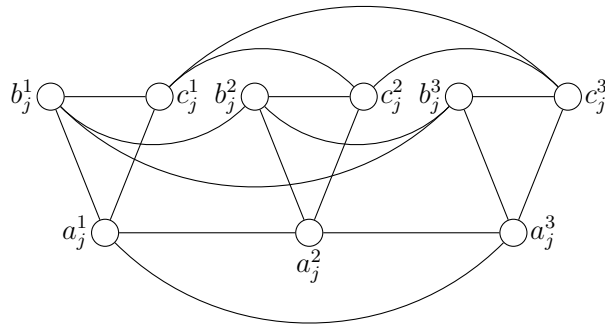
Slika 4.3: Komponenta za spremenljivko u_i .

Za vsaki stavku $c_j = y_j^1 \vee y_j^2 \vee y_j^3$, $j \in [m]$, kjer je y_j^k , $k \in [3]$, literal v stavku c_j , konstruiramo komponento $Y_j = (V_j', E_j')$, kjer je $V_j' = \{a_j^1, b_j^1, c_j^1, a_j^2, b_j^2, c_j^2, a_j^3, b_j^3, c_j^3\}$ in $E_j' = \{a_j^1 b_j^1, a_j^1 c_j^1, b_j^1 c_j^1, a_j^2 b_j^2, a_j^2 c_j^2, b_j^2 c_j^2, a_j^3 b_j^3, a_j^3 c_j^3, b_j^3 c_j^3, a_j^1 a_j^2, a_j^2 a_j^3, a_j^3 a_j^1, b_j^1 b_j^2, b_j^2 b_j^3, b_j^3 b_j^1\}$,

$c_j^1 c_j^2, c_j^2 c_j^3, c_j^3 c_j^1$ (glej sliko 4.4). Opazimo, da je ta komponenta izomorfna kartezičnemu produktu $C_3 \square C_3$.

Trditev 4.18 Naj bo c_j poljuben stavek v C in $Y_j = (V_j', E_j')$ njegova komponenta. Potem mora vsak incidenčni generator S vsebovati vsaj 8 vozlišč iz V_j' .

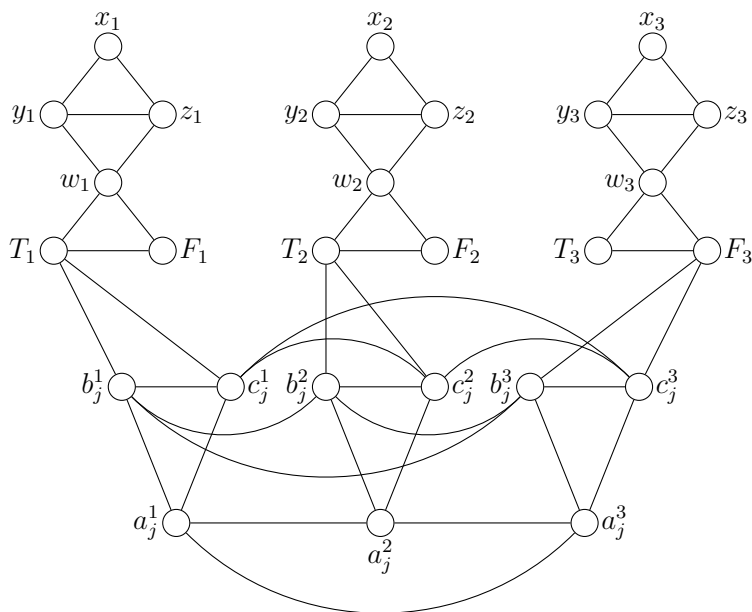
Dokaz. Predpostavimo na poti k protislovju, da obstaja incidenčni generator S z manj kot 8 vozlišči iz komponente za c_j . Iz tega sledi, da obstajata dve vozlišči $x, y \in V_j'$, ki nista v S . Razdalja med vozliščema x in y je 1 ali 2, saj je diameter grafa $C_3 \square C_3$ enak 2. Vsaka povezava iz Y_j je del nekega trikotnika, torej x in y ne moreta biti na razdalji 1 zaradi trditve 4.7. To pomeni, da obstaja tako vozlišče z , da imamo povezavi xz in zy . Ti dve povezavi nista razlikovani z nobenim krajiščem, kar pomeni, da smo prišli do protislovja. \square



Slika 4.4: Komponenta za stavek c_j .

Dodamo tudi nekaj komunikacijskih povezav, da povežemo komponente za spremenljivke u_i s komponentami za stavke c_j . Če se spremenljivka u_i pojavi kot literal y_j^k v stavku $c_j = y_j^1 \vee y_j^2 \vee y_j^3$, potem dodamo naslednje povezave. Če je y_j^k pozitiven literal v stavku c_j , dodamo povezavi $F_i b_j^k$ in $F_i c_j^k$. Če je y_j^k negativen literal v stavku c_j , dodamo povezavi $T_i b_j^k$ in $T_i c_j^k$. Za vsak stavek $c_j \in C$ množico teh 6 dodanih povezav označimo z E_j'' .

Zgled 4.19 Na sliki 4.5 vidimo povezave, ki so bile dodane za stavek $c_j = (\overline{u_1} \vee \overline{u_2} \vee u_3)$, kjer $\overline{u_1}$ predstavlja negativen literal za spremenljivko u_1 in $\overline{u_2}$ predstavlja negativen literal za spremenljivko u_2 .



Slika 4.5: Podgraf, ki je povezan s stavkom $c_j = (\overline{u_1} \vee \overline{u_2} \vee u_3)$.

Konstrukcijo za nalogo IDIM zaključimo tako, da določimo število $r = 4n + 8m$ in graf $G = (V, E)$, kjer je

$$V = \left(\bigcup_{i=1}^n V_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^m V'_j \right)$$

in

$$E = \left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^m E'_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^m E''_j \right).$$

Opisano konstrukcijo lahko zgradimo v polinomskem času. Opazimo, da je graf G povezavno-trikoten.

Če dokažemo, da je C izpolnjiva natanko tedaj, ko je incidenčna dimenzija grafa G manjša ali enaka r , potem bo dokaz NP-polnosti končan.

Iz trditev 4.17 in 4.18 dobimo naslednjo posledico.

Posledica 4.20 Incidenčna dimenzija konstruiranega grafa G je vsaj $r = 4n + 8m$.

Naslednje leme skupaj s posledico 4.20 zaključijo dokaz NP-polnosti problema IDIM.

Lema 4.21 Če je C izpolnjiva, potem je $\dim_I(G) = r$.

Dokaz. Na podlagi resničnostne prireditve, ki je izpolnjiva za množico stavkov C , konstruiramo incidenčni generator S moči r . Naj bo $t : U \rightarrow \{\text{TRUE}, \text{FALSE}\}$ izpolnjiva resničnostna prireditev za C . Za vsak stavek $c_j = y_j^1 \vee y_j^2 \vee y_j^3$ iz C , damo v množico S vozlišča $b_j^k, c_j^k, k \in [3]$. Ker je množica stavkov C izpolnjiva, obstaja literal $y_j^k, k \in [3]$, ki izpolni c_j . Fiksiramo en tak k in damo v S preostali dve vozlišči a_j^ℓ za $\ell \in [3] - \{k\}$. Za vsako Boolovo spremenljivko $u_i \in U$, damo v S vozlišča $\{y_i, z_i, w_i\}$. Če je $t(u_i) = \text{TRUE}$, damo v S tudi vozlišče F_i , če pa je $t(u_i) = \text{FALSE}$ potem pa vozlišče T_i . Moč konstruirane množice S je očitno $r = 4n + 8m$.

Sedaj si pogledjmo množico $X = V(G) - S$. Za vsak $u_i \in U$ je v množici X vozlišče x_i in natanko eno od vozlišč iz množice $\{T_i, F_i\}$. Razdalja med tema dvema vozliščema je enaka 3. Za vsak $c_j \in C$ je v množici X natanko eno od vozlišč a_j^1, a_j^2, a_j^3 . Vozlišče, ki je v X , pripada spremenljivki, ki izpolni c_j . Sledi, da je to vozlišče na razdalji 3 od vseh ostalih vozlišč, ki so v X . Tudi vsi ostali možni pari vozlišč iz množice X so na razdalji 3 ali več. Torej je X pakiranje za G . Ker je graf povezavno-trikoten iz posledice 4.8 sledi, da je S incidenčni generator za G . \square

Lema 4.22 Če je $\dim_I(G) = r$, je množica stavkov C izpolnjiva.

Dokaz. Naj bo S poljuben incidenčni generator za G moči r . Množica S mora po lemah 4.17 in 4.18 vsebovati vsaj 8 vozlišč iz vsake komponente za stavke c_j in vsaj 4 vozlišča iz vsake komponente za spremenljivke u_i . Ker je $|S| = r = 8m + 4n$, velja, da je v S natanko 8 vozlišč iz vsake komponente za stavke c_j in natanko 4 vozlišča iz vsake komponente za spremenljivke u_i . Graf G je povezavno-trikoten, zato iz posledice 4.8 sledi, da je $X = V(G) - S$ pakiranje za G .

Še več, za vsak $i \in [n]$ velja, da je $x_i \in X$, in po trditvi 4.17 velja, da je natanko eno izmed vozlišč T_i, F_i v X . Za vsak $j \in [m]$ je natanko eno izmed vozlišč a_j^1, a_j^2, a_j^3 v X , saj sta b_j^i in $c_j^i, i \in [3]$ v skupnem trikotniku ali s T_ℓ ali s F_ℓ , kjer u_ℓ pripada stavku c_j .

Definirajmo funkcijo, ki izpolni množico stavkov C . Za vsak $i \in [n]$ naj bo $v_i \in \{T_i, F_i\} \cap X$. Funkcijo $t : U \rightarrow \{\text{TRUE}, \text{FALSE}\}$ definiramo kot:

$$t(u_i) = \begin{cases} \text{TRUE}, & v_i = T_i, \\ \text{FALSE}, & v_i = F_i. \end{cases}$$

Pokazati moramo, da je t resničnostna prireditev za C . Naj bo $c_j = y_j^1 \vee y_j^2 \vee y_j^3 \in C$ poljuben stavek in označimo z $u_{j_1}, u_{j_2}, u_{j_3}$ pripadajoče Boolove spremenljivke. Da pokažemo, da ima vsaj eden od njegovih literalov vrednost `TRUE`, vzemimo vozlišče V'_j , ki pripada množici X . V X je natanko eno od vozlišč a_j^1, a_j^2, a_j^3 . Naj bo $a_j^k, k \in [3]$, to vozlišče. Komunikacijske povezave so dodane na tak način, da je a_j^k v pakirni množici X le, če se u_{j_k} pojavi v c_j kot:

- pozitivni literal in je $v_{j_k} = T_{j_k}$;
- negativni literal in je $v_{j_k} = F_{j_k}$.

V obeh primerih je c_j izpolnjen z literalom, ki pripada spremenljivki u_{j_k} . Sledi, da je C izpolnjiva, in s tem je dokaz leme končan. \square

Lemi 4.21 in 4.22 pokažeta, da je opisana konstrukcija polinomska transformacija problema 3-SAT na problem IDIM. Torej je dokaz izreka 4.16 končan. \square

Na koncu poglavja omenimo še, da obstajajo razredi poljubno velikih grafov, za katere je problem rešljiv v polinomskem času. Trditev 4.9 implicira obstoj učinkovitega algoritma za izračun dimenzije incidenčnosti za družine poti, ciklov, polnih grafov in polnih dvodelnih grafov.

5

PAKIRNO KROMATIČNO ŠTEVILO LEKSIKOGRAFSKEGA PRODUKTA

V tem poglavju bomo predstavili meji pakirnega kromatičnega števila leksikografskega produkta $G \circ H$ grafov G in H . Ugotovili bomo, da meji v več primerih sovpadata. Vsebina poglavja je povzeta po članku [8].

5.1 Meji pakirnega kromatičnega števila leksikografskega produkta

V tem razdelku predstavimo zgornjo in spodnjo mejo za pakirno kromatično število leksikografskega produkta. V nadaljevanju bomo potrebovali tudi razdaljo med dvema vozliščema v leksikografskem produktu in njegovo neodvisnostno število. Razdalja je enaka

$$d_G((g_1, h_1), (g_2, h_2)) = \begin{cases} d_G(g_1, g_2) & : g_1 \neq g_2 \\ \min\{2, d_H(h_1, h_2)\} & : g_1 = g_2 \end{cases}. \quad (5.1)$$

Za neodvisnostno število pa velja

$$\alpha(G \circ H) = \alpha(G)\alpha(H), \quad (5.2)$$

glej izrek 1 v članku [24].

Začnemo s spodnjo mejo, kjer uporabimo oznako

$$d(G) = \begin{cases} 1 & : G \cong K_n \\ \text{diam}(G) - 1 & : \text{sicer} \end{cases}.$$

Izrek 5.1 Za poljubna grafa G in H velja

$$\chi_\rho(G \circ H) \geq |G| \cdot |H| - \alpha(G)\alpha(H) - \sum_{i=2}^{\text{diam}(G)-1} \rho_i(G) + d(G).$$

Dokaz. Označimo $\ell = |G| \cdot |H| - \alpha(G)\alpha(H) - \sum_{i=2}^{\text{diam}(G)-1} \rho_i(G) + d(G)$. Naj bo X_1, \dots, X_k particija množice vozlišč $V(G \circ H)$, ki tvori poljubno k -pakirno barvanje grafa $G \circ H$. Po (5.2) imamo v X_1 največ $\alpha(G)\alpha(H)$ vozlišč. Označimo z R_i poljubno $\rho_i(G \circ H)$ -množico za $i \in [\text{diam}(G) - 1]_2$. Po (5.1) velja $|H^g \cap R_i| \leq 1$ za vsak $g \in V(G)$. Torej je v X_i največ $\rho_i(G)$ vozlišč za $i \in [\text{diam}(G) - 1]_2$. Za $i \geq \text{diam}(G)$ je v X_i lahko največ eno vozlišče, saj so vsa vozlišča grafa $G \circ H$ na razdalji največ $\text{diam}(G)$ od vozlišča v X_i . Torej imamo največ $\alpha(G)\alpha(H)$ vozlišč pobarvanih z barvo 1, največ $\rho_i(G)$ vozlišč pobarvanih z barvo i za vsak $i \in [\text{diam}(G) - 1]_2$ in za vsako od preostalih $|G| \cdot |H| - \alpha(G)\alpha(H) - \sum_{i=2}^{\text{diam}(G)-1} \rho_i(G)$ vozlišč potrebujemo eno barvo. Torej velja, da $\chi_\rho(G \circ H) \geq \ell$, saj imamo natanko $d(G)$ barvnih razredov, ki lahko vsebujejo več kot eno vozlišče. \square

Nadaljujemo z zgornjo mejo pakirnega kromatičnega števila leksikografskega produkta.

Izrek 5.2 Naj bosta G in H poljubna grafa in naj bo $k = |H| - \alpha(H)$. Potem velja

$$\chi_\rho(G \circ H) \leq |G| \cdot |H| - \alpha(G)\alpha(H) - \sum_{i=2}^{k+1} \rho_i(G) + k + 1.$$

Dokaz. Označimo $\ell = |G| \cdot |H| - \alpha(G)\alpha(H) - \sum_{i=2}^{k+1} \rho_i(G) + k + 1$. Vemo, da $\alpha(G \circ H) = \alpha(G)\alpha(H)$, in hitro vidimo, da lahko $\alpha(G \circ H)$ -množico zapišemo kot $A_G \times A_H$, kjer je A_G $\alpha(G)$ -množica in je A_H $\alpha(H)$ -množica. Vsa vozlišča v $A_G \times A_H$ pobarvamo z barvo 1. Naj bo $k = |H| - \alpha(H)$. Ostane k G -slojev, v katerih so

vsa vozlišča še nepobarvana. V vsakem od teh slojev $\rho_i(G)$ vozlišč pobarvamo z barvo i , $i \in [k+1]_2$ (ena barva i se uporabi za natanko en sloj). Vsako od preostalih vozlišč pobarvamo s svojo barvo. Imamo torej $\alpha(G)\alpha(H)$ vozlišč pobarvanih z barvo 1, $\rho_i(G)$ vozlišč pobarvanih z barvo i za vsak $i \in [k+1]_2$ in za vsako od preostalih $|G| \cdot |H| - \alpha(G)\alpha(H) - \sum_{i=2}^{k+1} \rho_i(G)$ vozlišč potrebujemo eno barvo. Torej velja $\chi_\rho(G \circ H) \leq \ell$, saj imamo $k+1$ barvnih razredov, ki lahko vsebujejo več kot eno vozlišče. \square

V nadaljevanju pokažemo, da če je število vozlišč grafa H brez njegove $\alpha(H)$ -množice primerljivo z $\text{diam}(G)$, potem obe meji sovpadata.

Izrek 5.3 *Naj bosta G in H poljubna grafa in naj bo $k = |H| - \alpha(H) \geq \text{diam}(G) - 2$. Potem velja*

$$\chi_\rho(G \circ H) = |G| \cdot |H| - \alpha(G)\alpha(H) - \sum_{i=2}^{\text{diam}(G)-1} \rho_i(G) + \text{diam}(G) - 1.$$

Dokaz. Naj bo $k = |H| - \alpha(H)$. Predpostavimo najprej, da je $G \cong K_n$. Po izreku 5.1 velja, da $\chi_\rho(G \circ H) \geq n|H| - \alpha(H) - \sum_{i=2}^0 \rho_i(G) + 1 = n|H| - \alpha(H) + 1$, saj je $d(G) = 1$. Po izreku 5.2 velja $\chi_\rho(G \circ H) \leq n|H| - \alpha(H) - (k+1-2+1) + k+1 = n|H| - \alpha(H) + 1$, saj $\rho_i(G) = 1$ za vsak $i \in [k+1]_2$. Torej enakost velja, če $G \cong K_n$.

Sicer je $G \not\cong K_n$ in $d(G) = \text{diam}(G) - 1$. Po izreku 5.1 velja $\chi_\rho(G \circ H) \geq |G| \cdot |H| - \alpha(G)\alpha(H) - \sum_{i=2}^{\text{diam}(G)-1} \rho_i(G) + \text{diam}(G) - 1$. Ker $k = |H| - \alpha(H) \geq \text{diam}(G) - 1$ in $\rho_i(G) = 1$ za vsak $\text{diam}(G) \leq i \leq k+1$, po izreku 5.2 velja

$$\begin{aligned} \chi_\rho(G \circ H) &\leq |G| \cdot |H| - \alpha(G)\alpha(H) - \left(\sum_{i=2}^{\text{diam}(G)-1} \rho_i(G) + \sum_{i=\text{diam}(G)}^{k+1} \rho_i(G) \right) + k+1 = \\ &= |G| \cdot |H| - \alpha(G)\alpha(H) - \sum_{i=2}^{\text{diam}(G)-1} \rho_i(G) - (k+1 - \text{diam}(G) + 1) + k+1 = \\ &= |G| \cdot |H| - \alpha(G)\alpha(H) - \sum_{i=2}^{\text{diam}(G)-1} \rho_i(G) + \text{diam}(G) - 1. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Torej je

$$\chi_\rho(G \circ H) = |G| \cdot |H| - \alpha(G)\alpha(H) - \sum_{i=2}^{\text{diam}(G)-1} \rho_i(G) + \text{diam}(G) - 1$$

in s tem je dokaz zaključen. \square

Pričakujemo, da bo za majhen $\text{diam}(G)$ pogoj iz izreka 5.3 izpolnjen pogosteje. Natančneje, za $\text{diam}(G) = 1$ je pogoj vedno izpolnjen in imamo

$$\chi_\rho(K_n \circ H) = n \cdot |H| - \alpha(H) + 1,$$

kot smo lahko videli v dokazu prejšnjega izreka. Opazimo še, da je pogoj vedno izpolnjen tudi za $\text{diam}(G) = 2$, saj je vrednost $|H| - \alpha(H)$ vselej nenegativna. Če je $\text{diam}(G) = 3$, potem je $\text{diam}(G \circ H) = 3$ po (5.1) in le barvna razreda X_1 in X_2 lahko imata več kot enega predstavnika. Torej meji izrekov 5.2 in 5.1 ponovno sovpadata, le da tokrat pod pogojem, da obstaja vsaj en G -sloj brez vozlišč iz X_1 . To se zgodi vedno, ko $H \not\cong \overline{K}_n$. Imamo naslednjo posledico.

Posledica 5.4 *Naj bosta G in H poljubna grafa. Če je $\text{diam}(G) = 3$ in $H \not\cong \overline{K}_n$, potem velja*

$$\chi_\rho(G \circ H) = |G| \cdot |H| - \alpha(G)\alpha(H) - \rho_2(G) + 2.$$

5.2 Izboljšava zgornje meje za $G \cong P_n$

Z nadaljevanjem na način iz konca prejšnjega razdelka se vse začne zelo hitro zapletati. To se zgodi, če je $\text{diam}(G) > 3$. Zato si v tem razdelku pogledimo, kakšna je zgornja meja pakirnega kromatičnega števila leksikografskega produkta, če je prvi graf iz družine grafov z velikim diametrom, natančneje $G \cong P_n$ za neko naravno število n . Naslednji izrek je izboljšava zgornje meje izreka 5.2.

Izrek 5.5 *Naj bo H poljuben graf in n naravno število. Če je $k = |H| - \alpha(H)$, potem*

velja

$$\chi_\rho(P_n \circ H) \leq n|H| - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \alpha(H) - \sum_{i=2}^{k+1} \left\lceil \frac{n}{i+1} \right\rceil - \sum_{j=k+2}^{|H|+1} \left(\left\lceil \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor + 1} \right\rceil + 1 \right) + |H| + 1.$$

Dokaz. Naj bo $P_n = v_1 \dots v_n$ in A_H $\alpha(H)$ -množica. Očitno je $A_{P_n} = \{v_{2i-1} : i \in [\lfloor \frac{n}{2} \rfloor]\}$ $\alpha(P_n)$ -množica in je $A = A_{P_n} \times A_H$ $\alpha(P_n \circ H)$ -množica. Najprej pobarvamo vozlišča s $k+1$ barvami tako kot v dokazu izreka 5.2. Za to porabimo

$$\ell = n|H| - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \alpha(H) - \sum_{i=2}^{k+1} \left\lceil \frac{n}{i+1} \right\rceil + k + 1$$

barv, saj je $\rho_i(P_n) = \left\lceil \frac{n}{i+1} \right\rceil$.

V vsakem od G^h -slojev, $h \in A_H$, obstaja $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ še nepobarvanih vozlišč. Razdalja med poljubnima takima dvema je sodo število. Označimo ta vozlišča z $B^h = (V(P_n) - A_{P_n}) \times \{h\}$. Dodatno bomo še z barvo j , $k+2 \leq j \leq |H|+1$, pobarvali nekaj vozlišč v natanko enem od G^h -slojev, $h \in A_H$. Označimo z G_j^h G^h -sloj, $h \in A_H$, ki vsebuje vozlišča pobarvana z barvo j , $k+2 \leq j \leq |H|+1$. Največja razdalja med poljubnima vozliščema iz B^h je enaka $2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2$. Opazimo, da morata biti dve vozlišči pobarvani z barvo j na razdalji vsaj $p_j = 2 \lfloor \frac{j}{2} \rfloor + 2$, saj je vsako drugo vozlišče v G_j^h -sloju, $h \in A_H$, $k+2 \leq j \leq |H|+1$, že pobarvano (z barvo 1). Torej lahko z barvo j pobarvamo vsa vozlišča iz množice

$$\left\{ (v_{2+sp_j}, h) : s \in \left[\left\lceil \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor + 1} \right\rceil \cup \{0\} \right] \right\}.$$

To pomeni, da lahko v G_j^h -sloju, $h \in A_H$, $t_j = \left(\left\lceil \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor + 1} \right\rceil + 1 \right)$ vozlišč pobarvamo z barvo j , $k+2 \leq j \leq |H|+1$.

Za barvanje $P_n \circ H$ po izreku 5.2 porabimo ℓ barv. Dodatno je t_j vozlišč v G_j^h pobarvano z barvo j , $k+2 \leq j \leq |H|+1$. To pomeni, da velja

$$\chi_\rho(P_n \circ H) \leq \ell - \sum_{j=k+2}^{|H|+1} t_j + |H| - k,$$

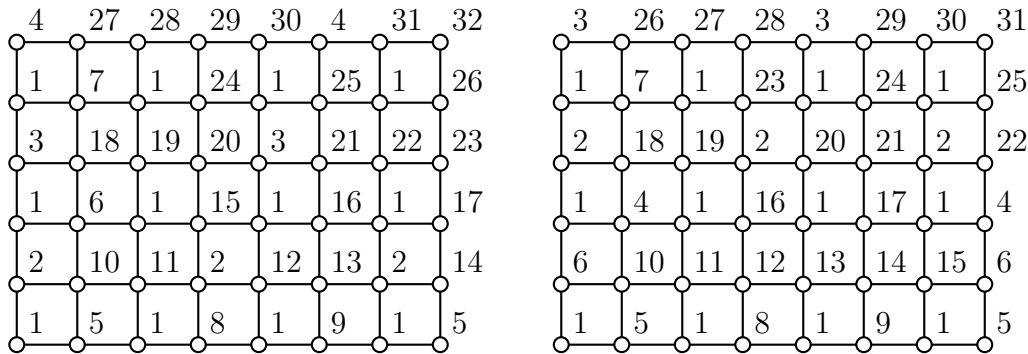
kar zaključimo dokaz. □

Za $H \cong K_m$ imamo $\alpha(H) = 1$ in $k = m - 1$. Druga vsota v izreku 5.5 ima le en člen in sicer za $j = |H| + 1$. Tako dobimo naslednjo posledico.

Posledica 5.6 Naj bosta n in m naravni števili. Velja

$$\chi_\rho(P_n \circ K_m) \leq nm - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \sum_{i=2}^m \left\lfloor \frac{n}{i+1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1}{\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor + 1} \right\rfloor + m.$$

Zgled 5.7 Na sliki 5.1 je primer $P_8 \circ P_6$, kjer zaradi preglednosti niso narisane vse povezave. Po izreku 5.1 dobimo $\chi_\rho(P_8 \circ P_6) \geq 31$, izrek 5.2 pa nam zagotovi, da je $\chi_\rho(P_8 \circ P_6) \leq 33$. Z načinom barvanja, ki je opisan v dokazu izreka 5.5, za barvanje grafa $P_8 \circ P_6$ porabimo 32 barv, glej levo stran slike. Isti graf pa lahko pobarvamo tudi z 31 barvami, torej velja $\chi_\rho(P_8 \circ P_6) \leq 31$, glej desno stran slike. Torej zgornja meja iz izreka 5.5 v splošnem ni najboljša možna. Iz opisanega sledi, da je $\chi_\rho(P_8 \circ P_6) = 31$.



Slika 5.1: Pakirno barvanje za $P_8 \circ P_6$ z uporabo 32 barv po izreku 5.5 (a) in z uporabo 31 barv (b) (zaradi preglednosti niso narisane vse povezave grafa).

Še en takšen primer konstruiramo na naslednji način. Naj bo $n_t = 1 + v(2, 3, \dots, t + 1)$, kjer $v(2, 3, \dots, t + 1)$ označuje najmanjši skupni večkratnik števil $2, 3, \dots, t + 1$, naj bo $H \cong \bar{K}_m$ graf in $k = |H| - \alpha(H)$. Opazimo, da je število n_t izbrano na tak način, da vsaka $\rho_i(P_{n_t})$ -množica, $1 \in [t]$, vsebuje prvo in zadnje vozlišče poti P_{n_t} . Če $t - 1 > k$, potem v $P_{n_t} \circ H$ za nek $i \in [t]_2$, ne moremo pobarvati vseh $\rho_i(P_{n_t})$ vozlišč z barvo i . S tem vidimo, da zgornja meja izreka 5.5 ni natančna za $\chi_\rho(P_{n_t} \circ H)$.

6

UČINKOVITA ODPRTA DOMINACIJA V PRODUKTIH DIGRAFOV

Poglavje vsebuje rezultate o učinkoviti odprti dominaciji v štirih standardnih produktih digrafov: kartezičnem, krepkem, direktnem in leksikografskem produktu. Učinkovito odprto dominantna množica (di)grafa G je celotno dominantna množica (di)grafa G , ki je hkrati tudi odprto pakiranje za G . Usmerjeno pot na n vozliščih bomo označili s \vec{P}_n , usmerjen cikel na n vozliščih pa s \vec{C}_n . Vsebina poglavja je povzeta po članku [6].

6.1 Kartezični produkt

Prvi razdelek namenimo učinkoviti odprti dominaciji v kartezičnem produktu digrafov. Za dan digraf D in množico $A \subseteq V(D)$ pravimo, da je $S_A \subseteq V(D)$ učinkovito odprto dominantna množica le za (krajše EOD množica le za) digraf $D - A$, če ima vsako vozlišče iz $V(D) - A$ natanko enega vhodnega soseda v S_A in dodatno velja še, da je $A \cap N_D^+(S_A) = \emptyset$. Začnemo z definicijo k -EOD po poteh in ciklične razdeljivosti digrafa.

Definicija 6.1 Naj bo F digraf in $S_1, \dots, S_k \subseteq V(F)$. Če je za vsak $i \in [k]$ množica S_i EOD množica le za $F - S_{i-1}$, kjer $S_0 = \emptyset$, potem pravimo, da je F k -EOD po poteh razdeljivo. Če je za vsak $i \in [k]$ množica S_i EOD množica le za $F - S_{i-1}$, kjer $S_0 = S_k$, potem pravimo, da je F k -EOD ciklično razdeljivo. Množice S_1, \dots, S_k imenujemo k -EOD po poteh oziroma k -EOD ciklično razdeljive množice digrafa F .

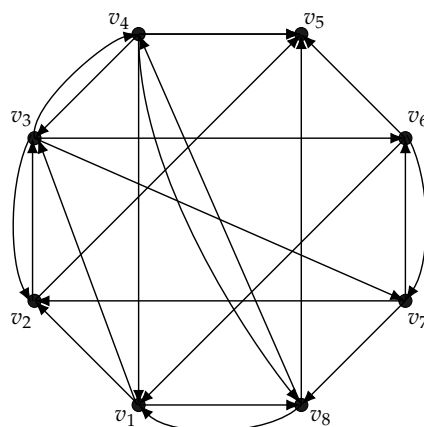
Opazimo, da je vsak k -EOD po poteh razdeljiv digraf tudi EOD digraf, saj je S_1 EOD-množica le za $F - S_0 = F$. Torej je EOD digraf F z EOD množico S_1 1-EOD po poteh razdeljiv. Velja tudi, da če je digraf F n -EOD po poteh razdeljiv, potem je tudi m -EOD po poteh razdeljiv za vsako $m \leq n$. Naj bo F usmerjen cikel, ki je EOD digraf z EOD množico $S = V(F)$. Če določimo, da velja $S_{2i-1} = V(F)$ in $S_{2i} = \emptyset$, potem je F k -EOD po poteh razdeljiv za vsako naravno število k . Za digraf F , ki je k -EOD po poteh razdeljiv, se lahko tudi zgodi, da velja $S_i \cap S_j \neq \emptyset$, glej primer na sliki 6.1.

Z naslednjim primerom poudarimo bogato strukturo n -EOD po poteh (ali ciklično) razdeljivih digrafov. Pokazali bomo, da je vsak digraf lahko induciran poddigraf nekega n -EOD po poteh (ali ciklično) razdeljivega digrafa. Poln digraf K_n med vsakim parom različnih vozlišč vsebuje par nasprotno usmerjenih povezav. Naj bo $V(K_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Digraf K_n^- dobimo iz K_n z brisanjem vseh usmerjenih povezav (v_{i+1}, v_i) , $i \in [n-1]$. Za podan digraf F konstruiramo n -EOD po poteh razdeljiv digraf F^+ na naslednji način. Vzamemo eno kopijo digrafa F in dve kopiji digrafa K_n^- , pri čemer prva kopija vsebuje vozlišča $V_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$, druga pa vozlišča $V_2 = \{v'_1, \dots, v'_n\}$. Množica povezav digrafa F^+ vsebuje $A(F)$, vse usmerjene povezave obeh kopij digrafa K_n^- , vse povezave oblike (v_i, v'_i) ali (v'_i, v_i) za $i \in [n]$, vse povezave iz množice $\{(v_i, f) : v_i \in V_1, f \in V(F)\}$ in poljubno podmnožico množice $\{(f, v_i) : f \in V(F), v_i \in V_1\} \cup \{(f, v'_i) : f \in V(F), v'_i \in V_2\}$. Hitro opazimo, da je F^+ n -EOD po poteh razdeljiv digraf z n -EOD po poteh razdeljivimi množicami $S_i = \{v_i, v'_i\}$ za vsak $i \in [n]$.

Tudi za n -EOD ciklično razdeljive digrafe lahko naredimo podobno konstrukcijo. Vse, kar moramo narediti, je, da iz F^+ odstranimo povezavi (v_1, v_n) in (v'_1, v'_n) . Velja tudi, da če je F n -EOD ciklično razdeljiv digraf, potem je tudi kn -EOD ciklično razdeljiv digraf, kjer se n -EOD ciklično razdeljive množice ciklično ponovijo k -krat.

Zgled 6.2 Na sliki 6.1 je prikazan primer 4-EOD po poteh razdeljivega digrafa.

V nadaljevanju pokažemo, da je n -EOD po poteh razdeljivost bistvenega pomena za EOD kartezični produkt $\vec{P}_n \square F$.



Slika 6.1: 4-EOD po poteh razdeljiv digraf, pri čemer je $S_1 = \{v_3, v_4\}$, $S_2 = \{v_6, v_7\}$, $S_3 = \{v_1, v_8\}$, $S_4 = \{v_2, v_3\}$ in velja $S_1 \cap S_4 = \{v_3\}$.

Izrek 6.3 Naj bo F poljuben digraf. Kartezični produkt $\vec{P}_n \square F$ je EOD digraf natanko tedaj, ko je F n -EOD po poteh razdeljiv digraf.

Dokaz. Naj bo $\vec{P}_n = v_1 \dots v_n$ usmerjena pot, kjer je v_1 izvor in v_n ponor, in naj bo F poljuben digraf.

Najprej predpostavimo, da je F n -EOD po poteh razdeljiv digraf. Označimo s S_1, \dots, S_n podmnožice množice $V(F)$, ki ustrezajo pogoju n -EOD po poteh razdeljivosti. Pokazali bomo, da je $S = \cup_{i=1}^n (\{v_i\} \times S_i)$ EOD množica za $\vec{P}_n \square F$, kar pomeni, da za vsak $i \in [n]$ in $u \in V(F)$ velja $|N^-(v_i, u) \cap S| = 1$. Za vsak (v_1, u) velja, da je $|N^-(v_1, u) \cap S| \geq 1$, saj je S_1 EOD množica za F in je s tem $\{v_1\} \times S_1$ EOD množica za $(\vec{P}_n \square F)[F^{v_1}] \cong F$. Ker je v_1 izvor poti \vec{P}_n , ne obstajajo nobeni drugi vhodni sosedi vozlišč iz F^{v_1} razen tisti, ki so že v F^{v_1} . Torej velja, da je $|N^-(v_1, u) \cap S| = 1$. Sedaj si pogledajmo še vozlišča (v_i, u) za $i \in [n]_2$ in $u \in V(F)$. Če je $u \in S_{i-1}$, potem ima (v_i, u) vhodnega soseda v $\{v_{i-1}\} \times S_{i-1} \subset S$. Če je $u \in V(F) - S_{i-1}$, potem ima (v_i, u) vhodnega soseda v $\{v_i\} \times S_i \subset S$. Ti sosedi iz S so enolično določeni, saj je S_i EOD množica le za $F - S_{i-1}$ in je $N_F^+(S_i) \cap S_{i-1} = \emptyset$. Torej je S EOD množica za $\vec{P}_n \square F$ in s tem je $\vec{P}_n \square F$ EOD digraf.

Predpostavimo sedaj, da je $\vec{P}_n \square F$ EOD digraf in naj bo S njegova EOD množica. Naj velja še, da je $S_i = p_F(S \cap F^{v_i})$ za $i \in [n]$, in naj bo $S_0 = \emptyset$. Vsako vozlišče iz F^{v_1} mora imeti natanko enega vhodnega soseda v $\{v_1\} \times S_1$, saj je v_1 izvor poti \vec{P}_n . Torej je S_1 EOD množica le za $F - S_0 = F$, saj je $N_F^+(S_1) \cap S_0 = \emptyset$. Naj bo sedaj

$i > 1$. Vozlišča iz $\{v_i\} \times S_{i-1}$ imajo vhodne sosede v $\{v_{i-1}\} \times S_{i-1}$ in tako nimajo vhodnih sosedov v $\{v_i\} \times S_i$, kar pomeni, da je $N_F^+(S_i) \cap S_{i-1} = \emptyset$. Po drugi strani morajo vsa vozlišča iz F^{v_i} imeti vhodnega soseda v $\{v_i\} \times S_i$, saj je S EOD množica za $\vec{P}_n \square F$. Kar pomeni, da je S_i EOD množica le za $F - S_{i-1}$. Množice S_1, \dots, S_n so torej iskane množice za n -EOD po poteh razdeljivosti digrafa F . \square

Z n -EOD ciklično razdeljivostjo lahko opišemo vse EOD digrafe $\vec{C}_n \square F$.

Izrek 6.4 *Naj bo F poljuben digraf. Kartezični produkt $\vec{C}_n \square F$ je EOD digraf natanko tedaj, ko je F n -EOD ciklično razdeljiv digraf.*

Dokaz. Naj bo $\vec{C}_n = c_1 \dots c_n$ usmerjen cikel in naj bo F poljuben digraf.

Najprej predpostavimo, da je F n -EOD ciklično razdeljiv digraf. Označimo s S_1, \dots, S_n podmnožice od $V(F)$, ki ustrezajo n -EOD ciklični razdeljivosti. Spomnimo se, da je $S_0 = S_n$. Pokazali bomo, da je $S = \cup_{i=1}^n (\{c_i\} \times S_i)$ EOD množica za $\vec{C}_n \square F$, kar pomeni, da za vsak $i \in [n]$ in $u \in V(F)$ velja $|N^-(c_i, u) \cap S| = 1$. Naj bo (c_i, u) poljubno vozlišče za $i \in [n]$ in $u \in V(F)$. Če je $u \in S_{i-1}$, potem ima (c_i, u) vhodnega soseda v $\{c_{i-1}\} \times S_{i-1} \subset S$. Če je $u \in V(F) - S_{i-1}$, potem ima (c_i, u) vhodnega soseda v $\{c_i\} \times S_i \subset S$. Ti sosedi iz S so enolično določeni, saj je S_i EOD množica le za $F - S_{i-1}$ in je $N_F^+(S_i) \cap S_{i-1} = \emptyset$. Torej je S EOD množica za $\vec{C}_n \square F$ in s tem je $\vec{C}_n \square F$ EOD digraf.

Predpostavimo sedaj, da je $\vec{C}_n \square F$ EOD digraf in naj bo S njegova EOD množica. Naj velja še, da je $S_i = p_F(S \cap F^{c_i})$ za $i \in [n]$, in naj bo $S_0 = S_n$. Vozlišča iz $\{c_i\} \times S_{i-1}$, $i \in [n]$, imajo vhodne sosede v $\{c_{i-1}\} \times S_{i-1}$ in tako nimajo vhodnih sosedov v $\{c_i\} \times S_i$, kar pomeni, da je $N_F^+(S_i) \cap S_{i-1} = \emptyset$. Po drugi strani pa morajo vsa vozlišča iz F^{c_i} imeti vhodnega soseda v $\{c_i\} \times S_i$, saj je S EOD množica za $\vec{C}_n \square F$. Kar pomeni, da je S_i EOD množica le za $F - S_{i-1}$. Množice S_1, \dots, S_n so torej iskane množice za n -EOD ciklično razdeljivost digrafa F . \square

V nadaljevanju razdelka se osredotočimo na različno orientirane poti. Začnemo z izrekom za poti, ki so orientirane tako, da imajo natanko en izvor stopnje dve.

Izrek 6.5 Naj bo D digraf z enim samim izvorom v_k , $1 < k < n$, in s temeljnim grafom $P_n = v_1 \dots v_n$. Naj bo še $m = \max\{k, n - k + 1\}$ in naj bo F poljuben digraf. Kartezični produkt $D \square F$ je EOD digraf natanko tedaj, ko je F m -EOD po poteh razdeljiv digraf.

Dokaz. Naj bo v_k edini izvor digrafa D . Tako je $P' = v_k v_{k-1} \dots v_1$ usmerjena pot na k vozliščih, kjer je v_k izvor in v_1 ponor, in je $P'' = v_k v_{k+1} \dots v_n$ usmerjena pot na $n - k + 1$ vozliščih, kjer je v_k izvor in v_n ponor. Naj bo $m = \max\{k, n - k + 1\}$. Če je F m -EOD po poteh razdeljiv z množicami S_i , $i \in [m]$, potem je F tudi k -EOD po poteh razdeljiv z množicami S_i , $i \in [k]$, in tudi $(n - k + 1)$ -EOD po poteh razdeljiv z množicami S_i , $i \in [n - k + 1]$. Množica $S(k) = \cup_{i=1}^k (\{v_i\} \times S_{k-i+1})$ je EOD množica za $P' \square F$ in množica $S(n - k + 1) = \cup_{i=k}^n (\{v_i\} \times S_{i-k+1})$ je EOD množica za $P'' \square F$, kar smo pokazali v dokazu izreka 6.3. Očitno je $S = S(k) \cup S(n - k + 1)$ EOD množica za $D \square F$, saj je $F^{v_k} \cap S(k) = F^{v_k} \cap S(n - k + 1)$. S tem je $D \square F$ EOD digraf.

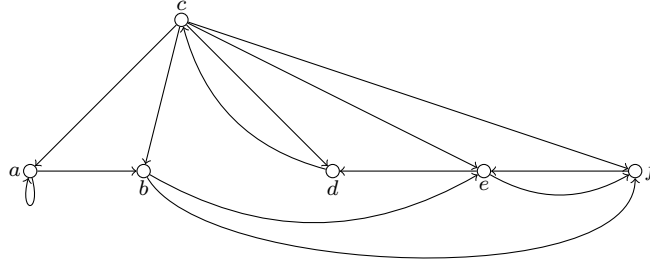
Sedaj predpostavimo, da je $D \square F$ EOD digraf in naj bo S njegova EOD množica. Tudi digrafa $P' \square F$ in $P'' \square F$ sta EOD digrafa, saj je v_k izvor. Po izreku 6.3 je F k -EOD po poteh razdeljiv in $(n - k + 1)$ -EOD po poteh razdeljiv digraf. Torej je F tudi m -EOD po poteh razdeljiv za $m = \max\{k, n - k + 1\}$. \square

Preden nadaljujemo z obravnavanjem poti, ki so orientirane tako, da imajo natanko en ponor stopnje dve, potrebujemo še naslednjo definicijo.

Definicija 6.6 Naj bo F k -EOD in ℓ -EOD po poteh razdeljiv digraf. Pravimo, da je F k, ℓ -ponorno povezljiv, če obstajajo takšne k -EOD po poteh razdeljive množice S_1, \dots, S_k in ℓ -EOD po poteh razdeljive množice S'_1, \dots, S'_ℓ , da je $S_k \cap S'_\ell = \emptyset$, in obstaja takšna množica $S_0 \subseteq V(F)$, ki je EOD množica le za $F - (S_k \cup S'_\ell)$.

Zgled 6.7 Na sliki 6.2 je prikazan primer 2,3-EOD ponorno povezljivega digrafa. Velja, da je $S_1 = \{c, d\}$, $S_2 = \{a, b\}$, $S'_1 = \{c, d\}$, $S'_2 = \{a, b\}$ in $S'_3 = \{d, e, f\}$. Presek množic S_2 in S'_3 je prazen, $F - (S_2 \cup S'_3) = \{c\}$ in $S_0 = \{d\}$.

Izrek 6.8 Naj bo D digraf z enim samim ponorom v_k , $1 < k < n$, in s temeljnim grafom $P_n = v_1 \dots v_n$ ter naj bo F poljuben digraf. Kartezični produkt $D \square F$ je EOD digraf natanko tedaj, ko je F $(k - 1), (n - k)$ -ponorno povezljiv.



Slika 6.2: 2,3-EOD ponorno povezljiv digraf.

Dokaz. Naj bo F poljuben digraf in naj bo D digraf s temeljnim grafom $P_n = v_1 \dots v_n$, pri čemer naj bo v_k , $1 < k < n$, njegov edini ponor. To pomeni, da sta v_1 in v_n edina izvora digrafa D .

Najprej predpostavimo, da je F $(k-1)$, $(n-k)$ -ponorno povezljiv. To pomeni, da obstajajo takšne množice S_1, \dots, S_{k-1} , ki ustrezajo $(k-1)$ -EOD po poteh razdeljivosti digrafa F , in tudi takšne množice $S_n, S_{n-1}, \dots, S_{k+1}$, ki ustrezajo $(n-k)$ -EOD po poteh razdeljivosti digrafa F . Velja še, da je $S_{k-1} \cap S_{k+1} = \emptyset$ in da obstaja množica $S_k \subseteq V(F)$, ki je EOD množica le za $F - (S_{k-1} \cup S_{k+1})$. Naj bo $A = \cup_{i=1}^{k-1} (\{v_i\} \times S_i)$ in $B = \cup_{j=k+1}^n (\{v_j\} \times S_j)$. Pokazali bomo, da je $S = A \cup B \cup (\{v_k\} \times S_k)$ EOD množica za $D \square F$. Naj bosta $Q = v_1 \dots v_{k-1}$ in $R = v_n v_{n-1} \dots v_{k+1}$ dve usmerjeni poti v D . Po izreku 6.3 sta $Q \square F$ in $R \square F$ EOD digrafa z EOD množicama A in B . Nobeno vozlišče iz F^{v_k} ni vhodni sosed vozlišč iz $Q \square F$ in $R \square F$, saj je v_k ponor. Torej v S obstaja natanko en vhodni sosed za vsako vozlišče iz $Q \square F$ in $R \square F$. Tako moramo preveriti le vozlišča (v_k, f) za vsak $f \in V(F)$. Če je $f \in S_{k-1}$, potem je $(v_{k-1}, f) \in S$ vhodni sosed od (v_k, f) . To je tudi edini vhodni sosed od (v_k, f) iz množice S , saj $(v_{k+1}, f) \notin S$, ker je $S_{k-1} \cap S_{k+1} = \emptyset$ in ker je S_k EOD množica le za $F - (S_{k-1} \cup S_{k+1})$. Analogno pokažemo, da tudi za $f \in S_{k+1}$ velja, da ima vozlišče (v_k, f) natanko enega vhodnega soseda v S . Zato naj bo $f \in V(F) - (S_{k-1} \cup S_{k+1})$. Očitno (v_k, f) nima nobenega vhodnega soseda iz S , ki bi bil v $F^{v_{k-1}}$ ali v $F^{v_{k+1}}$. Ker je S_k EOD množica le za $F - (S_{k-1} \cup S_{k+1})$, obstaja natanko en vhodni sosed $x \in S_k$ vozlišča f in s tem je (v_k, x) edini vhodni sosed vozlišča (v_k, f) , ki je v S . Množica S je torej EOD množica digrafa $D \square F$.

Predpostavimo sedaj, da je $D \square F$ EOD digraf in naj bo S njegova EOD množica. Za usmerjeni poti $Q = v_1 \dots v_{k-1}$ in $R = v_n v_{n-1} \dots v_{k+1}$ velja, da sta $Q \square F$ in $R \square F$ EOD digrafa. Po izreku 6.3 velja, da so množice $S_i = p_F(S \cap F^{v_i})$, $i \in [k-1]$, $(k-1)$ -

EOD po poteh razdeljive množice, množice $S_j = p_F(S \cap F^{v_j})$, $j \in \{k+1, \dots, n\}$ pa so (v obratnem vrstnem redu) $(n-k)$ -EOD po poteh razdeljive množice. Če je $f \in S_{k-1} \cap S_{k+1}$, potem ima (v_k, f) v množici S dva vhodna soseda (v_{k-1}, f) in (v_{k+1}, f) , kar je protislovje. Velja torej, da je $S_{k-1} \cap S_{k+1} = \emptyset$. Naj bo $S_k = p_F(S \cap F^{v_k})$ in f poljubno vozlišče iz $V(F) - (S_{k-1} \cup S_{k+1})$. Vozlišče (v_k, f) ima enega vhodnega soseda v množici $\{v_k\} \times S_k$, ker je S EOD množica. Vozlišče (v_k, f') , $f' \in S_{k-1} \cup S_{k+1}$, nima vhodnega soseda v $\{v_k\} \times S_k$, saj ima svojega enoličnega vhodnega soseda iz S ali iz $\{v_{k-1}\} \times S_{k-1}$ ali iz $\{v_{k+1}\} \times S_{k+1}$. Torej je S_k EOD množica le za $V(F) - (S_{k-1} \cup S_{k+1})$ in je digraf $F(k-1)$, $(n-k)$ -ponorno povezljiv. \square

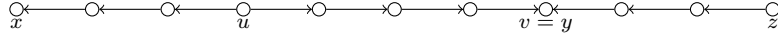
Vprašamo se, kako je z digrafi, katerih temeljni graf je izomorfen poti ali ciklu, in imajo več izvorov in ponorov stopnje 2. Očitno velja, da za vsakim ponorom nekje sledi izvor in za vsakim izvorom nekje sledi ponor. V primeru, ko imamo ponor v stopnje 2 v digrafu D , mora biti digraf F po izreku 6.8 k, ℓ -ponorno povezljiv, če želimo, da je njun kartezični produkt EOD digraf. Tukaj sta $k+1$ in $\ell+1$ razdalji do izvorov, ki so najbližji vozlišču v . Ta pogoj pa ni vedno dovolj. Naj bosta x in y dva ponora in u izvor med njima. Po izreku 6.8 je digraf F k_1, ℓ_1 -ponorno povezljiv, pri čemer je k_1+1 razdalja med u in x , in je tudi k_2, ℓ_2 -ponorno povezljiv, pri čemer je k_2+1 razdalja med u in y . Pravimo, da je F k_1, k_2 -izvorno povezljiv, če je $S_1 = S'_1$. Množice S_1, \dots, S_{k_1} so ustrezne k_1 -EOD po poteh razdeljive množice za k_1, ℓ_1 -ponorno povezljivost, množice S'_1, \dots, S'_{k_2} pa k_2 -EOD po poteh razdeljive množice za k_2, ℓ_2 -ponorno povezljivost. Če lahko zagotovimo ponorno povezljivost za vsak ponor in tudi izvorno povezljivost za vsak izvor digrafa F , potem je $D \square F$ EOD digraf. Tukaj je temeljni graf digrafa D enak P_k ali C_k z več kot enim izvorom ali ponorom stopnje 2. Ker je dokaz zelo podoben prejšnjim, formalni zapis pa problematičen (odvisen je od tega, kakšne vrste so vozlišča stopnje 1 v D), ga izpustimo.

Zgled 6.9 Na sliki 6.3 je primer digrafa F , katerega temeljni graf je pot P_n , ki ima dva izvora u in z ter dva ponora x in $v = y$. Za ponor v velja, da je $d(z, v) = 3$ in $d(u, v) = 4$, torej mora biti po izreku 6.8 digraf F 2, 3-ponorno povezljiv, če želimo, da je kartezični produkt te poti in digrafa F EOD digraf. Za ponor x velja, da je $d(u, x) = 3$. Ponovno mora po izreku 6.8 tudi za ponor x veljati, da je digraf F 2, ℓ_1 -ponorno povezljiv, pri čemer

je $\ell_1 + 1$ razdalja od izvora različnega od u , ki je najbližje ponoru x , do ponora x (v našem primeru tak izvor ne obstaja, torej je $\ell_1 = 0$). Dodatno mora veljati še, da je za ponor $y = v$ digraf F 3, ℓ_2 -ponorno povezljiv, kjer je $\ell_2 + 1$ razdalja od izvora različnega od u , ki je najbližje ponoru y , do ponora y (v našem primeru je to izvor z in velja, da je $\ell_2 = 2$). Hkrati še mora za izvor u veljati, da se 2-EOD po poteh razdeljivost in 3-EOD po poteh razdeljivost začneta z isto množico, to je $S_1 = S'_1$.

Na sliki 6.2 je prikazan primer digrafa H , ki je 2, 3-EOD ponorno povezljiv za v , 2, 0-EOD ponorno povezljiv za x in 3, 2-EOD ponorno povezljiv za y . Hkrati pa velja tudi, da je $S_1 = S'_1$, kar pomeni, da je F tudi 2, 3-EOD izvorno povezljiv.

Tako je kartezični produkt digrafa na sliki 6.3 in digrafa H na sliki 6.2 EOD digraf.



Slika 6.3: Pot z izvoroma u in z in ponoroma x in $v = y$.

Razdelek zaključimo z obravnavo kartezičnega produkta, katerega en faktor ima za temeljni graf zvezdo $K_{1,n}$. Orientirana je tako, da je vozlišče stopnje n izvor, vsa ostala pa so ponori.

Izrek 6.10 Naj bo D digraf s temeljnim grafom $K_{1,n}$ in množico vozlišč $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$, kjer je $\delta_D^+(v_0) = n$, in naj bo F poljuben digraf. Kartezični produkt $D \square F$ je EOD digraf natanko tedaj, ko je F 2-EOD po poteh razdeljiv digraf.

Dokaz. Naj bo D digraf s temeljnim grafom $K_{1,n}$ in množico vozlišč $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$, kjer je $\delta_D^+(v_0) = n$, kar pomeni, da je vozlišče v_0 izvor. Očitno velja, da je $\delta_D^-(v_i) = 1$, $i \in [n]$. Torej je vozlišče v_i ponor za vsak $i \in [n]$. Naj bo F poljuben digraf. Označimo z A množico vozlišč digrafa $D \square F$.

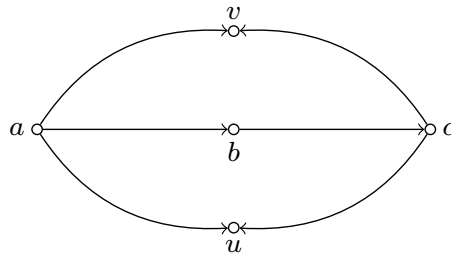
Predpostavimo najprej, da je F 2-EOD po poteh razdeljiv z množicama S_1 in S_2 . Pokazali bomo, da je $S = (\{v_0\} \times S_1) \cup (\cup_{i=1}^n \{v_i\} \times S_2)$ EOD množica za $D \square F$, kar pomeni, da je $|N^-((e, f)) \cap S| = 1$ za vsak $(e, f) \in A$. Za vsako vozlišče $(v_0, f) \in A$ velja, da je $|N^-((v_0, f)) \cap S| \geq 1$, ker je S_1 EOD množica za F . Tako je $\{v_0\} \times S_1$ EOD množica za $(D \square F)[F^{v_0}] \cong F$. Razen vhodnih sosedov iz F^{v_0} ne obstajajo nobeni drugi vhodni sosedi vozlišč iz F^{v_0} . Torej je $|N^-((v_0, f)) \cap S| = 1$. Naj bo sedaj $(v_i, f) \in A$, $i \in [n]$. Vozlišča iz $\{v_0\} \times S_1$ so vhodni sosedi vseh vozlišč iz $\{v_i\} \times S_1$.

Ker je F 2-EOD po poteh razdeljiv, so vozlišča iz $\{v_i\} \times S_2$ vhodni sosedi vseh vozlišč iz $\{v_i\} \times (V(F) - S_1)$. Velja torej, da je $|N^-((v_i, f)) \cap S| \geq 1$. Po definiciji 2-EOD po poteh razdeljivosti velja, da je $|N^+(\{v_i\} \times S_2) \cap (\{v_i\} \times S_1)| = 0$, kar pomeni, da je $|N^-((v_i, f)) \cap S| = 1$.

Predpostavimo sedaj, da je $D \square F$ EOD digraf z EOD množico S . Naj bo $v_i \neq v_0$ poljubno vozlišče zvezde D . Vozlišča iz $S \cap F^{v_0}$ so vhodni sosedi nekaterih (ali vseh) vozlišč iz F^{v_i} . Označimo množico teh vozlišč z F_{v_i} . Vozlišča iz $F^{v_i} - F_{v_i}$ morajo imeti vhodne sosede v $S \cap F^{v_i}$, saj jih nimajo v $S \cap F^{v_0}$. Vozlišča iz $S \cap F^{v_i}$ niso vhodni sosedi nobenega vozlišča iz F_{v_i} , saj bi to pomenilo, da obstaja vozlišče $(v_i, f) \in F_{v_i}$ za katerega velja, da je $|N^-(v_i, f) \cap S| > 1$. To bi bilo protislovje s tem, da je S EOD množica za $D \square F$. Naj bo $S_1 := p_H(S \cap F^{s_0})$ in $S_2 := p_H(S \cap F^{s_1})$. Očitno je S_1 EOD množica za F in S_2 EOD množica le za $F - S_1$. Torej je F 2-EOD po poteh razdeljiv digraf. \square

V splošnem je v kartezičnem produktu poljubnih digrafov D in F potrebno zagotoviti več stvari. Za vse poti v digrafu D potrebujemo ustrezno EOD po poteh razdeljivost, EOD ponorno povezljivost ali EOD izvorno povezljivost digrafa F . Podobno potrebujemo za vse cikle v digrafu D ustrezno EOD ciklično razdeljivost digrafa F . Pri tem se morajo še dodatno ujemati nekatere množice, ki ustrezajo omenjenim pojmom. To je recimo potrebno v primerih, ko je neko vozlišče digrafa D ponor določene poti, hkrati pa izvor neke druge poti (glej sliko 6.4, kjer je vozlišče c ponor poti abc , hkrati pa izvor poti cv). Potrebno je tudi v primerih, ko je neko vozlišče izvor (ponor) več različnih poti (glej sliko 6.4, kjer je vozlišče a izvor poti abc , av in au).

Zgled 6.11 Na sliki 6.4 je primer digrafa D , ki ima en izvor a ter dva ponora v in u . Če želimo, da je kartezični produkt $D \square F$ EOD digraf, potem mora za F veljati, da je 3-EOD po poteh razdeljiv z množicami S_1, S_2 in S_3 za pot abc ter hkrati 1,1-EOD ponorno povezljiv digraf z množicama S'_1 in S''_1 za poti av in cv (oziroma au in cu), pri čemer mora dodatno veljati še, da je $S'_1 = S_1$ in $S''_1 = S_3$.

Slika 6.4: Digraf D z enim izvorom in dvema ponoroma.

6.2 Krepki produkt

V tem razdelku bomo najprej okarakterizirali vse EOD krepke produkte digrafov $D \boxtimes F$, pri katerih je temeljni graf digrafa D cikel C_m , digrafa F pa cikel C_n . Nato bomo ta rezultat razširili in okarakterizirali vse EOD krepke produkte digrafov $D \boxtimes F$, pri katerih je temeljni graf digrafov D in F monociklični graf. Zaključimo z domnevo, da drugi EOD krepki produkti digrafov (razen omenjenih) ne obstajajo.

Začnemo z večimi lemmami, ki jih uporabimo kasneje pri dokazovanju.

Lema 6.12 *Naj bosta D in F digrafa brez izoliranih vozlišč in zank. Če eden od digrafov vsebuje izvor, potem $D \boxtimes F$ ni EOD digraf.*

Dokaz. Naj bosta D in F digrafa brez izoliranih vozlišč. Če ima digraf D izvor v in digraf F izvor u , potem je vozlišče (u, v) izvor v $D \boxtimes F$ in nima vhodnih sosedov. Torej EOD množica za $D \boxtimes F$ ne obstaja. Brez izgube za splošnost naj ima digraf D izvor u in naj bo F poljuben digraf, ki nima izvora. Poskusili bomo konstruirati EOD množico S digrafa $D \boxtimes F$. Vozlišče (u, y) , $y \in V(F)$, ima vhodne sosede le v F^u , saj je u izvor v D . Vsaj en tak vhodni sosed vozlišča (u, y) obstaja, saj F nima izvora. Naj bo $(u, y') \in S$ ta sosed. Tudi vozlišče (u, y') ima vhodnega soseda v F^u , saj je u izvor in F nima izvora. Naj bo $(u, y'') \in S$ ta sosed. Označimo z u' izhodnega soseda od u v D . Tak sosed obstaja, saj D ne vsebuje izoliranih vozlišč. Po definiciji krepkega produkta dveh digrafov, sta (u, y') in (u, y'') vhodna soseda od (u', y') . Vozlišče (u', y') ima tako dva različna vhodna soseda v S , saj sta tako (u, y') kot (u, y'') v množici S . Torej S ni EOD množica in s tem $D \boxtimes F$ ni EOD digraf. \square

V nadaljevanju tega razdelka bomo za usmerjena cikla $\overrightarrow{C}_m = c_1 c_2 \dots c_m$ in $\overrightarrow{C}_n = d_n d_{n-1} \dots d_1$ na m in n vozliščih, uporabljali notacijo in orientacijo prikazano na sliki 6.5. Vozlišče krepkega produkta teh dveh ciklov bomo označili s (c_i, d_j) . Vse operacije na prvem indeksu i bomo izvajali po modulu m , na drugem indeksu j pa po modulu n .

Lema 6.13 Če obstaja EOD množica S digrafa $\overrightarrow{C}_m \boxtimes \overrightarrow{C}_n$, $m, n \geq 3$, in je $(c_i, d_j) \in S$, potem je tudi $(c_{i-1}, d_{j+1}) \in S$.

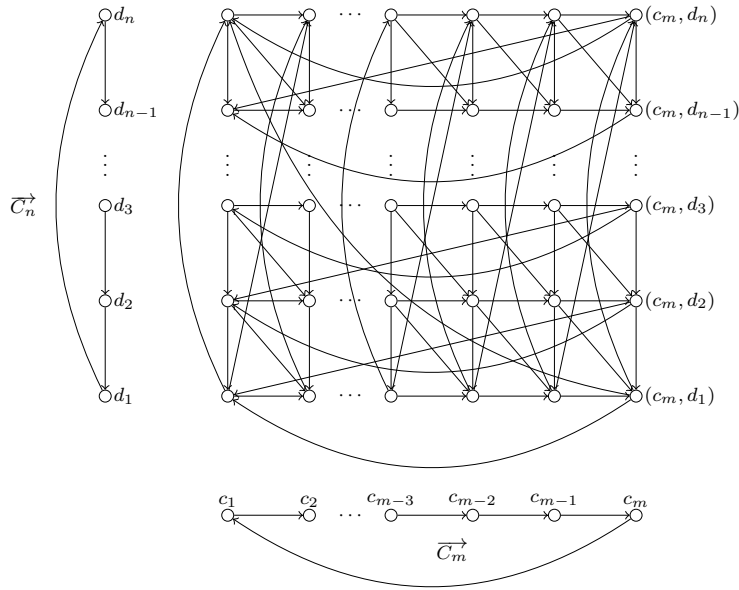
Dokaz. Naj bo $\overrightarrow{C}_m \boxtimes \overrightarrow{C}_n$, $m, n \geq 3$, EOD digraf z EOD množico S in naj bo $(c_i, d_j) \in S$. Vozlišče (c_i, d_j) je vhodni sosed vozlišč (c_{i+1}, d_j) , (c_i, d_{j-1}) in (c_{i+1}, d_{j-1}) . Tudi vozlišče (c_i, d_j) mora imeti vhodnega soseda v S . Edini vhodni sosedi od (c_i, d_j) so (c_{i-1}, d_j) , (c_i, d_{j+1}) in (c_{i-1}, d_{j+1}) . Če je $(c_{i-1}, d_j) \in S$, potem sta tako (c_i, d_j) kot (c_{i-1}, d_j) vhodna soseda od (c_i, d_{j-1}) , kar je protislovje. Če pa je $(c_i, d_{j+1}) \in S$, potem sta tako (c_i, d_j) kot (c_i, d_{j+1}) vhodna soseda od (c_{i+1}, d_j) , kar je ponovno protislovje. Torej (c_{i-1}, d_{j+1}) mora biti v S . \square

Lema 6.14 Če obstaja EOD množica S za $\overrightarrow{C}_m \boxtimes \overrightarrow{C}_n$, $m, n \geq 3$, in je $(c_i, d_j) \in S$, potem sta (c_i, d_{j+3}) , $(c_{i-3}, d_j) \in S$.

Dokaz. Naj bo $\overrightarrow{C}_m \boxtimes \overrightarrow{C}_n$, $m, n \geq 3$, EOD digraf z EOD množico S . Z možno spremembo notacije naj bo $(c_m, d_1) \in S$. Vozlišče (c_m, d_1) je vhodni sosed vozlišč (c_1, d_1) , (c_m, d_n) in (c_1, d_n) . Vozlišče (c_{m-1}, d_2) po lemi 6.13 pripada množici S . Vozlišče (c_{m-1}, d_2) je vhodni sosed vozlišč (c_{m-1}, d_1) , (c_m, d_2) in (c_m, d_1) . Torej $(c_m, d_2) \notin S$, saj bi sicer vozlišče (c_m, d_1) imelo dva vhodna soseda v S . Če $(c_m, d_3) \in S$, potem ima (c_m, d_2) dva vhodna soseda v S . Torej $(c_m, d_3) \notin S$.

Vozlišče (c_{m-2}, d_3) je po lemi 6.13 v množici S , saj je $(c_{m-1}, d_2) \in S$ in je (c_{m-2}, d_3) vhodni sosed vozlišč (c_{m-2}, d_2) , (c_{m-1}, d_3) in (c_{m-1}, d_2) . Eden od vhodnih sosedov (c_{m-1}, d_3) , (c_m, d_4) ali (c_{m-1}, d_4) vozlišča (c_m, d_3) mora biti v S . Če je $(c_{m-1}, d_3) \in S$, potem ima vozlišče (c_m, d_2) dva vhodna soseda v S . Če je $(c_{m-1}, d_4) \in S$, potem ima vozlišče (c_{m-1}, d_3) dva vhodna soseda v S . Torej $(c_m, d_4) \in S$.

Vlogo faktorjev v produktu lahko tudi zamenjamo in s simetričnimi argumenti pokažemo, da vozlišče (c_{i-3}, d_j) pripada množici S . \square



Slika 6.5: Krepki produkt dveh usmerjenih ciklov.

Sedaj lahko okarakteriziramo vse EOD krepke produkte dveh digrafov s ciklom kot temeljnimi grafom. Za množico $V(\overrightarrow{C}_m \boxtimes \overrightarrow{C}_n)$ določimo še particijo v množice

$$\begin{aligned}
 A &= \{(c_i, d_j); i + j = 3q + 1, q \in \mathbb{N}\}, \\
 B &= \{(c_i, d_j); i + j = 3q + 2, q \in \mathbb{N}\} \quad \text{in} \\
 C &= \{(c_i, d_j); i + j = 3q, q \in \mathbb{N}\}.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Izrek 6.15 Naj bo D digraf s temeljnim grafom C_m in F digraf s temeljnim grafom C_n . Krepki produkt $D \boxtimes F$ je EOD digraf natanko tedaj, ko sta D in F usmerjena cikla, je $m = 3\ell$ in je $n = 3k$ za neka $k, \ell \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Naj velja $D \cong \overrightarrow{C}_m$ in $F \cong \overrightarrow{C}_n$, $m = 3\ell$ in $n = 3k$, $k, \ell \in \mathbb{N}$. Spomnimo se množic A, B in C iz (6.1). Pokazali bomo, da je množica A EOD množica za $\overrightarrow{C}_m \boxtimes \overrightarrow{C}_n$. Vhodni sosed vozlišča $(c_i, d_j) \in B$, $i + j = 3q + 2$, ki je v A , je vozlišče (c_{i-1}, d_j) , saj je $(i-1) + j = (i+j) - 1 = (3q+2) - 1 = 3q+1$. Vhodni sosed vozlišča $(c_i, d_j) \in C$, $i + j = 3q$, ki je v A , je vozlišče (c_i, d_{j+1}) , saj je $i + (j+1) = (i+j) + 1 = 3q+1$. Vhodni sosed vozlišča $(c_i, d_j) \in A$, $i + j = 3q + 1$, ki je v A , je vozlišče (c_{i-1}, d_{j+1}) , saj je $(i-1) + (j+1) = i + j = 3q + 1$. Torej je vsako vozlišče v iz $V(\overrightarrow{C}_m \boxtimes \overrightarrow{C}_n)$ dominirano z A . Še več, vozlišče v ima natanko enega vhodnega soseda v A , saj ima natanko en vhodni sosed od v vsoto indeksov enako $3q + 1$.

Da dokažemo nasprotno, naj bo $D \boxtimes F$ EOD digraf z EOD množico S , pri čemer je D digraf s temeljnim grafom C_m in F digraf s temeljnim grafom C_n . Če eden od ciklov ni usmerjen, ima izvor. Po lemi 6.12 velja, da krepki produkt $D \boxtimes F$ ni EOD digraf. Torej lahko predpostavimo, da sta D in F usmerjena cikla. Z možno spremembo notacije lahko predpostavimo, da je $(c_m, d_1) \in S$. Z zaporedno uporabo leme 6.14 dobimo, da $\{(c_m, d_{3k+1}) : k \in \llbracket n/3 \rrbracket\} \subseteq S$, in da $\{(c_{m-3\ell}, d_1) : \ell \in \llbracket m/3 \rrbracket\} \subseteq S$. Če je $n = 3k$, potem sta po lemi 6.14 tudi vozlišči (c_m, d_{n-2}) in $(c_m, d_{n+1}) = (c_m, d_1)$ v množici S . Če je $n = 3k + 1$, potem sta ponovno po lemi 6.14 tudi vozlišči (c_m, d_n) in $(c_m, d_{n+3}) = (c_m, d_3)$ v množici S . Torej $(c_m, d_3), (c_m, d_4) \in S$. Ker pa sta oba vhodna soseda vozlišča (c_1, d_3) , imamo protislovje. Če je $n = 3k + 2$, potem sta še enkrat po lemi 6.14 tudi vozlišči (c_m, d_{n-1}) in $(c_m, d_{n+2}) = (c_m, d_2)$ v množici S . Torej $(c_m, d_1), (c_m, d_2) \in S$. Obe vozlišči sta vhodna soseda od (c_1, d_1) , zato imamo ponovno protislovje. Sledi, da je $n = 3k$. S simetričnimi argumenti pokažemo, da je tudi $m = 3\ell$ in s tem je dokaz zaključen. \square

Sedaj bomo izrek 6.15 razširili in predstavili še večji razred EOD krepkih produktov digrafov. V ta namen naj bodo T_1, \dots, T_m poljubna drevesa s koreni r_1, \dots, r_m . Temeljni graf C_m^+ definiramo tako, da koren r_i identificiramo z vozliščem c_i cikla C_m za vsak $i \in [m]$. Očitno je C_m^+ monocikličen graf, potrebujemo pa zgoraj omejeno strukturo. Opazimo, da $C_m^+ \cong C_m$, če je vsako drevo T_i drevo z enim vozliščem. Pravimo, da je digraf s temeljnim grafom C_m^+ *dobro orientiran*, če je C_m usmerjen cikel in je vsaka povezava drevesa T_i usmerjena stran od korena r_i za vsak $i \in [m]$. Za poljuben dobro orientiran digraf s temeljnim grafom C_m^+ uporabimo oznako $\overrightarrow{C_m^+}$.

Izrek 6.16 Naj bo D digraf s temeljnim grafom C_m^+ , F digraf s temeljnim grafom C_n^+ in $m, n \geq 3$ naravni števili. Krepki produkt $D \boxtimes F$ je EOD digraf natanko tedaj, ko je $D \cong \overrightarrow{C_m^+}$, $F \cong \overrightarrow{C_n^+}$, $m = 3\ell$ in $n = 3k$ za neka $k, \ell \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Naj bo D digraf s temeljnim grafom C_m^+ , F digraf s temeljnim grafom C_n^+ in $m, n \geq 3$ naravni števili.

Predpostavimo najprej, da je $m = 3\ell$, $n = 3k$, $k, \ell \in \mathbb{N}$, $D \cong \overrightarrow{C_m^+}$ in $F \cong \overrightarrow{C_n^+}$. To implikacijo izreka dokažemo v dveh korakih. Naj bo najprej $\overrightarrow{C_m^+} \cong \overrightarrow{C_n^+}$. Pokazali bomo, da je $\overrightarrow{C_m^+} \boxtimes \overrightarrow{C_n^+}$ EOD digraf. Digraf $\overrightarrow{C_m^+} \boxtimes \overrightarrow{C_n^+}$ je po izreku 6.15 EOD digraf

z EOD množico A iz (6.1). Množico A razširimo na množico A^+ , za katero nato pokažemo, da je EOD množica za $\overrightarrow{C}_m^+ \boxtimes \overrightarrow{C}_n^+$. Izberimo še notacijo za vozlišča iz $(\overrightarrow{C}_m^+ \boxtimes \overrightarrow{C}_n^+) - V(\overrightarrow{C}_m^+ \boxtimes \overrightarrow{C}_n^+)$. Z v_i označimo vsa vozlišča v $\overrightarrow{C}_m^+ - V(\overrightarrow{C}_m^+)$, za katera velja, da je $d_{C_m^+}(c_m, v_i) = i$. Opazimo, da lahko imajo različna vozlišča v \overrightarrow{C}_m^+ enako oznako. Vozlišča iz $(\overrightarrow{C}_m^+ \boxtimes \overrightarrow{C}_n^+) - V(\overrightarrow{C}_m^+ \boxtimes \overrightarrow{C}_n^+)$ označimo z (v_i, d_j) . Nadalje še označimo množice $A' = \{(v_i, d_j) : i + j = 3q + 1, q \in \mathbb{N}\}$, $B' = \{(v_i, d_j) : i + j = 3q + 2, q \in \mathbb{N}\}$ in $C' = \{(v_i, d_j) : i + j = 3q, q \in \mathbb{N}\}$. Sedaj določimo particijo množice $V(\overrightarrow{C}_m^+ \boxtimes \overrightarrow{C}_n^+)$ v množice $A^+ = A \cup A'$, $B^+ = B \cup B'$ in $C^+ = C \cup C'$, kjer so A, B in C iz (6.1). Pokazali bomo, da je A^+ EOD množica za $\overrightarrow{C}_m^+ \boxtimes \overrightarrow{C}_n^+$. Vsako vozlišče iz A, B in C ima po izreku 6.15 natanko enega vhodnega soseda v A . Vhodni sosed vozlišča $(v_i, d_j) \in B'$, $i + j = 3q + 2$, ki je v A^+ , je ali (v_{i-1}, d_j) ali (c_{i-1}, d_j) , saj $(i-1) + j = (i+j) - 1 = (3q+2) - 1 = 3q+1$. Vhodni sosed vozlišča $(v_i, d_j) \in C'$, $i + j = 3q$, ki je v A^+ , je (v_i, d_{j+1}) , saj $i + (j+1) = (i+j) + 1 = 3q+1$. Vhodni sosed vozlišča $(v_i, d_j) \in A'$, $i + j = 3q + 1$, ki je v A^+ , je ali (v_{i-1}, d_{j+1}) ali (c_{i-1}, d_{j+1}) , saj $(i-1) + (j+1) = i + j = 3q + 1$. Torej ima vsako vozlišče x iz $V(\overrightarrow{C}_m^+ \boxtimes \overrightarrow{C}_n^+)$ vhodnega soseda v A^+ . Še več, x ima natanko enega vhodnega soseda v A^+ , saj ima natanko en njegov vhodni sosed vsoto indeksov enako $3q + 1$.

S simetričnimi argumenti lahko pokažemo, da če je $\overrightarrow{C}_m^+ \cong \overrightarrow{C}_m$, je $\overrightarrow{C}_m^+ \boxtimes \overrightarrow{C}_n^+$ EOD digraf. Zato predpostavimo, da je $\overrightarrow{C}_m^+ \not\cong \overrightarrow{C}_m$ in $\overrightarrow{C}_n^+ \not\cong \overrightarrow{C}_n$. Zaradi že omenjenih argumentov vemo, da je $\overrightarrow{C}_m^+ \boxtimes \overrightarrow{C}_n^+$ EOD digraf z EOD množico A^+ . Med vozlišči iz $D = (\overrightarrow{C}_m^+ \boxtimes \overrightarrow{C}_n^+) - V(\overrightarrow{C}_m^+ \boxtimes \overrightarrow{C}_n^+)$ in vozlišči iz $(\overrightarrow{C}_m^+ \boxtimes \overrightarrow{C}_n^+)$ ni povezav. Zato bomo za digraf $\overrightarrow{C}_m^+ \boxtimes \overrightarrow{C}_n^+$ uporabili množico A^+ , ki jo bomo razširili v množico A^* . Nato bomo pokazali, da je A^* EOD množica za $\overrightarrow{C}_m^+ \boxtimes \overrightarrow{C}_n^+$. Za ta namen najprej izberemo notacijo za vozlišča iz množice D . S (c_i, u_k^j) označimo vsa vozlišča iz D , ki pripadajo slojem $(\overrightarrow{C}_m^+)^{d_j}$ in $(\overrightarrow{C}_n^+)^{c_i}$ ter so na razdalji k od (c_i, d_j) . Z (v_i, u_k^j) pa označimo vsa vozlišča iz D , ki pripadajo slojem $(\overrightarrow{C}_m^+)^{d_j}$ in $(\overrightarrow{C}_n^+)^{v_i}$ ter so na razdalji k od (v_i, d_j) . Opazimo, da lahko imajo različna vozlišča v D enako oznako. Razen vozlišč iz množice A^+ damo v A^* še vozlišči (c_i, u_k^j) in (v_i, u_k^j) , če je $(i+j = 3q+1$ in $k = 3p)$ ali $(i+j = 3q+2$ in $k = 3p - 2)$ ali $(i + j = 3q$ in $k = 3p - 1)$ za neka $p, q \in \mathbb{N}$. Vemo, da je $A^+ \subseteq A^*$ EOD množica za $\overrightarrow{C}_m^+ \boxtimes \overrightarrow{C}_n^+$. Pokazati še moramo, da ima vsako vozlišče iz D natanko enega vhodnega soseda v A^* . Vsako vozlišče (x_i, u_k^j) , $x \in \{c, v\}$, ima natanko tri vhodne sosede (x_{i-1}, u_k^j) , (x_{i-1}, u_{k-1}^j) in (x_i, u_{k-1}^j) . (Če je $k = 1$, potem je $u_0^j = d_j$.) Obravnavati moramo 9 možnosti. Te so predstavljene v tabeli 6.1.

$i + j$	k	vhodni sosed v A^*		
$3q$	$3p$	(x_i, u_{k-1}^j)	$i + j = 3q$	$k - 1 = 3p - 1$
$3q$	$3p - 2$	(x_{i-1}, u_k^j)	$i - 1 + j = 3q - 1$	$k = 3p - 2$
$3q$	$3p - 1$	(x_{i-1}, u_{k-1}^j)	$i - 1 + j = 3q - 1$	$k - 1 = 3p - 2$
$3q + 1$	$3p$	(x_{i-1}, u_{k-1}^j)	$i - 1 + j = 3q$	$k - 1 = 3p - 1$
$3q + 1$	$3p - 2$	(x_i, u_k^j)	$i + j = 3q + 1$	$k - 1 = 3p - 3$
$3q + 1$	$3p - 1$	(x_{i-1}, u_k^j)	$i - 1 + j = 3q$	$k = 3p - 1$
$3q + 2$	$3p$	(x_{i-1}, u_k^j)	$i - 1 + j = 3q + 1$	$k = 3p$
$3q + 2$	$3p - 2$	(x_{i-1}, u_{k-1}^j)	$i - 1 + j = 3q + 1$	$k - 1 = 3p - 3$
$3q + 2$	$3p - 1$	(x_i, u_{k-1}^j)	$i + j = 3q + 2$	$k - 1 = 3p - 2$

Tabela 6.1: Devet obravnavanih možnosti, ki pokažejo, da ima vsako vozlišče iz D natanko enega vhodnega soseda v A^* .

V prvih dveh stolpcih tabele 6.1 je predstavljenih vseh 9 možnosti. V naslednjem stolpcu je naveden vhodni sosed vozlišča (x_i, u_k^j) , ki je v A^* , zadnja dva stolpca pa pokažeta, zakaj je temu tako. Na koncu še pokažimo, zakaj je v A^* le eden od treh vhodnih sosedov vozlišča (x_i, u_k^j) . Če je $(x_{i-1}, u_{k-1}^j) \in A^*$, potem se natanko en indeks preostalih dveh vhodnih sosedov za 1 razlikuje od istoležnega indeksa vozlišča (x_{i-1}, u_{k-1}^j) . Zato preostala dva vhodna soseda nista v A^* . Zaradi simetrije velja, da če (x_{i-1}, u_k^j) ali $(x_i, u_{k-1}^j) \in A^*$, potem (x_{i-1}, u_{k-1}^j) ni v A^* . Naj torej velja, da je $(x_i, u_{k-1}^j) \in A^*$. V tem primeru lahko zapišemo podobno tabelo kot prej, le da tokrat tabela pokaže, da (x_{i-1}, u_k^j) ni v A^* . Podobno velja tudi, da če $(x_{i-1}, u_k^j) \in A^*$, potem $(x_i, u_{k-1}^j) \notin A^*$. Za obe možnosti glej tabelo 6.2.

Za dokaz druge implikacije naj bo $D \boxtimes F$ EOD digraf z EOD množico S . Če v drevesu T_i obstaja povezava, ki ni usmerjena stran od korena, potem imamo v T_i izvor in s tem protislovje z lemo 6.12. Torej so vse povezave dreves iz C_m^+ usmerjene stran od korena. Če cikel C_m ni usmerjen, potem imamo v C_m izvor c_j za nek $j \in [m]$. Ker so vse povezave iz T_j usmerjene stran od korena $r_j = c_j$, je c_j izvor tudi v C_m^+ . Ponovno imamo protislovje z lemo 6.12. Torej je $D \cong \overrightarrow{C_m^+}$. Na analogen način lahko utemeljimo, da je $F \cong \overrightarrow{C_n^+}$. Sedaj si pogledjmo podgraf $\overrightarrow{C_m^+} \boxtimes \overrightarrow{C_n^+}$ digrafa $D \boxtimes F$. Opazimo, da zaradi orientacije vseh povezav v vseh drevesih, ne obstajajo povezave med vozlišči iz $(D \boxtimes F) - V(\overrightarrow{C_m^+} \boxtimes \overrightarrow{C_n^+})$ in vozlišči iz $\overrightarrow{C_m^+} \boxtimes \overrightarrow{C_n^+}$. Torej je tudi $\overrightarrow{C_m^+} \boxtimes \overrightarrow{C_n^+}$ EOD digraf in po izreku 6.15 velja, da je $m = 3\ell$ in $n = 3k$ za neki naravni števili ℓ in k . \square

$i + j$	$k - 1$	$i + j - 1$	k	$(x_i, u_{k-1}^j) \in A^*$	$(x_{i-1}, u_k^j) \in A^*$
$3q$	$3p$	$3q - 1$	$3p + 1$	NE	DA
$3q$	$3p - 2$	$3q - 1$	$3p - 1$	NE	NE
$3q$	$3p - 1$	$3q - 1$	$3p$	DA	NE
$3q + 1$	$3p$	$3q$	$3p + 1$	DA	NE
$3q + 1$	$3p - 2$	$3q$	$3p - 1$	NE	DA
$3q + 1$	$3p - 1$	$3q$	$3p$	NE	NE
$3q + 2$	$3p$	$3q + 1$	$3p + 1$	NE	NE
$3q + 2$	$3p - 2$	$3q + 1$	$3p - 1$	DA	NE
$3q + 2$	$3p - 1$	$3q + 1$	$3p$	NE	DA

Tabela 6.2: Devet obravnavanih možnosti, ki pokažejo, da če je $(x_i, u_{k-1}^j) \in A^*$, potem $(x_{i-1}, u_k^j) \notin A^*$, oziroma, da če je $(x_{i-1}, u_k^j) \in A^*$, potem $(x_i, u_{k-1}^j) \notin A^*$.

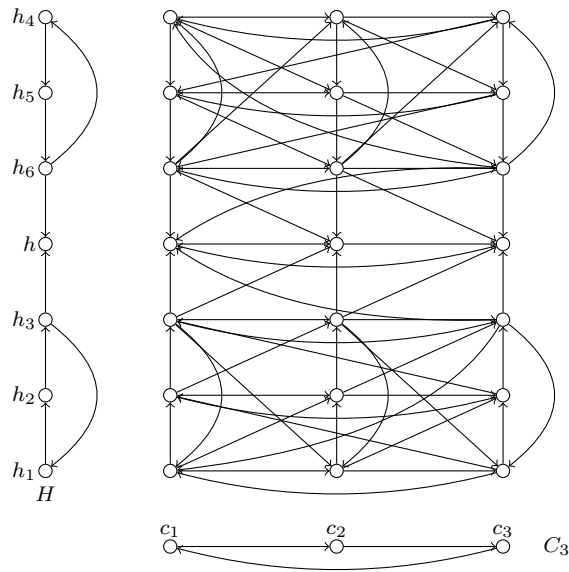
Vsi dosednji rezultati iz tega razdelka nas pripeljejo do naslednje domneve. Verjamemo, da je resnična, vendar dokaz ostaja izziv.

Domneva 6.17 *Krepki produkt $D \boxtimes F$ je EOD digraf natanko tedaj, ko je $D \cong \overrightarrow{C}_m^+$, $F \cong \overrightarrow{C}_n^+$, $m = 3\ell$ in $n = 3k$ za neka $k, \ell \in \mathbb{N}$.*

Zgled 6.18 *Na sliki 6.6 vidimo primer krepkega produkta dveh digrafov, ki ni učinkovito odprto dominiran. Poskusimo konstruirati EOD množico S tega digrafa. Brez izgube za splošnost naj bodo vozlišča (c_1, h_1) , (c_2, h_2) in (c_3, h_3) v množici S . V odprtih izhodnih okolicih teh vozlišč so vozlišča (c_i, h_j) , $i, j \in [3]$, ter vozlišči (c_1, h) in (c_3, h) . Da dominiramo vozlišča (c_i, h_j) , $i \in [3]$, $j \in \{4, 5, 6\}$, imamo tri možnosti. Če so v S vozlišča (c_1, h_4) , (c_2, h_5) in (c_3, h_6) , je vozlišče (c_3, h) v odprti izhodni okolici vozlišč (c_3, h_3) in (c_3, h_6) . Če so v S vozlišča (c_2, h_4) , (c_3, h_5) in (c_1, h_6) , je vozlišče (c_1, h) v odprti izhodni okolici vozlišč (c_3, h_3) in (c_1, h_6) . Če so v S vozlišča (c_1, h_5) , (c_2, h_6) in (c_3, h_4) , je vozlišče (c_3, h) v odprti izhodni okolici vozlišč (c_3, h_3) in (c_2, h_6) . Torej za digraf s slike 6.6 ne obstaja učinkovito odprto dominantna množica.*

6.3 Direktni in leksikografski produkt

Poglavje zaključimo s karakterizacijama EOD direktnega in leksikografskega produkta digrafov. Za odprte izhodne okolice v direktnem produktu digrafov velja



Slika 6.6: Krepki produkt usmerjenega cikla na treh vozliščih in digrafa H , ki ni EOD digraf.

enakost

$$N_{D \times F}^+((d, f)) = N_D^+(d) \times N_F^+(f), \quad (6.2)$$

v leksikografskem produktu pa enakost

$$N_{D \circ F}^+((d, f)) = (N_D^+(d) \times V(F)) \cup (\{d\} \times N_F^+(f)). \quad (6.3)$$

Karakterizaciji sledita iz teh dveh enakosti. Naslednji rezultat je analogen rezultatu za EOD grafe iz [1].

Izrek 6.19 *Naj bosta D in F digrafa. Direktni produkt $D \times F$ je EOD digraf natanko tedaj, ko sta D in F EOD digrafa.*

Dokaz. Naj bo D EOD digraf z EOD množico S_D in F EOD digraf z EOD množico S_F . Pokazali bomo, da je $S_D \times S_F$ EOD množica za $D \times F$. Po lastnosti (6.2) velja, da je

$$V(D \times F) \subseteq \bigcup_{(d,f) \in S_D \times S_F} N_{D \times F}^+((d, f)).$$

Predpostavimo, da obstaja vozlišče (d_0, f_0) , ki ima v množici $S_D \times S_F$ dva različna vhodna soseda (d, f) in (d', f') . Če je $d = d'$, potem je $f \neq f'$, in po lastnosti (6.2) velja

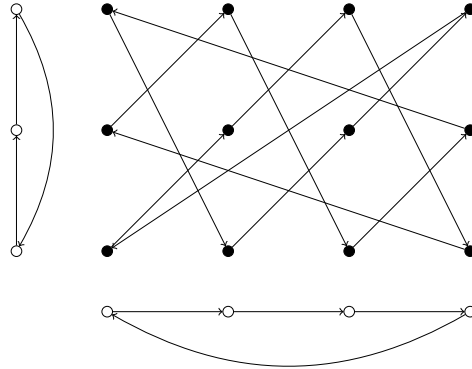
$$\begin{aligned} N_{D \times F}^+((d, f)) \cap N_{D \times F}^+((d', f')) &= (N_D^+(d) \times N_F^+(f)) \cap (N_D^+(d) \times N_F^+(f')) = \\ &= N_D^+(d) \times (N_F^+(f) \cap N_F^+(f')). \end{aligned}$$

Torej ima vozlišče f_0 v množici S_F dva različna vhodna soseda f in f' . To je protislovje s predpostavko, da je S_F EOD množica za F . Če je $f = f'$, potem je $d \neq d'$, in s simetričnimi argumenti ponovno pridemo do protislovja. To pomeni, da je $d \neq d'$ in $f \neq f'$. Iz lastnosti (6.2) sledi, da ima d_0 v množici S_D dva različna vhodna soseda d in d' , in ima f_0 v množici S_F dva različna vhodna soseda f in f' . Ponovno smo prišli do protislovja s prepostavko. Torej nobeni dve vozlišči iz $S_D \times S_F$ nimata skupnega izhodnega soseda, kar pomeni, da je $D \times F$ EOD digraf.

Naj bo sedaj $D \times F$ EOD digraf z EOD množico S in naj bo $f \in F$ poljubno vozlišče. Vsako vozlišče iz D^f ima natanko enega vhodnega soseda v S . Označimo s S_f množico z vsemi temi sosedi. Pokazali bomo, da je $p_D(S_f)$ EOD množica za D . Naj bosta d in d' dve različni vozlišči iz $p_D(S_f)$. Izberimo takšni vozlišči $f', f'' \in V(F)$, da velja $(d, f'), (d', f'') \in S_f$. Če obstaja takšno vozlišče d_0 , da sta d in d' njegova vhodna soseda, potem ima tudi (d_0, f) v množici S dva vhodna soseda (d, f') in (d', f'') . To je protislovje s predpostavko, da je S EOD množica za $D \times F$. Ker je S EOD množica za $D \times F$ in ker velja lastnost (6.2), velja tudi, da je $V(D) \subseteq \bigcup_{d \in p_D(S_f)} N_D^+(d)$. Torej je $p_D(S_f)$ EOD množica za D in s tem je D EOD digraf. S simetričnimi argumenti pokažemo, da je tudi F EOD digraf. S tem je dokaz zaključen. \square

Zgled 6.20 *Direktni produkt usmerjenih ciklov \vec{C}_m in \vec{C}_n je EOD digraf, saj sta \vec{C}_m in \vec{C}_n EOD digrafa. EOD množico tvorijo vsa vozlišča obeh digrafov. Na sliki 6.7 lahko vidimo direktni produkt usmerjenih ciklov \vec{C}_4 in \vec{C}_3 . Vozlišča, ki tvorijo EOD množico produkta so obarvana črno.*

Rezultat za EOD leksikografske produkte digrafov je analogen rezultatu za grafe iz [40].



Slika 6.7: Direktni produkt usmerjenega cikla na 4 vozliščih in usmerjenega cikla na 3 vozliščih.

Izrek 6.21 *Naj bosta D in F digrafa. Leksikografski produkt $D \circ F$ je EOD digraf natanko tedaj, ko*

- (i) *je D digraf brez usmerjenih povezav in je F EOD digraf, ali*
- (ii) *je D EOD digraf in F vsebuje ponor.*

Dokaz. Naj bo D digraf z n vozlišči brez povezav in naj bo F EOD digraf. Potem je $D \circ F$ izomorfen n kopijam digrafa F . Ker je F EOD digraf, tudi n kopij digrafa F tvori EOD digraf.

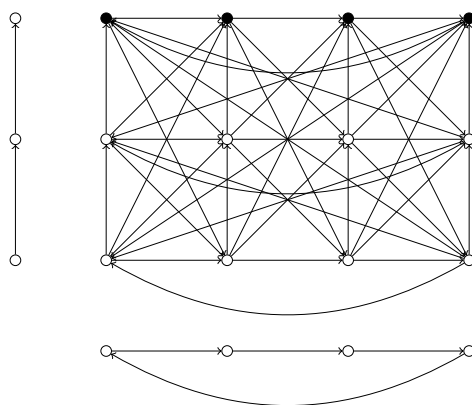
Če je f_0 ponor v digrafu F , potem po lastnosti (6.3) velja, da je $N_{D \circ F}^+((d, f_0)) = N_D^+(d) \times V(F)$. Torej je $\bigcup_{d \in S_D} N_{D \circ F}^+((d, f_0))$ enaka $V(D \times F)$ za EOD množico S_D EOD digrafa D . Če za $d, d' \in S_D$ in $d \neq d'$ v digrafu $D \circ F$ obstaja vozlišče, katerega vhodna soseda sta tako (d, f_0) kot (d', f_0) , potem obstaja tudi vozlišče v D , katerega vhodna soseda sta tako d kot d' . To je protislovje s predpostavko, da je S_D EOD množica za D . Torej je $D \circ F$ EOD digraf.

Za dokaz obratne smeri naj velja, da je $D \circ F$ EOD digraf z EOD množico S in $(d, f) \in S$ poljubno vozlišče. Če f ni ponor v F , potem obstaja tako vozlišče $f' \in F^d$, da je (d, f) vhodni sosed od (d, f') . Označimo z (d_1, f_1) enoličnega vhodnega soseda iz S vozlišča (d, f) . Če je $d_1 \neq d$, potem sta obe vozlišči (d, f) in (d_1, f_1) vhodna soseda od (d, f') , kar ni možno. Torej je $d_1 = d$. Če ima d kakšnega izhodnega soseda d' , potem za d' velja, da ima (d', f) dva vhodna soseda (d, f) in

(d_1, f_1) , kar je protislovje. Torej noben d , za katerega je $(d, f) \in S$, nima izhodnega sosedu. Če je $d'' \neq d$, potem velja, da ima d vsaj enega izhodnega sosedu, saj ima vsako vozlišče $(d'', f'') \in V(D \circ F)$ natanko enega vhodnega sosedu $(d, f) \in S$. To pa ni možno. Torej je $d'' = d$ in noben $d'' \in V(D)$ nima izhodnih sosedov. To pomeni, da je D digraf brez povezav. Da pokažemo, da je F EOD digraf, izberimo poljuben F -sloj F^d . Očitno vozlišča iz F^d , ki so tudi v S , tvorijo EOD množico za $(D \circ F)[F^d] \cong F$. Torej je F EOD digraf in iz tega sledi točka (i).

Predpostavimo sedaj, da je f ponor. Opazimo, da je v tem primeru F^d podmnožica izhodne sosesčine vsakega vozlišča (d_0, f) , kjer je d_0 vhodni sosed od d . Pokazali bomo, da je $p_D(S)$ EOD množica za D . Recimo, da ni. Potem obstajata vozlišči $d, d' \in p_D(S)$ s skupnim izhodnim sosedom. To nas skupaj z lastnostjo (6.3) privede do protislovja s predpostavko, da je S EOD množica za $D \circ F$. Torej je $p_D(S)$ EOD množica za D in iz tega sledi točka (ii). \square

Zgled 6.22 Leksikografski produkt usmerjenega cikla $\vec{C}_m = c_1 \dots c_m$ in usmerjene poti $\vec{P}_n = p_1 \dots p_n$ je EOD digraf, saj je \vec{C}_m EOD digraf in je \vec{P}_n digraf, ki vsebuje ponor p_n . EOD množico tvorijo vozlišča sloja $\vec{C}_m^{p_n}$. Na sliki 6.8 lahko vidimo leksikografski produkt usmerjenega cikla \vec{C}_4 in usmerjene poti \vec{P}_3 . Vozlišča, ki tvorijo EOD množico produkta, so obarvana črno.



Slika 6.8: Leksikografski produkt usmerjenega cikla na 4 vozliščih in usmerjene poti na treh vozliščih.

7

ZAKLJUČNE MISLI

V prvem poglavju smo se ukvarjali z grafi, ki imajo enolično pakiranje največje moči. Na dva različna načina smo okarakterizirali vsa drevesa s to lastnostjo. Zanimivo bi bilo vedeti, ali lahko okarakteriziramo še kakšno drugo družino grafov s to lastnostjo. Pojavi se tudi vprašanje o časovni zahtevnosti problema.

Vprašanje 7.1 *Ali je drevesa z enoličnim največjim pakiranjem mogoče prepoznati v linearnem času?*

V drugem poglavju smo vpeljali novo dimenzijo imenovano dimenzija incidenčnosti. Ali lahko okarakteriziramo grafe, ki dosežejo zgornjo oziroma spodnjo mejo posledice 4.6? Pokazali smo tudi, da je problem IDIM v splošnem NP-poln. Nekatere osnovne družine grafov, za katere je problem IDIM polinomsko rešljiv, smo navedli na koncu poglavja. Pojavi se naslednje vprašanje.

Vprašanje 7.2 *Za katere družine grafov (razen za družine poti, ciklov, polnih grafov in polnih dvodelnih grafov) je problem IDIM polinomsko rešljivo?*

Pakirno kromatično število leksikografskega produkta smo obravnavali v tretjem poglavju. Določili smo splošno zgornjo in spodnjo mejo. Zgornjo mejo smo izboljšali za leksikografski produkt poti in poljubnega grafa. Zanimivo bi bilo videti, kakšna je točna vrednost pakirnega kromatičnega števila leksikografskega produkta poti in poljubnega grafa. Ali obstajajo kakšni dodatni pogoji, za katere sta zgornja in spodnja meja leksikografskega produkta poti in poljubnega grafa enaki?

Ugotovili smo tudi, da spodnja in zgornja meja izrekov 5.1 in 5.2 sovpadata, ko je $\text{diam}(G) \leq 3$.

Vprašanje 7.3 *Kateri leksikografski produkti so tisti, za katere je dosežena enakost spodnje in zgornje meje izrekov 5.1 in 5.2?*

Ali lahko najdemo kakšno družino grafov, za katero lahko poiščemo točno vrednost pakirnega kromatičnega števila leksikografskega produkta grafa iz te družine in poljubnega grafa?

Četrto poglavje smo namenili učinkovito odprto dominiranim produktom digrafov. V celoti smo okarakterizirali učinkovito odprto dominirane direktne in leksikografske produkte digrafov. Okarakterizirali smo tudi učinkovito odprto dominirani kartezični produkt usmerjene poti oziroma usmerjenega cikla in poljubnega digrafa. Ali lahko dobimo odgovor na naslednji vprašanji?

Vprašanje 7.4 *Kakšne lastnosti imajo digrafi, ki so k -EOD po poteh oziroma ciklično razdeljivi?*

Zanimivo bi bilo videti še, ob kakšnih predpostavkah za oba digrafa v kartezičnem produktu je ta učinkovito odprto dominiran digraf.

V nadaljevanju poglavja smo okarakterizirali učinkovito odprto dominirane krepke produkte dveh usmerjenih ciklov \vec{C}_m in \vec{C}_n . Te cikle smo nato razširili do digrafov \vec{C}_m^+ in \vec{C}_n^+ in okarakterizirali tudi $\vec{C}_m^+ \boxtimes \vec{C}_n^+$. Postavili smo naslednjo domnevo.

Domneva 7.5 *Krepki produkt $D \boxtimes F$ je EOD digraf natanko tedaj, ko je $D \cong \vec{C}_m^+$, $F \cong \vec{C}_n^+$, $m = 3\ell$ in $n = 3k$ za neka $k, \ell \in \mathbb{N}$.*

LITERATURA

- [1] G. Abay-Asmerom, R. H. Hammack, D. T. Taylor, Total perfect codes in tensor products of graphs, *Ars Combin.* **88** (2008) 129–134.
- [2] G. Argiroffo, G. Nasini, P. Torres, The packing coloring problem for lobsters and partner limited graphs, *Discrete Appl. Math.* **164** (2014) 373–382.
- [3] J. Balogh, A. Kostochka, X. Liu, Packing chromatic number of cubic graphs, *Discrete Math.* **341** (2018) 474–483.
- [4] A. E. Barkauskas, L. H. Host, Finding efficient dominating sets in oriented graphs, *Congr. Numer.* **98** (1993) 27–32.
- [5] D. Božović, A. Kelenc, I. Peterin, I. G. Yero, Incidence dimension and 2-packing number in graphs, poslano v objavo.
- [6] D. Božović, I. Peterin, Efficient open domination in digraph products, *Mathematics* **8** (2020) 496.
- [7] D. Božović, I. Peterin, Graphs with unique maximum packing of closed neighborhoods, *Discuss. Math. Graph Theory*, v tisku, <https://doi.org/10.7151/dmgt.2304>.
- [8] D. Božović, I. Peterin, A note on the packing chromatic number of lexicographic products, poslano v objavo.
- [9] B. Brešar, J. Ferme, S. Klavžar, D. F. Rall, A survey on packing colorings, *Discuss. Math. Graph Theory* **40** (2020) 923–970.

- [10] B. Brešar, S. Klavžar, D. F. Rall, On the packing chromatic number of Cartesian products, hexagonal lattice, and trees, *Discrete Appl. Math.* **155** (2007) 2303–2311.
- [11] B. Brešar, K. Kuenzel, D. F. Rall, Graphs with a unique maximum open packing, *Indian J. Discrete Math.* **5** (2019) 37–55.
- [12] J. Caceres, C. Hernando, M. Mora, I. M. Pelayo, M. L. Puertas, C. Seara, D. R. Wood, On the metric dimension of Cartesian product of graphs, *SIAM J. Discrete Math.* **21** (2007) 273–302.
- [13] J. Caceres, C. Hernando, M. Mora, I. M. Pelayo, M. L. Puertas, C. Seara, On the metric dimension of some families of graphs, *Electron. Notes Discrete Math.* **22** (2005) 129–133.
- [14] G. Chartrand, L. Eroh, M. A. Johnson, O. R. Oellermann, Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph, *Discrete Appl. Math.* **105** (2000) 99–113.
- [15] E. J. Cockayne, B. L. Hartnell, S. T. Hedetniemi, R. Laskar, Perfect domination in graphs, *J. Comb. Info. System Sci.* **18** (1993) 136–148.
- [16] R. Cowen, S. H. Hechler, J. W. Kennedy, A. Steinberg, Odd neighborhood transversals on grid graphs, *Discrete Math.* **307** (2007) 2200–2208.
- [17] I. J. Dejter, Perfect domination in regular grid graphs, *Australas. J. Combin.* **42** (2008) 99–114.
- [18] R. D. Dutton, Global domination and packing numbers, *Ars Combin.* **101** (2011) 489–501.
- [19] J. Fiala, P. A. Golovach, Complexity of the packing coloring problem for trees, *Discrete Appl. Math.* **158** (2010) 771–778.
- [20] R. Gallant, G. Gunther, B. Hartnell, D. F. Rall, Limited packings in graphs, *Discrete Appl. Math.* **158** (2010) 1357–1364.
- [21] M. R. Garey, D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman & Co., New York, 1979.

- [22] H. Gavlas, K. Schultz, Efficient open domination, *Electron. Notes Discrete Math.* **11** (2002) 681–691.
- [23] N. Gastineau, O. Togni, On the packing chromatic number of subcubic outerplanar graphs, *Discrete Appl. Math.* **255** (2019) 209–221.
- [24] D. Geller, S. Stahl, The Chromatic Number and Other Functions of the Lexicographic Product, *J. Combin. Theory Ser. B* **19** (1975) 87–95.
- [25] W. Goddard, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, J. M. Harris, D. F. Rall, Broadcast chromatic numbers of graphs, *Ars Combin.* **86** (2008) 33–49.
- [26] O. Goldreich, *P, NP, and NP-Completeness: The Basics of Computational Complexity*, Cambridge University Press, New York (2010).
- [27] W. F. Klostermeyer, J. L. Goldwasser, Total Perfect Codes in Grid Graphs, *Bull. Inst. Combin. Appl.* **46** (2006) 61–68.
- [28] G. Gunther, B. Hartnell, L. R. Markus, D. F. Rall, Graphs with unique minimum dominating sets, *Congr. Numer.* **101** (1994) 55–63.
- [29] T. W. Haynes, M. A. Henning, Trees with unique minimum total dominating sets, *Discuss. Math. Graph Theory* **22** (2002) 233–246.
- [30] F. Harary, R. A. Melter, On the metric dimension of a graph, *Ars Combin.* **2** (1976) 191–195.
- [31] M. A. Henning, C. Löwenstein, D. Rautenbach, Dominating sets, packings, and the maximum degree, *Discrete Math.* **311** (2011) 2031–2036.
- [32] G. Hopkins, W. Staton, Graphs with unique maximum independent sets, *Discrete Math.* **57** (1985) 245–251.
- [33] J. Huang, J. M. Xu, The bondage numbers and efficient dominations of vertex-transitive graphs, *Discrete Math.* **308** (2008) 571–582.
- [34] Y. Jacobs, E. Jonck, E. J. Joubert, A lower bound for the packing chromatic number of the Cartesian product of cycles, *Cent. Eur. J. Math.* **11** (2013) 1344–1357.

- [35] M. Jannesari, B. Omoomi, The metric dimension of the lexicographic product of graphs, *Discrete Math.* **312** (2012) 3349–3356.
- [36] A. P. Kazemi, B. Pahlavsay, R. J. Stones, Cartesian product graphs and k-tuple total domination, *Filomat* **32** (2018) 6713–6731.
- [37] A. Kelenc, D. Kuziak, A. Taranencko, I. G. Yero, On the mixed metric dimension of graphs, *Appl. Math. Comput.* **314** (2017) 429–438.
- [38] A. Kelenc, N. Tratnik, I. G. Yero, Uniquely identifying the edges of a graph: the edge metric dimension, *Discrete Appl. Math.* **251** (2018) 204–220.
- [39] S. Khuller, B. Raghavachari, A. Rosenfeld, Landmarks in graphs, *Discrete Appl. Math.* **70** (1996) 217–229.
- [40] D. Kuziak, I. Peterin, I. G. Yero, Efficient open domination in graph products, *Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.* **16** (2014) 105–120.
- [41] D. Kuziak, J. A. Rodríguez-Velázquez, I. G. Yero, On the metric dimension of corona product graphs, *Comput. Math. Appl.* **61** (2011) 2793–2798.
- [42] C. Martinez, R. Beivide, E. Gabidulin, Perfect codes for metrics induced by circulant graphs, *IEEE Trans. Inf. Theory* **53** (2007) 3042–3052.
- [43] A. Meir, J. W. Moon, Relations between packing and covering numbers of a tree, *Pacific J. Math.* **61** (1975) 225–233.
- [44] D. A. Mojdeh, B. Samadi, A. Khodkar, H. R. Golmohammadi, On the packing numbers in graphs, *Australas. J. Combin.* **71** (2018) 468–475.
- [45] Ľ. Niepel, A. Černý, Efficient domination in directed tori and the Vizing’s conjecture for directed graphs, *Ars Combin.* **91** (2009) 411–422.
- [46] I. Peterin, I. G. Yero, Efficient closed domination in digraph products, *J. Comb. Optim.* **38** (2019) 130–149.
- [47] I. Sahul Hamid, S. Saravanakumar, Packing parameters in graphs, *Discuss. Math. Graph Theory* **35** (2015) 5–16.

-
- [48] O. Schaudt, Efficient total domination in digraphs, *J. Discrete Algorithms* **15** (2012) 32–42.
- [49] A. J. Schwenk, B. Q. Yue, Efficient dominating sets in labeled rooted oriented trees, *Discrete Math.* **305** (1–3) (2005) 276–298.
- [50] P. J. Slater, Leaves of trees, *Congr. Numer.* **14** (1975) 549–559.
- [51] M. Y. Sohn, X. G. Chen, F. T. Hu, On efficiently total dominatable digraphs, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* **41** (2018) 1749–1758.
- [52] T. Tamizh Chelvam, Efficient open domination in Cayley graphs, *Appl. Math. Lett.* **25** (2012) 1560–1564.
- [53] P. Torres, M. Valencia-Pabon, The packing chromatic number of hypercubes, *Discrete Appl. Math.* **190–191** (2015) 127–140.
- [54] R. J. Wilson, J. J. Watkins, Uvod v teorijo grafov, *Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije*, Ljubljana (1997).

SLIKE

2.1	Digrafa D in F in njun kartezični, direktni, krepki in leksikografski produkt.	8
3.1	Drevesa v $T - v$	11
3.2	Graf G in njegovi $\rho(G)$ -množici.	13
3.3	Na najkrajši poti od v do u sta obe vozlišči, ki sta sosednji vozlišču v	13
3.4	Particija množice vozlišč grafa G z enolično $\rho(G)$ -množico P	15
3.5	Nekateri možni podgrafi grafa, ki vsebuje vozlišče $v \in R$	15
3.6	Graf H in dve njegovi $\rho(H)$ -množici.	16
3.7	Najmanjši primeri grafov, ki imajo enolično $\rho(G)$ -množico P , in vsebujejo za podgraf povsem desni graf s slike 3.5.	16
3.8	Primer, ko je t list, $w = y$ in je x zgornji sosed od w	19
3.9	Primer, ko je t list, $w = y$ in je x spodnji sosed od w	20
3.10	Možnosti za $w \neq y$	21
3.11	Operacije $O_1 - O_5$	22
3.12	Drevesa, ki jih dobimo iz K_1 z uporabo operacij O_1 in O_2 (a), O_1, O_4 in O_3 (b) ter O_1, O_4 in O_5 (c).	22
3.13	Primer, ko $z \notin R$ in je $\deg(x) = 2$	25
3.14	Primer, ko $z \notin R$, $\deg(x) \geq 3$ in $z = y$	25

3.15	Primer, ko $z \notin R$, $\deg(x) \geq 3$, $z \neq y$ in $w = t$	26
3.16	Primer, ko $z \notin R$, $\deg(x) \geq 3$, $z \neq y$ in $w \neq t$	27
3.17	Primer, ko $z \in R$ in $\deg(z) = 2$	28
3.18	Primer, ko $z \in R$, $\deg(z) \geq 3$ in z nima sosedov v množici R	29
3.19	Primer, ko $z \in R$, $\deg(z) \geq 3$ in ima z soseda v množici R	29
4.1	Graf G in povezava e za katero velja, da $\rho(G - e) > P_e(G) $	33
4.2	Primer, ki pokaže, da obrat implikacije izreka 4.10 v splošnem ne velja.	37
4.3	Komponenta za spremenljivko u_i	42
4.4	Komponenta za stavek c_j	43
4.5	Podgraf, ki je povezan s stavkom $c_j = (\bar{u}_1 \vee \bar{u}_2 \vee u_3)$	44
5.1	Pakirno barvanje za $P_8 \circ P_6$ z uporabo 32 barv po izreku 5.5 (a) in z uporabo 31 barv (b) (zaradi preglednosti niso narisane vse povezave grafa).	52
6.1	4-EOD po poteh razdeljiv digraf, pri čemer je $S_1 = \{v_3, v_4\}$, $S_2 = \{v_6, v_7\}$, $S_3 = \{v_1, v_8\}$, $S_4 = \{v_2, v_3\}$ in velja $S_1 \cap S_4 = \{v_3\}$	55
6.2	2,3-EOD ponorno povezljiv digraf.	58
6.3	Pot z izvoroma u in z in ponoroma x in $v = y$	60
6.4	Digraf D z enim izvorom in dvema ponoroma.	62
6.5	Krepki produkt dveh usmerjenih ciklov.	64
6.6	Krepki produkt usmerjenega cikla na treh vozliščih in digrafa H , ki ni EOD digraf.	69
6.7	Direktni produkt usmerjenega cikla na 4 vozliščih in usmerjenega cikla na 3 vozliščih.	71
6.8	Leksikografski produkt usmerjenega cikla na 4 vozliščih in usmerjene poti na treh vozliščih.	72

DELOVNI ŽIVLJENJEPIS

Dragana Božović se je rodila 6. julija 1991 v Mariboru. Obiskovala je Osnovno šolo Prežihovega Voranca, nato pa se je vpisala na II. gimnazijo Maribor. Po končani maturi se je odločila za enopredmetni študij matematike na Fakulteti za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru. V mesecu septembru leta 2013 je diplomirala, istega meseca leta 2015 pa pridobila še naziv magistrica matematike, oboje pod mentorstvom doc. dr. Andreja Taranenka.

Od oktobra 2015 je zaposlena na Fakulteti za elektrotehniko, računalništvo in informatiko na mestu asistentke za predmetno področje matematika. Omenimo, da je Dragana zelo predana svojemu delu. Leta 2018 je prejela plaketo za strokovno delo Fakultete za elektrotehniko, računalništvo in informatiko, leta 2019 pa še plaketo za pedagoško delo.

Leta 2016 se je vpisala na doktorski študij matematike na Fakulteti za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru pod mentorstvom izr. prof. dr. Iztoka Peterina. Doslej je v soavtorstvu pripravila štiri znanstvene članke:

1. D. Božović, A. Kelenc, I. Peterin, I. G. Yero, Incidence dimension and 2-packing number in graphs, poslano v objavo.
2. D. Božović, I. Peterin, Graphs with unique maximum packing of closed neighborhoods, *Discuss. Math. Graph Theory*, v tisku, <https://doi.org/10.7151/dmgt.2304>.
3. D. Božović, I. Peterin, A note on the packing chromatic number of lexicographic products, poslano v objavo.

4. D. Božovič, I. Peterin, Efficient open domination in digraph products, *Mathematics* 8 (2020) 496.

Objavila je tri strokovne članke:

1. D. Božovič, A. Taranenko, Linearni problem prevoza, *Presek* 41(2) (2013/2014) 24–27.
2. D. Božovič, Sudoku kot poseben primer problema prevoza, *Presek* 41(3) (2013/2014) 22–27.
3. D. Božovič, Tuttova baricentrična metoda in algoritem Fruchtermana in Reingolda, *Dianoia* 2(1) (2018) 9-17.

Aktivno se je udeležila petih mednarodnih konferenc:

1. 18th Workshop on Graph Theory: Colourings, Independence and Domination, 15. september do 20. september, 2019, Piechowice, Poljska.
Naslov predavanja: On the packing chromatic number of lexicographic products.
2. 8th Cracow Conference on Graph Theory, 9. do 14. september, 2018, Rytro, Poljska.
Naslov predavanja: Unique maximum packing of graphs.
3. 31th Ljubljana-Leoben Graph Theory Seminar, 3. do 4. september, 2018, Leoben, Avstrija.
Naslov predavanja: Unique maximum packing of graphs.
4. 17th Workshop on Graph Theory: Colourings, Independence and Domination, 17. do 22. september, 2017, Piechowice, Poljska.
Naslov predavanja: On the b-chromatic number of proper interval graphs.
5. 30th Ljubljana-Leoben Graph Theory Seminar, 13. do 15. september, 2017, Maribor, Slovenija.
Naslov predavanja: On the b-chromatic number of proper interval graphs.

Sodeluje tudi pri pripravi študentov na tekmovanji Matematični kenguru in Univerzitetni programerski maraton. V soavtorstvu z doc. dr. Aleksandro Tepoh je v septembru 2019 izdala tudi zbirko vaj z naslovom Zbirka nalog iz diskretne matematike: (1. del).

UNIVERZA V MARIBORU
FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

**IZJAVA O AVTORSTVU IN ISTOVETNOSTI TISKANE IN ELEKTRONSKE
OBLIKE DOKTORSKE DISERTACIJE**

Ime in priimek študentke: DRAGANA BOŽOVIĆ

Študijski program: MATEMATIKA

Naslov doktorske disertacije: NEKATERE S PAKIRANJI POVEZANE LASTNOSTI GRAFOV

Mentorica: izr. prof. dr. IZTOK PETERIN

Podpisana študentka DRAGANA BOŽOVIĆ

- izjavljam, da je zaključno delo rezultat mojega znanstvenoraziskovalnega dela;
- izjavljam, da sem pridobila vsa potrebna soglasja za uporabo podatkov in avtorskih del v zaključnem delu in jih v zaključnem delu jasno in ustrezno označila;
- na Univerzo v Mariboru neodplačno, neizključno, prostorsko in časovno neomejeno prenašam pravico shranitve avtorskega dela v elektronski obliki, pravico reproduciranja ter pravico ponuditi zaključno delo javnosti na svetovnem spletu preko DKUM in drugih informacijskih zbirk in ponudnikov; sem seznanjena, da bodo dela deponirana/objavljena v DKUM dostopna široki javnosti pod pogoji licence Creative Commons BY-NC-D, kar vključuje tudi avtomatizirano indeksiranje preko spleta in obdelavo besedil za potrebe tekstovnega in podatkovnega rudarjenja in ekstrakcije znanja iz vsebin; uporabnikom se dovoli reproduciranje brez predelave avtorskega dela, distribuiranje, dajanje v najem in priobčitev javnosti samega izvirnega avtorskega dela, in sicer pod pogojem, da navedejo avtorja in da ne gre za komercialno uporabo;

- dovoljujem objavo svojih osebnih podatkov, ki so navedeni v zaključnem delu in tej izjavi, skupaj z objavo zaključnega dela;
- izjavljam, da je tiskana oblika zaključnega dela istovetna elektronski obliki zaključnega dela, ki sem jo oddala za objavo v DKUM;
- izjavljam, da sem seznanjena s pogoji Proquest-a za oddajo in javno objavo doktorske disertacije v podatkovno zbirko ProQuest Dissertations & Theses Global
(<http://contentz.mkt5049.com/lp/43888/382619/PQDTauthoragreement.pdf>).

Kraj in datum:
Maribor, 27. 10. 2020

Podpis študentke: