



Univerza v Mariboru

Fakulteta za naravoslovje
in matematiko



διάνοια

D I A N O I A

REVIJA ZA UPORABO NARAVOSLOVNO-MATEMATIČNIH ZNANOSTI

ISSN	2536-3565
Naslov publikacije/Title	DIANOIA , revija za uporabo naravoslovnih in matematičnih znanosti DIANOIA , journal for applications of natural and mathematical sciences
Letnik/Volume	10
Leto/Year	2026
Številka/Number	2
Založnik in izdajatelj/ Published & Issued by	Univerzitetna založba Univerze v Mariboru, Slomškov trg 15, 2000 Maribor, Slovenija
Uredništvo/Editorial board	<i>odgovorni urednik/editor in chief</i> Mitja Slavinec <i>glavni urednik/executive editor</i> Drago Bokal <i>izvršna urednica/managing editor</i> Janja Jerebic <i>urednici za področje biologije/editors for biological sciences</i> Nina Šajna, Sonja Škornik <i>urednik za področje didaktike/editor for didactical sciences</i> Samo Repolusk <i>urednika za področje fizike/editors for physical sciences</i> Robert Repnik, Aleš Fajmut <i>urednika za področje matematike/editors for mathematical sciences</i> Igor Pesek, Janja Jerebic <i>urednik za področje tehnike/editor for technical sciences</i> Mateja Ploj Vrtič <i>tehnična urednica/technical editor</i> Špela Kajzer
Mednarodni uredniški svet/ International advisory board	Igor Emri (Fakulteta za strojništvo Univerze v Ljubljani, član SAZU), Matej Brešar (FNM, član SAZU), Sergey Pasechnik (Državna fakulteta v Moskvi), Vlad Popa-Nita (Fakulteta za fiziko Univerze v Bukarešti), Blaž Zmazek (FNM), Samo Kralj (FNM), Franci Janžekovič (FNM), Nataša Vaupotič (FNM), Mitja Kaligarič (FNM), Boris Aberšek (FNM), Andrej Šorgo (FNM), Bojan Mohar (Simon Fraser University, Vancouver), Matjaž Perc (FNM), Ivica Aviani (Naravoslovno matematična fakulteta Split), Fahriye Altınay (Univerza v Nikoziji), Andreas M. Hinz (Univerza Ludwig-Maximilians, München)
Oblikovanje/Design	Amadeja Bratuša
Lektoriranje/Proofreading	Ljudmila Bokal
Sedež uredništva/Address	FNM UM, Koroška cesta 160, 2000 Maribor
e-mail	dianoia@um.si
internet/web	www.fnm.um.si
Tisk/Printed by	FNM UM
Leto izida/Year	2026
Datum natisa/Published	2026
Naklada/Nr. of Copies	50 izvodov

Revija izhaja dvakrat letno, predvidoma aprila in septembra.

Kazalo / Table of Contents

Tanabejev lok med slikarji in okulisti Tanabe's arc between painters and ophthalmologists Drago Bokal	67
Uporabnost generativne umetne inteligence pri oblikovanju pisnih preizkusov znanja iz biologije The Use of Generative Artificial Intelligence in Designing Written Biology Assessments Sara Temlin, Andreja Špernjak	73
Invazivne tujerodne rastline so evolucijski prvaki: hipoteze uspešnosti, funkcionalne lastnosti in vloga človeka Invasive alien plants are evolutionary champions: success hypotheses, functional traits and the role of humans Eva Horvat	97
Dokazovanje obstoja objekta s pomočjo verjetnosti Using Probability to Prove Existence Tanja Dravec	109
Večdimenzionalna oksidacija silicijevega karbida Multidimensional Oxidation of Silicon Carbide Vito Šimonka	121
Sinteza paracetamola in antifebrina Synthesis of paracetamol and antifebrin Jelena Spasić, Brina Cenc Dojer	129
Optimizacija prehrane krav molznic z linearnim programiranjem Optimization of Dairy Cow Feed using Linear Programming Matilde Oliveira	141

Tanabejev lok med slikarji in okulisti

Tanabe's arc between painters and ophthalmologists

Drago Bokal *

drago.bokal@um.si

Četrti julij dva tisoč šestindvajset. Združene države praznujejo dvesto petdeset letnico, Iran žaluje za ajatolo, mi pa se namakamo na obali dalmatinskih otokov. Pravkar sem prebral Franklovo *Man's Search for Meaning* v angleškem prevodu Ilse Lasch [1]. V prvem delu opisuje izkušnjo trpljenja v taboriščih, v drugem poda osnove logoterapije, tretje dunajske psihoterapevtske šole, in v tretjem poda argumentacijo za tragični optimizem.

Frankl razliko med logoterapijo, temelječo na svobodi iskanja smisla, in prejšnjima dunajskima šolama — Freudovo psihoanalizo, temelječo na volji do ugodja, in Adlerjevo individualno psihologijo, temelječo na volji do moči — ponazori kot razliko med slikarjem in okulistom. Slikar naslika svet, kakršnega vidi sam, in v učencu išče potrditev svojega sloga; okulist pa učenca opolnomoči, da svet z lastnimi očmi vidi razločneje, in mu za to posodi lečo, o kateri ve nekaj več. Ko sem knjigo bral, se mi je vsilila misel, da isto velja za znanje — in da svojo pot dolgujem množici okulistov, ki sem jih imel srečo srečati.

Eno bolj slikovitih izkušenj je prispevala profesorica biologije. S sošolcem sva takrat odkrivala veselje obvladovanja razširjenega DOS-ovega pomnilnika, ki ga je omogočal Watcom C++. Razvila sva lasten zbirnik, sošolec je zanj pripravil interpreter v operacijskem sistemu, ki je bil za tiste čase prva izkušnja z izobiljem pomnilnika, jaz pa sem v Turbo Visionu spisal urejevalnik, prevajalnik in razhroščevalnik. Naredila sva kakih deset različnih „vrst“ programov, jih posadila v štiri megabajte pomnilnika in v računalniški učilnici na slabih dvajsetih računalnikih več tednov izvajala evolucijo tega ekosistema. Sredi eksperimenta sva izvedela, da je treba za zadnjo oceno v tretjem letniku v seminarski nalogi opisati nek ekosistem — katerikoli. Vprašala sva profesorico, ali res katerikoli. „Katerikoli,“ je rekla. Tudi tegale najinega, umetnega? „Tudi tega. A poudarita biološki vidik: kaj so vrste, kaj viri, kako poteka evolucija?“ Z veseljem sva eksperiment še nadgradila in ga opisala.

Nekaj mesecev pozneje sem s pomočjo Hermes Softlaba na poletni praksi v Palo Altu v Stanfordski knjižnici naletel na znanstveno monografijo *Artificial Life* [2]. Vzbujejo zanimanje je peljalo do prijave na poštni seznam o genetskih algoritmih in naprej do prvega znanstvenega odkritja — potrebe po spremembi definicije izoperimetričnega kvocienta tridimenzionalnih vložitev [3, 4]. Profesorica ni rekla, „to ni biologija“. Pustila je, da svojo lastno lečo opremim z njenim znanjem — in prav iz tistega drobnega „da“ je zraslo vse preostalo.

Dave Snowden je znanje razvrstil v štiri polja; okvir imenuje Cynefin [5]. V enostavnem je

*Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Koroška cesta 160, 2000 Maribor, Slovenija
E-naslov: drago.bokal@um.si (Drago Bokal)

najboljša izbira očitna in jo zna utemeljiti skoraj vsak. V zapletenem dobra praksa obstaja, a jo utemelji šele strokovnjak po dovolj skrbni analizi. V kompleksnem odgovora vnaprej ni — red se pokaže in obrazloži šele za nazaj, skozi poskušanje in čas. V kaotičnem povezave med vzrokom in posledico sploh ne znamo verodostojno obrazložiti in je treba najprej ukrepati in ubesediti, da sploh nastane kakšen red. Podajmo primer take ubeseditve.

Kanadski slikar Takao Tanabe je v svojem dolgem opusu ilustriral vse štiri stopnje razumevanja znanja [6]. Začel je v kaosu — v surovem, ekspresivnem uvidu mladih let (*A Landscape with Trees*, 1956). Iz njega se je umaknil v strogi geometrijski red, jasen, a od resničnosti odtujen (*Untitled #5*, 1968). Strogi red je omehčal s preprosto resničnostjo: naslikal je realistično puščavo, prostrane, navidez preproste krajine, v katerih se globina pokaže šele skozi skoraj geometrijske vzorce, z resničnostjo le nekoliko obogatene (*The Land 20/75*, 1975). V naslednjem koraku je prišel do pozne, veristične, skoraj fotografske podobe, ki natančno upodobi vso kompleksnost resničnosti (*Inside Passage 5/98*, 1998). Poimenujmo to pot Tanabejev lok. Je ilustracija zorenja spoznanja — od kaosa prve mladostne zmede skozi avtoritarni red pravil v kompleksnost resničnosti, do jasnosti, ki jo šele na koncu tega zorenja res vidimo. Matematik jo prepozna v vsakem dokazu, ki se iz kaosa posameznih primerov dvigne v razumevanje. In bistveno: Tanabe je na tej poti dozorel tudi sam — iz slikarja, ki svet postavlja po svoje, v okulista, ki pusti, da resničnost nagovori. Lok torej ni le pot spoznavanja; je pot postajanja tistega, ki zna gledati.

Naj to ponazorim s korespondenco izpitne komisije, ki sem jo doživel nekje v dobrih dvajsetih letih poučevanja.

Najprej kaos težkih nalog. Študent je izpit opravljal že večkrat. Precenjeval je svoje moči, ponujeno pomoč profesorja je odklanjal in se vsakič znova vračal na izpit — ter vsakič znova obstal. Naloge so terjale lastno idejo, ne priučenega recepta — ravno tista kompleksnost, ki je pred rešitvijo videti kot kaos.

Potem brutalna preprostost padca. Nekaj neuspešnih poskusov pozneje, na komisijskem izpitu je predlog ocene: pri vsaki nalogi nič več kot nekaj točk. Pade. Vse znanje, skrčeno na pet številke in eno samo sporočilo — daleč je še do cilja. Črno-bela slika.

Potem razprava o odgovornosti za napredek. Eden od članov komisije je opozoril, da izdelek odraža precej več truda, kot pravijo točke, in da sporočilo „daleč si“ študentu ne pomaga — pomagala bi mu strukturirana povratna informacija, ki pove, kaj gre v pravi smeri in kje naj znanje poglobi. Sledila je iskrena razprava: čigava je odgovornost, da študent napreduje? Kaj sploh je naloga učitelja — soditi ali opolnomočiti? Bi si želeli, da bi tak učitelj nekoč učil, opolnomočal naše otroke in kako ga pripeljati do tega, da bi si to želel tudi sam?

In nazadnje resničnost Tanabejevega loka. Kot je zapisal eden od članov: začetna ocena je nakazovala črno-belo sliko, razprava pa je oklestila šum na lastnih izkušnjah temelječih predpostavk in narisala celovito sliko, ki je lahko črno-bela zgolj v poenostavljenih sodbah, projekcijah v številke, v matematičnih izrekih in dokazih. Izpit je iz kaosa skozi surovo sodbo in razpravo o odgovornosti, prišel do večplastne slike — do Tanabejevega loka. Številčna ocena se ni spremenila; spremenila se je informacija, s katero je bila opremljena, in kaj lahko študent z njo naredi.

Iz tega sledi morda neprijeten sklep. Svojo nalogo si lahko poenostavimo — vso to kompleksnost preprosto projiciramo v eno število, ki mu pravimo ocena, in odgovornost za

interpretacijo prepustimo naslovniku, študentu. V množici študentov, ki jih ocenjuje en ocenjevalec, je to pogosto neizogibno. A poenostavitev nekaj stane. Z njo izgubimo stik s kompleksno resničnostjo in začnemo napačno brati njene signale. Ocena „pet od dvajsetih“ je kot koordinata resnična in uporabna; a če jo zamenjamo za sliko, spregledamo prav to, kar signalizira resničnost — kaj študent že zna, kje se mu zatika in kaj bi ga pripeljalo naprej.

In prav tu je izbira. Se dijaki ali študentje učijo — in mi presojava — zaradi veselja nad opolnomočenjem lastnih leč, ali zaradi trdega, od avtoritete zapovedanega dela, ki od njih terja potrditev našega sloga? Je kompleksna resničnost sploh lahko le eno od tega? Si v svetu tekmovalja v zmožnosti odkrivanja lahko privoščimo zanemarjanje katere koli od obeh možnosti? Prvo je pot okulista in celovit Tanabejev lok; drugo je slikarjeva zaprta zanka, v kateri je učencu najbolj oportuno pritrjevati in vso avtoriteto ter odgovornost prepustiti mojstru — s tem pa po principu neuporabe ali celo zaradi aktivnega zatiranja atrofirajo želje po odkrivanju in prevzemanju lastne odgovornosti. Ko mojster opeša, pa tak slikar prevzame njegov prapor avtoritarnega utemeljevanja slikarske šole.

Ob vzponu strojev, ki reprodukcijo in pritrjevanje ustvarijo v delčku časa, postane ta izbira pomembnejša kot kdaj prej. Mar ni cilj človeške vzgoje prav tisto, česar stroj ne more znati — odkrivanje zanosa raziskovanja in spoznavanja in prevzemanje odgovornosti za njegov pomen, njegovo vtkanje v človeške odnose, delo, skupnost in družbo? Začetno potrebo po slikanju osnovnih konceptov izostrimo z okulistično uporabo teh konceptov na vsebinah, ki rastejo iz notranje motivacije študentov. In povejmo jim to ter jih opolnomočimo, da tudi sami začutijo svojo lečo in iz slikarskih in okulističnih tehnik, ki so jih spoznavali v svojem zorenju, postanejo okulisti.

Ta premislek pišem v trenutku, ko slovenska šola vstopa v prenovu. Minister napoveduje, da bomo devetletko nadomestili s prenovljeno osemletko — prvi rod vanjo vstopi v šolskem letu 2028/29 — med stebri prenove pa sta tudi vrnitev avtoritete učitelju in reda v šolo [7]. Po letih upadanja na mednarodnih preverjanjih (PISA) je klic po redu razumljiv. A red je sredstvo, ne cilj; avtoriteta brez poslušanja je nevarna natanko tako, kot smo videli pri slikarju, ki ne zna biti okulist.

Avtoriteto učitelju vsekakor da — a le, če je opremljena z odgovornostjo. Z odgovornostjo za red, za medsebojno spoštovanje in za dialog. Avtoriteta brez te odgovornosti je slikarjeva: red vzpostavlja zato, da utrdi sebe in izsili pritrjevanje svojemu slogu. Avtoriteta z njo je okulistova, zaslužena. Red vzpostavlja zato, da nastane prostor, v katerem učenec sploh lahko izostri svojo lečo. Prvi red zapira, drugi odpira. Ista beseda, dva loka.

In tu nas okoliščine nagovarjajo z redko priložnostjo. Prihajajo manjštevilske generacije. Namesto da bi v manjšem številu otrok videli razlog za ukinjanje oddelkov in odpušcanje učiteljev, pogledjmo isto številko z drugo lečo — kot manjše razrede, več učitelja na učenca, več prostora za natanko tisto kombinacijo slikanja in okulistike, ki jo otrok potrebuje v svojem deležu. Stroj bo reprodukcijo — in pritrjevanje — opravil ceneje in hitreje; česar ne zna, je zgraditi mentorski odnos in z njim izostriti lečo posameznega otroka. In prav to je delo, ki bo vedno rezervirano za učitelja, ki je mentor, ki je okulist. Ta pristop manjštevilske generacije olajšajo.

Zadnji člen tega loka pa niso ne učitelji ne stroji, ampak starši. Red in pozornost se ne rodita v učilnici; tja ju otrok prinese — ali pa ne. Hkrati z otroki lahko poskusimo vzgojiti

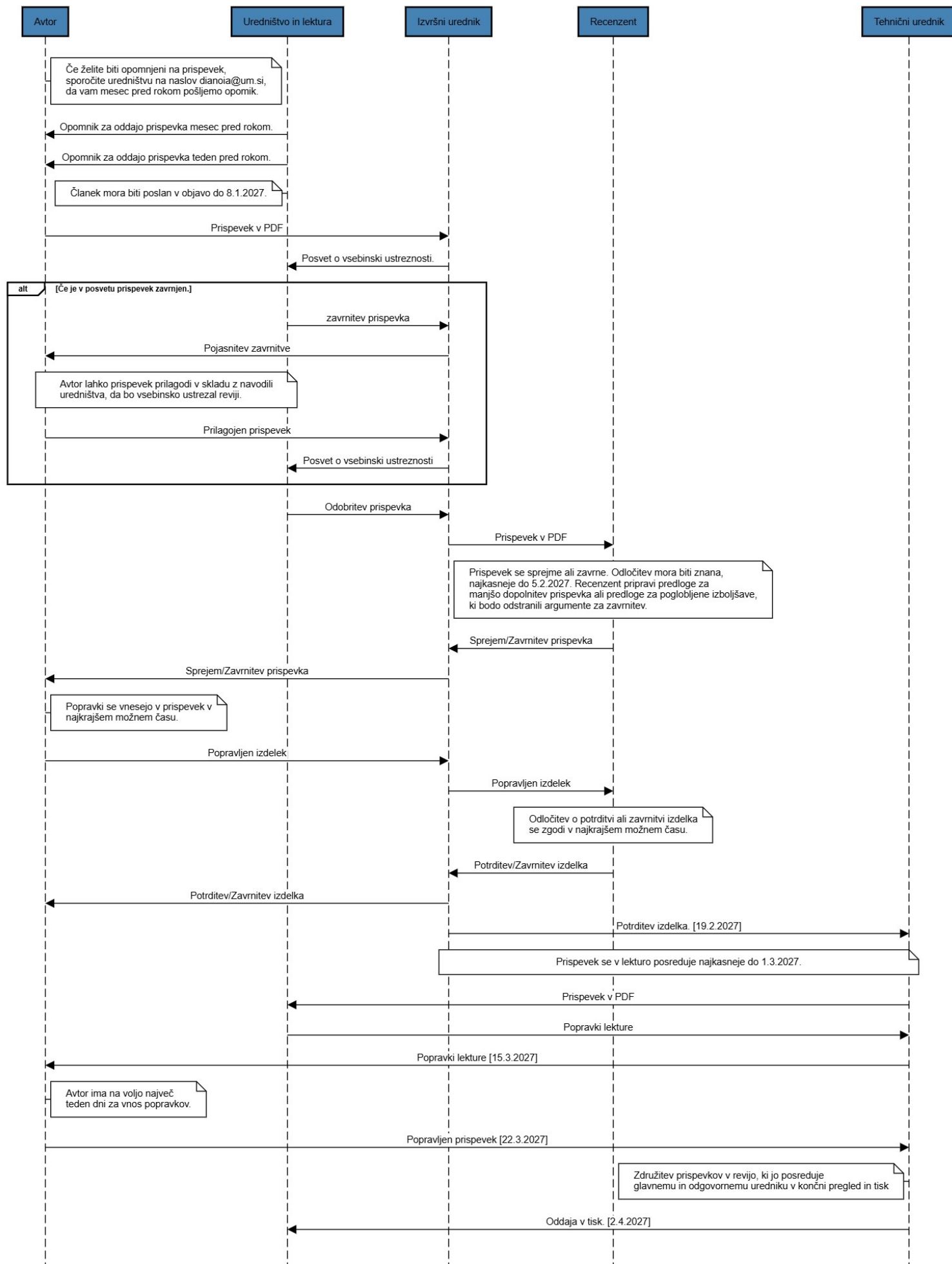
tudi starše, da je njihova odgovornost, da pripeljejo otroka v šolo slišane, umirjenega in pozornega, da razume koncept meje in iskanja znanja, ki ga zanima — sicer otrok ujame kvečjemu površino slikarske tehnike, nikoli pa globine svoje lastne leče. Šele urejen in pozoren otrok lahko prehodi Tanabejev lok do konca.

Prenova je torej priložnost, ne grožnja — če red razumemo kot okulisti in ne kot slikarji. Vrnimo učitelju avtoriteto, a z njo odgovornost; izkoristimo manjštevilične generacije za bližino, ne za krnitev in varčevanje; in v to odgovornost povabimo tudi starše. Bodimo okulisti — in vzgojimo okuliste, med učitelji, med starši in v otrocih samih.

Literatura

- [1] Frankl, V. E. *Man's Search for Meaning* (prev. Ilse Lasch). Boston: Beacon Press, 1962 (izv. *Ein Psychologe erlebt das Konzentrationslager*, 1946).
- [2] Langton, C. G. (ur.). *Artificial Life* (Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity). Redwood City: Addison-Wesley, 1989.
- [3] Pisanski, T., Kaufman, M., Bokal, D., Kirby, E. C., Graovac, A. Isoperimetric Quotient for Fullerenes and Other Polyhedral Cages. *Journal of Chemical Information and Computer Sciences* 37(6), 1997, 1028–1032. DOI: 10.1021/ci970228e.
- [4] Bokal, D. Evolutionary Algorithms for Cluster Geometry. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry* 38, 1998, 99–109.
- [5] Snowden, D. J., Boone, M. E. A Leader's Framework for Decision Making. *Harvard Business Review* 85(11), 2007, 68–76.
- [6] Zadnik Stirn, L. Making sense of knowledge: an interview with Drago Bokal, 2026. Navedene slike: Takao Tanabe, *A Landscape with Trees* (1956), *Untitled #5* (1968), *The Land* 20/75 (1975), *Inside Passage* 5/98 (1998).
- [7] Rončević, B. (izjave). Odpravili bomo devetletko, v prenovljeno osemletko prvič v šolskem letu 2028/29. RTV SLO, 2026. <https://www.rtvsllo.si/slovenija/roncevic-odpravili-bomo-devetletko-v-prenovljeno-osemletko-prvic-v-solskem-letu-2028-29/793136>

Potek objave prispevka



Uporabnost generativne umetne inteligence pri oblikovanju pisnih preizkusov znanja iz biologije

The Use of Generative Artificial Intelligence in Designing Written Biology Assessments

Sara Temlin, Andreja Špernjak

Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Koroška cesta 160, 2000 Maribor, Slovenija

Povzetek

Generativna umetna inteligenca (UI) se vse pogosteje uporablja tudi v izobraževanju, vendar je primerjalnih analiz kakovosti pisnih preizkusov znanja, ustvarjenih z različnimi generativnimi orodji, še vedno malo. Namen raziskave je bil primerjati kakovost pisnih preizkusov znanja iz biologije, ki so jih ustvarila različna generativna orodja umetne inteligence, ter oceniti njihovo uporabnost z vidika učitelja biologije. V raziskavo je bilo vključenih pet javno dostopnih generativnih orodij (ChatGPT 5.2 – brezplačna in plačljiva različica, Copilot, Gemini 3.0, Perplexity UI in Deep UI). Vsa orodja so prejela enak, predhodno standardiziran poziv (prompt) za pripravo pisnega preizkusa znanja za 8. razred osnovne šole na temo Kosti. Ustvarjeni preizkusi so bili ovrednoteni na podlagi osmih vnaprej določenih didaktičnih in strokovnih kriterijev: časovne ustreznosti, zastopanosti kognitivnih ravni, primernosti strokovne ravni, razumljivosti navodil, strokovne in terminološke ustreznosti, raznolikosti oblik nalog, strukturiranosti preizkusa ter ustreznosti točkovnika. Rezultati so pokazali, da med analiziranimi orodji obstajajo pomembne razlike v kakovosti ustvarjenih preizkusov. Najvišje skupno število točk je doseglo orodje Gemini 3.0, vendar tudi pri njem posamezne pomanjkljivosti zahtevajo strokovni pregled učitelja pred uporabo. Raziskava kaže, da lahko generativna umetna inteligenca predstavlja uporaben pripomoček pri pripravi pisnih preizkusov znanja, vendar ne more nadomestiti didaktične in strokovne presoje učitelja.

Ključne besede: generativna umetna inteligenca (UI), biologija, pisni preizkus znanja, chatbot, prompt.

Abstract

Generative artificial intelligence (AI) is increasingly being used in education; however, comparative studies evaluating the quality of written knowledge assessments generated by different AI tools remain limited. The aim of this study was to compare the quality of biology written knowledge assessments generated by different generative AI tools and to evaluate their usefulness from the perspective of a biology teacher. Five publicly available generative AI tools were included in the study: ChatGPT 5.2 (free and paid versions), Copilot, Gemini 3.0, Perplexity AI, and Deep AI. All tools received the same previously standardised prompt to generate a written knowledge assessment on the topic Bones for eighth-grade primary school students. The generated assessments were evaluated using eight predefined didactic and subject-specific criteria: time appropriateness, coverage of cognitive levels, appropriateness of subject level, clarity of instructions, scientific and terminological accuracy, diversity of task formats, assessment structure, and appropriateness of the scoring scheme. The results revealed substantial differences in the quality of the generated assessments across the analysed AI tools. Gemini 3.0 achieved the highest overall score; however, even its assessments contained shortcomings requiring professional review before classroom use. The findings indicate that generative AI can serve as a valuable tool for supporting the preparation of written biology assessments but cannot replace the pedagogical and subject-specific judgement of teachers.

Key words: generative artificial intelligence (AI), biology education, written knowledge assessment, chatbot, prompt

1 UVOD

V zadnjih letih se generativna umetna inteligenca (UI) hitro uveljavlja na različnih področjih, zlasti v izobraževanju, kjer podpira pripravo učnih gradiv, personalizacijo učenja, oblikovanje učnih aktivnosti ter razvoj novih načinov poučevanja in preverjanja znanja. Kljub hitremu razvoju področja je empiričnih raziskav, ki primerjajo kakovost izdelkov različnih generativnih

E-mail naslovi: sara.temlin@student.um.si (Sara Temlin), andreja.spernjak@um.si (Andreja Špernjak)

orodij pri pripravi učnih gradiv, še razmeroma malo [1, 2]. Dostopnost UI ter sposobnost prilagajanja različnim učnim situacijam odpirata nove možnosti za pripravo kakovostnih učnih gradiv, hkrati pa tudi vprašanja o strokovni pravilnosti, didaktični ustreznosti in zanesljivosti ustvarjenih vsebin.

Ena izmed pomembnih možnosti uporabe generativne umetne inteligence je priprava pisnih preizkusov znanja. Oblikovanje kakovostnega pisnega preverjanja znanja predstavlja za učitelje zahteven strokovni proces, saj mora biti preizkus usklajen z učnim načrtom, razvojnimi značilnostmi učencev in učnimi cilji posameznega predmeta. Poleg strokovne pravilnosti mora vključevati ustrezno zastopanost različnih kognitivnih ravni, razumljivo oblikovana navodila, raznolike tipe nalog, logično strukturiranost ter pregleden sistem točkovanja. Generativna orodja umetne inteligence lahko pri pripravi takšnih preizkusov predstavljajo pomembno časovno podporo učitelju, vendar njihova dejanska uporabnost zahteva kritično strokovno presojo.

Generativna umetna inteligenca učinkovito podpira pripravo učnih gradiv, vprašanj za preverjanje znanja, povratnih informacij in drugih učnih dejavnosti [8, 11]. Veliki jezikovni modeli učiteljem omogočajo hitro pripravo različnih oblik nalog, povratnih informacij ter osnutkov preverjanja znanja, hkrati pa avtorji raziskav opozarjajo na potrebo po strokovni presoji kakovosti ustvarjenih gradiv in prilagajanju učnemu kontekstu [3, 4]. Hitro generiranje vsebin s pomočjo UI omogoča prilagajanje zahtevnosti nalog ter pripravo raznolikih učnih aktivnosti, ki spodbujajo aktivno učenje in kritično razmišljanje [11]. Generativna umetna inteligenca se uporablja tudi kot podpora pri pripravi znanstvenih besedil, jezikovnem urejanju in pregledu literature, vendar številni avtorji opozarjajo, da njena uporaba zahteva jasno opredeljena etična načela in odgovorno strokovno presojo uporabnikov [10]. Podobno Tutton in Cohen [7] poudarjata, da umetna inteligenca lahko pomembno podpira učni proces, vendar ne more nadomestiti pedagoške vloge učitelja.

Kljub številnim prednostim raziskave opozarjajo tudi na omejitve generativne umetne inteligence. Med najpogostejše izpostavljenimi težavami so strokovne in vsebinske napake, neustrezna terminologija, pomanjkljiva sinteza informacij, netočno citiranje virov ter pojav t. i. halucinacij, pri katerih modeli ustvarijo navidezno verodostojne, vendar dejansko napačne informacije [9, 10]. Zato ostaja strokovno preverjanje ustvarjenih vsebin s strani učitelja nujen pogoj za njihovo uporabo v izobraževalnem procesu.

Kakovost odgovorov UI je v veliki meri odvisna od ustrezno oblikovanega poziva (prompta) oziroma navodila, ki usmerja generiranje vsebine. Prompt določa namen, vsebino, ciljno skupino, obseg in druge zahteve ustvarjenega izdelka, zato predstavlja enega ključnih dejavnikov uspešne uporabe generativnih modelov [12]. Najnovejše raziskave poudarjajo, da kakovost odgovorov velikih jezikovnih modelov ni odvisna le od zmogljivosti modela, temveč tudi od načina oblikovanja prompta. Jasna, strukturirana in ciljno usmerjena navodila pomembno izboljšajo kakovost generiranih izhodov ter njihovo uporabnost v izobraževalnem procesu [11, 13].

Čeprav številne raziskave obravnavajo uporabo generativne umetne inteligence pri pripravi učnih gradiv in posameznih vprašanj za preverjanje znanja, je bistveno manj raziskav, ki sistematično primerjajo kakovost celotnih pisnih preizkusov znanja, pripravljenih z različnimi generativnimi orodji umetne inteligence. Prav tako primanjkuje raziskav, ki kakovost ustvarjenih preizkusov vrednotijo z vidika didaktičnih in strokovnih kriterijev, pomembnih za poučevanje biologije v osnovni šoli. Kljub številnim objavljenim raziskavam ostaja vprašanje kakovosti celovitih pisnih preizkusov znanja, ki jih ustvarijo različna generativna orodja umetne inteligence, še vedno slabo raziskano. Prav ta pomanjkljiva raziskanost je predstavljala izhodišče pričujoče raziskave.

Namen raziskave je bil primerjati kakovost šestih pisnih preizkusov znanja, ustvarjenih s petimi generativnimi orodji umetne inteligence, ter oceniti njihovo uporabnost pri pripravi pisnega

preverjanja znanja biologije za učence 8. razreda osnovne šole. Uporabnost ustvarjenih preizkusov je bila presojana na podlagi osmih vnaprej določenih didaktičnih in strokovnih kriterijev, ki vključujejo časovno ustreznost preizkusa, zastopanost kognitivnih ravni, primernost strokovne ravni, razumljivost navodil, strokovno in terminološko ustreznost nalog, primernost in raznolikost tipov nalog, strukturiranost preizkusa ter ustreznost točkovnika. Raziskava je skušala odgovoriti na tri raziskovalna vprašanja:

1. Ali brezplačna generativna orodja umetne inteligence pripravijo uporaben pisni preizkus znanja za biologijo v 8. razredu osnovne šole?
2. Kakšne so razlike v kakovosti in uporabnosti med brezplačno in plačljivo različico ChatGPT 5.2 pri pripravi pisnega preizkusa znanja?
3. Katero izmed analiziranih generativnih orodij se izkaže kot najprimernejši pripomoček učitelju biologije pri pripravi pisnega preizkusa znanja?

2 MATERIAL IN METODE

2.1 Raziskovalna zasnova

Raziskava je temeljila na primerjalni analizi kakovosti pisnih preizkusov znanja, ki so jih ustvarila generativna orodja umetne inteligence na podlagi enotnega poziva (prompta). Namen raziskave ni bil vrednotiti posameznih generativnih orodij kot celote, temveč primerjati kakovost ustvarjenih pisnih preizkusov znanja glede na vnaprej določene didaktične in strokovne kriterije. V raziskavo je bilo vključenih pet generativnih orodij, pri čemer sta bili pri orodju ChatGPT ločeno analizirani brezplačna in plačljiva različica. Skupno je bilo zato primerjanih šest ustvarjenih pisnih preizkusov znanja. V raziskavi je bila uporabnost generativnih orodij presojana glede na kakovost ustvarjenih pisnih preizkusov znanja, ocenjenih z osmimi vnaprej določenimi didaktičnimi in strokovnimi kriteriji: časovno ustreznostjo preizkusa, zastopanostjo kognitivnih ravni, primernostjo strokovne ravni glede na razvojno in izobrazbeno raven učencev, razumljivostjo navodil, strokovno in terminološko ustreznostjo nalog, primernostjo in raznolikostjo tipov nalog, strukturiranostjo pisnega preizkusa ter ustreznostjo točkovnika.

2.2 Generativna orodja

V raziskavi smo uporabili pet javno dostopnih generativnih orodij umetne inteligence: ChatGPT 5.2 (brezplačna in plačljiva različica), Microsoft Copilot, Gemini 3.0, Perplexity AI in DeepAI. Izbrana so bila zaradi njihove javne dostopnosti, razširjene uporabe ter možnosti generiranja daljših besedilnih odgovorov, primernih za pripravo učnih gradiv in pisnih preizkusov znanja. Pri vseh orodjih je bil uporabljen enak prompt, brez dodatnih naknadnih navodil ali popravljanja odgovorov. Generiranje vseh šestih preizkusov je bilo izvedeno v istem časovnem obdobju, da bi zmanjšali vpliv morebitnih sprememb modelov umetne inteligence.

2.3 Oblikovanje in standardizacija prompta

Za potrebe raziskave smo pripravili začetno različico prompta, ki je predstavljala besedilno navodilo za generiranje pisnega preizkusa znanja. Prompt je bil v pilotni fazi raziskave večkrat preizkušen in postopno dopolnjevan na podlagi analize ustvarjenih odgovorov. Cilj izboljšav je bil oblikovati čim bolj jasno, natančno in vsebinsko popolno navodilo, ki bi omogočalo primerljivo generiranje pisnih preizkusov znanja. Končna različica prompta je bila nato brez nadaljnjih sprememb uporabljena pri vseh generativnih orodjih, vključenih v raziskavo. Pisni

preizkusi znanja, ustvarjeni z uporabo posameznih generativnih orodij, so zaradi preglednosti vključeni v prilogah 1–6. Končni prompt je določal tematsko področje (Kosti), ciljno skupino (učenci 8. razreda osnovne šole) ter zahteval pripravo pisnega preizkusa, usklajenega z veljavnim učnim načrtom biologije v Sloveniji [16]. Vključeval je natančna navodila glede strukture preizkusa, časovne ustreznosti, sistema točkovanja, zastopanosti različnih tipov nalog ter vključitve nalog, ki pokrivajo vse kognitivne ravni po Bloomovi taksonomiji.

Vsebina prompta za vseh 5 klepetalnih:

"Pripravi pisni preizkus znanja za vsebino kosti pri predmetu biologija za 8. razred osnovne šole, usklajen z učnim načrtom biologije v Sloveniji. Preizkus mora vsebovati: Glavo preizkusa z naslednjimi podatki: naslov Pisni preizkus znanja, tematsko področje (Kosti), ime in priimek učenca, razred, datum, čas pisanja naj bo 45 minut, število možnih točk, doseženo število točk, ocena, procentualni kriterij ocenjevanja ter podpis učitelja. Procentualni kriterij naj bo: 90–100 % → odl (5), 79–89 % → pd (4), 65–78 % → db (3), 50–64 % → zd (2), 0–49 % → nzd (1). Naloge naj se začnejo z lažjimi in stopnjujejo k težjim. 50 % nalog naj pokriva minimalni standard znanja, preostalih 50 % pa višje in zahtevnejše standarde. Vključi različne tipe nalog: izbirne naloge (obkroževanje), dopolnjevanje, kratki odgovori, povezovanje, interpretacija slike/sheme ter pisni odgovor z razlago ali analizo. Vsaka naloga mora imeti jasna navodila in biti točkovana. Seštevek vseh nalog mora biti enak številu možnih točk. Naloge naj pokrivajo vse ravni po Bloomu: pomnjenje (1. nivo), razumevanje (2. nivo), uporaba (3. nivo), analiza (4. nivo), vrednotenje (5. nivo), vendar ne navajaj ravni Bloomove taksonomije ali tipa naloge ob posameznih nalogah. Če je vključena shema, dodaj tudi sliko ali jasno navodilo za vključitev slike."

2.4 Kriteriji vrednotenja

Kakovost šestih ustvarjenih pisnih preizkusov znanja na temo Kosti je bila ocenjena na podlagi osmih vnaprej določenih kriterijev, ki izhajajo iz didaktičnih načel priprave kakovostnega pisnega preverjanja znanja pri biologiji. V raziskavi je bila uporabnost generativnih orodij presojana glede na kakovost ustvarjenih pisnih preizkusov znanja, ocenjenih z vidika njihove didaktične in strokovne ustreznosti.

Po pridobitvi vseh ustvarjenih pisnih preizkusov sta avtorici vsak preizkus neodvisno ovrednotili po enotnih kriterijih, nato pa uskladili končno oceno. V primerih različne začetne ocene sta avtorici dosegli soglasje z razpravo in ponovno presojo posameznega kriterija. Vrednotenje je bilo izvedeno na podlagi celotnih pisnih preizkusov znanja, prikazanih v prilogah 1–6. Posamezni kriteriji so zajemali ključne elemente kakovostnega pisnega preverjanja znanja, kot so časovna ustreznost, zastopanost različnih kognitivnih ravni, strokovna primernost, razumljivost navodil, terminološka pravilnost, raznolikost tipov nalog, strukturiranost preizkusa in ustreznost točkovnika. Opis posameznih kriterijev je prikazan v preglednici 1.

Čeprav je bila skladnost z veljavnim učnim načrtom za biologijo pomemben vidik presoje, ni bila vrednotena kot samostojen kriterij. Upoštevana je bila pri presoji strokovne ravni nalog ter njihove strokovne in terminološke ustreznosti.

Preglednica 1. Operacionalizacija kriterijev vrednotenja kakovosti ustvarjenih pisnih preizkusov znanja.

Kriterij	Predmet presoje	Vrednotenje kakovosti
Časovna ustreznost preizkusa	Ali sta obseg in zahtevnost preizkusa primerna za izvedbo v eni šolski uri?	1 – neustrezno: preizkus po obsegu ali zahtevnosti ni izvedljiv v eni šolski uri. 2 – pomanjkljivo: preizkus bi bilo mogoče izvesti le z večjimi prilagoditvami obsega ali zahtevnosti. 3 – ustrezno: preizkus je po obsegu in zahtevnosti primeren za izvedbo v eni šolski uri.

Zastopanost kognitivnih ravni	Ali naloge vključujejo različne kognitivne ravni po Bloomovi taksonomiji in omogočajo preverjanje znanja na različnih stopnjah zahtevnosti?	1 – neustrezno: naloge preverjajo predvsem pomnjenje dejstev. 2 – pomanjkljivo: vključene so le nižje kognitivne ravni, višje miselne procese preverjajo le izjemoma. 3 – zadovoljivo: naloge vključujejo več različnih kognitivnih ravni, vendar njihova zastopanost ni povsem uravnotežena. 4 – ustrezno: naloge vključujejo različne kognitivne ravni in omogočajo kakovostno preverjanje znanja na več stopnjah zahtevnosti. 5 – zelo ustrezno: naloge smiselno vključujejo vse predvidene kognitivne ravni po Bloomovi taksonomiji.
Primernost strokovne ravni	Ali je vsebina nalog primerna razvojni in izobraževalni ravni učencev 8. razreda osnovne šole?	1 – neustrezno: večina nalog po zahtevnosti ni primerna učencem 8. razreda. 2 – pomanjkljivo: naloge so le delno prilagojene učencem; pojavljajo se številne prezahtevne vsebine ali izrazi. 3 – večinoma ustrezno: večina nalog ustreza razvojni ravni učencev, vendar se pojavljajo posamezne prezahtevne vsebine ali izrazi. 4 – ustrezno: naloge so prilagojene razvojni ravni učencev in skladne z učnim načrtom.
Jasnost in nedvoumnost navodil	Ali so navodila jasno oblikovana in učencu omogočajo pravilno razumevanje načina reševanja nalog?	1 – neustrezno: navodila so nejasna ali dvoumna. 2 – pomanjkljivo: navodila so le deloma jasna in dopuščajo različne razlage. 3 – večinoma ustrezno: navodila so večinoma jasna, vendar bi jih bilo mogoče na posameznih mestih natančneje oblikovati. 4 – ustrezno: navodila so jasno in nedvoumno oblikovana.
Strokovna in terminološka ustreznost	Ali so uporabljeni biološki pojmi strokovno pravilni in terminološko ustrezni?	1 – neustrezno: naloge vsebujejo več strokovnih ali terminoloških napak. 2 – pomanjkljivo: pojavljajo se posamezne strokovne ali terminološke netočnosti. 3 – večinoma ustrezno: večina izrazov je pravilnih, vendar se pojavljajo manjše terminološke nedoslednosti. 4 – ustrezno: uporabljena terminologija je strokovno pravilna, dosledna in skladna z biologijo 8. razreda.
Primernost in raznolikost oblik nalog	Ali preizkus vključuje različne oblike nalog, ki omogočajo preverjanje različnih oblik in ravni znanja?	1 – neustrezno: preizkus vključuje malo različnih oblik nalog. 2 – pomanjkljivo: preizkus vključuje nekaj različnih oblik nalog, vendar je njihova raznolikost omejena. 3 – večinoma ustrezno: preizkus vključuje več različnih oblik nalog, vendar bi bila mogoča večja pestrost. 4 – ustrezno: preizkus vključuje raznolike oblike nalog, ki omogočajo celovito preverjanje znanja.
Strukturiranost pisnega preizkusa	Ali je preizkus logično organiziran, pregledno oblikovan in razporejen od manj do bolj zahtevnih nalog?	1 – neustrezno: preizkus ni logično organiziran. 2 – pomanjkljivo: struktura je le deloma pregledna in zaporedje nalog ni dosledno. 3 – večinoma ustrezno: preizkus je večinoma logično organiziran, vendar se pojavljajo manjša odstopanja. 4 – ustrezno: preizkus je pregledno oblikovan in logično stopnjuje zahtevnost nalog.
Ustreznost točkovnika	Ali je sistem točkovanja pregleden in sorazmeren z zahtevnostjo posameznih nalog?	1 – neustrezno: točkovnik ni pregleden in ni skladen z zahtevnostjo nalog. 2 – pomanjkljivo: pojavljajo se pomembna neskladja med zahtevnostjo nalog in številom točk. 3 – večinoma ustrezno: večina nalog je ovrednotena ustrezno, vendar se pojavljajo posamezna odstopanja. 4 – ustrezno: točkovnik je pregleden, dosleden in sorazmeren z zahtevnostjo nalog.

Vrednotenje kakovosti ustvarjenih pisnih preizkusov je temeljilo na opisni ocenjevalni rubriki (preglednica 1), ki je omogočala enotno presojo vseh analiziranih generativnih orodij. Vsak kriterij je bil ovrednoten samostojno, skupna ocena posameznega orodja pa je predstavljala vsoto doseženih ocen po vseh osmih kriterijih.

3 REZULTATI

3.1 Časovna ustreznost pripravljenih pisnih preizkusov

Časovna ustreznost pripravljenih pisnih preizkusov se je med analiziranimi generativnimi orodji razlikovala (preglednica 2). Najvišjo oceno (2) so dosegli brezplačna in plačljiva različica ChatGPT 5.2 ter Copilot, pri katerih je ocenjeni čas reševanja znašal med 11 in 15 minut. Gemini 3.0, Perplexity UI in Deep UI so prejeli nižjo oceno (1), saj je bil predvideni čas reševanja krajši od 10 minut. Nobeno izmed analiziranih orodij ni pripravilo preizkusa, ki bi po časovni zahtevnosti dosegel optimalni razpon, določen v kriterijih vrednotenja.

Preglednica 2: Časovna ustreznost pripravljenih pisnih preizkusov znanja.

Generativno orodje	Ocena časovne ustreznosti (1-neustrezno, 2-pomanjkljivo, 3- ustrezno)	Utemeljitev ocene (čas reševanja [min])
brezplačen Chat GPT 5.2	2	11
plačljiv Chat GPT 5.2	2	11
Copilot	2	15
Gemini 3.0	1	10
Perplexity UI	1	10
Deep UI	1	7

Iz dobljenih rezultatov je razvidno, da analizirana generativna orodja praviloma pripravljajo časovno prekratke pisne preizkuse, zato bi bilo pred njihovo uporabo v pedagoški praksi potrebno prilagoditi obseg oziroma zahtevnost nalog.

3.2 Zastopanost kognitivnih ravni nalog

Analiza zastopanosti kognitivnih ravni je pokazala, da je večina analiziranih generativnih orodij pripravila naloge, ki vključujejo štiri kognitivne ravni po Bloomovi taksonomiji (preglednica 3). Brezplačna in plačljiva različica ChatGPT 5.2, Copilot, Gemini 3.0 ter Perplexity UI so dosegli oceno 4, saj so naloge poleg ravni pomnjenja vključevale tudi razumevanje, uporabo oziroma analizo. Deep UI je dosegel oceno 3, ker je pripravil naloge, ki so zajemale le tri kognitivne ravni. Nobeno izmed analiziranih generativnih orodij ni vključilo vseh petih kognitivnih ravni Bloomove taksonomije.

Preglednica 3: Zastopanost kognitivnih ravni v pripravljenih pisnih preizkusih znanja.

Generativno orodje	Ocena zastopanosti kognitivnih nivojev (1-5)	Naloge kognitivnih nivojev
brezplačen Chat GPT 5.2	4	Znanja, razumevanja, uporabe in analize.
plačljiv Chat GPT 5.2	4	Znanja, razumevanja, uporabe in analize.
Copilot	4	Znanja, razumevanja, uporabe in analize.
Gemini 3.0	4	Znanja, razumevanja, uporabe in analize.
Perplexity UI	4	Znanja, razumevanja, analize in vrednotenje.
Deep UI	3	Znanje, razumevanje in vrednotenje.

Na podlagi primerjave posameznih orodij ugotavljamo, da analizirana generativna orodja večinoma pripravljajo naloge, ki preverjajo različne kognitivne ravni znanja, vendar nobeno izmed njih ni zagotovilo celovite zastopanosti vseh ravni Bloomove taksonomije.

3.3 Primernost strokovne ravni glede na učenčev nivo

Analiza strokovne ravni pripravljenih pisnih preizkusov je pokazala, da je večina generativnih orodij pripravila naloge, ki so bile večinoma prilagojene učencem 8. razreda osnovne šole (preglednica 4). Najvišjo oceno (4) je doseglo orodje Gemini 3.0, saj so vse naloge ustrezale učnemu načrtu in razvojni stopnji učencev. Brezplačna in plačljiva različica ChatGPT 5.2, Copilot, Perplexity UI ter Deep UI so prejeli oceno 3 zaradi uporabe posameznih prezahtevnih strokovnih izrazov ali vključitve vsebin, ki presegajo učni načrt za 8. razred osnovne šole [16]. Najpogostejše pomanjkljivosti so bile povezane z uporabo strokovne terminologije in zahtevnejših anatomskih pojmov.

Preglednica 4: Primernost strokovne ravni pripravljenih pisnih preizkusov glede na učenčev nivo.

Generativno orodje	Ocena strokovne primernosti (1-4)	Utemeljitev ocene
brezplačen Chat GPT 5.2	3	Uporabljena beseda ligament. <i>Beseda ligament kot strokovni izraz ni posebej izpostavljena kot obvezen pojem v učnem načrtu biologije za 8. razred OŠ v Sloveniji.</i>
plačljiv Chat GPT 5.2	3	Naloga zahteva navedbo korakov celjenja kosti, kar se mi zdi primerneje za srednješolski nivo.
Copilot	3	Uporabljeni pojmi epifiza in diafiza, aksialni skelet, tečajast in sedlast sklep.
Gemini 3.0	4	Vse naloge ustrezajo nivoju znanja.
Perplexity UI	3	Uporabljeni izrazi temporalna kost, kranialna kost, parietalna kost.
Deep UI	3	Uporabljen izraz hrušnica.

Iz primerjave generativnih orodij izhaja, da večina analiziranih generativnih orodij pripravlja strokovno ustrezne pisne preizkuse, vendar se pri nekaterih pojavljajo posamezni izrazi ali vsebine, ki presegajo predvideno raven znanja učencev 8. razreda osnovne šole.

3.4 Razumljivost navodil

Razumljivost navodil je bila pri večini analiziranih generativnih orodij ocenjena kot zelo dobra (preglednica 5). Brezplačna in plačljiva različica ChatGPT 5.2, Copilot ter Gemini 3.0 so dosegle najvišjo oceno (4), saj so bila navodila jasna, nedvoumna in jezikovno ustrezna. Deep UI je prejel oceno 3 zaradi manj natančno oblikovanih navodil pri posameznih nalogah, medtem ko je Perplexity UI dosegel oceno 2 zaradi nejasnih navodil in formulacij, ki bi lahko učence zmedle ali usmerjale k pravilnemu odgovoru.

Preglednica 5: Razumljivost navodil v pripravljenih pisnih preizkusih znanja.

Generativno orodje	Ocena razumljivosti navodil (1-4)	Utemeljitev ocene
brezplačen Chat GPT 5.2	4	Navodila so razumljiva, nedvoumna in jezikovno ustrezna. Povedi so smiselno strukturirane, dovolj kratke. Uporabljena terminologija je primerna starosti učencev in skladna z učno vsebino. Navodila so vsebinsko povezana z nalogo.
plačljiv Chat GPT 5.2	4	Navodila so oblikovana jasno in sistematično, brez nejasnosti ali zavajajočih elementov. Terminologija je ustrezna starosti učencev ter smiselno povezana z učno vsebino. Učenec iz

		navodil brez težav razbere, kaj mora narediti in kako naj nalogo reši.
Copilot	4	Navodila so razumljiva. Iz navodil je nedvoumno razvidno, kaj se od učenca pričakuje in kako naj pristopi k reševanju naloge, zato dodatna pojasnila niso potrebna.
Gemini 3.0	4	Navodila so razumljivo zapisana, logično strukturirana in vsebinsko usklajena z nalogo. Opredeľjujejo zahteve naloge, zato učenec natančno ve, kaj se od njega pričakuje, in pri reševanju ne potrebuje dodatnih razlag.
Perplexity UI	2	Pri navodilih so dopisani nivoji znanja, kar lahko zmede učenca pri reševanju. Prav tako je navodilo pri označevanju delov človeškega skeleta pomanjkljivo in sugerira pravilni odgovor.
Deep UI	3	Kosti, ki ne spadajo v <i>osovje</i> človeškega telesa.

Iz dobljenih rezultatov je razvidno, da večina generativnih orodij pripravlja jasna in razumljiva navodila, pri posameznih orodjih pa se še vedno pojavljajo pomanjkljivosti, ki lahko vplivajo na pravilno razumevanje nalog.

3.5 Strokovna in terminološka ustreznost nalog

Medtem ko smo s kriterijem 4 (razumljivost navodil) presojali zahtevnost nalog glede na razvojno stopnjo učencev, smo v tem kriteriju vrednotili strokovno pravilnost vsebine in doslednost uporabljene terminologije. Primerjava ocen je pokazala razlike med analiziranimi generativnimi orodji (preglednica 6). Brezplačna različica ChatGPT 5.2, Copilot, Gemini 3.0 in Deep UI so dosegli oceno 3, saj so bile ugotovljene posamezne terminološke ali strokovne nenatančnosti, predvsem zaradi uporabe terminologije, ki ni povsem skladna z učnim načrtom za biologijo v 8. razredu osnovne šole [16], ter zaradi posameznih strokovno vprašljivih odgovorov. Plačljiva različica ChatGPT 5.2 in Perplexity UI sta prejela oceno 2 zaradi več ugotovljenih strokovnih in terminoloških pomanjkljivosti, povezanih predvsem z neustreznimi poimenovanji anatomskih struktur, nenatančno oblikovanimi trditvami ter strokovno vprašljivimi predvidenimi odgovori.

Preglednica 6: Strokovna in terminološka ustreznost nalog v pripravljenih pisnih preizkusih znanja.

Generativno orodje	Ocena strokovne in terminološke ustreznosti nalog (1-4)	Utemeljitev ocene
brezplačen Chat GPT 5.2	3	Podani odgovori v nalogi so gobasta kost, kompaktna kost. Predlog je gobasto kostno tkivo in kompaktno ali čvrsto kostno tkivo.
plačljivi Chat GPT 5.2	2	Podani odgovori v nalogi so gobasta kost, kompaktna kost. Predlog je gobasto kostno tkivo in kompaktno ali čvrsto kostno tkivo. Prav tako je nesmiselno, da je pravilni odgovor pri nalogi povezovanja, da rdeči kostni mozeg omogoča gibanje okončin. Trditev v notranjosti dolgih kosti se nahaja rumeni kostni mozeg ni povsem pravilna, saj je v dolgih kosteh tudi rdeči kostni mozeg.
Copilot	3	Podani odgovori v nalogi so gobasta kost, kompaktna kost.
Gemini 3.0	3	Trditev, da se v notranjosti dolgih kosti nahaja kostni mozeg, pri katerem pri odraslih prevladuje maščobno tkivo, pri otrocih pa v njem nastajajo krvne celice, je delno pravilna, didaktično in biološko nenatančna. Ne razlikuje namreč med rdečim in rumenim kostnim mozgom.

Perplexity UI	2	Pri 3 nalogah so nepravilnosti. Učenci se učijo, da ima človeško telo dolge, kratke, ploščate kosti in kosti nepravilnih oblik. Tukaj so omenjene ravne kosti. Prav tako je rebrna kost obravnavana kot kost »debla«.
Deep UI	3	Uporabljen pojem je »peta kost«, kjer je bilo mišljeno kost stopala (petnico).

Iz primerjave ocen lahko sklepamo, da nobeno izmed analiziranih generativnih orodij ni pripravilo terminološko povsem brezhibnega pisnega preizkusa, zato je strokovni pregled učitelja pred uporabo še vedno nujen.

3.6 Raznolikost oblike nalog

Primerjava raznolikosti oblik nalog v pripravljenih pisnih preizkusih je pokazala razmeroma enotne rezultate med analiziranimi generativnimi orodji (preglednica 7). Brezplačna različica ChatGPT 5.2, plačljiva različica ChatGPT 5.2, Copilot, Gemini 3.0 in Perplexity UI so dosegle oceno 3, saj so vključevale več različnih oblik nalog, vendar vseh priporočenih oblik niso uporabile. Deep UI je prejel oceno 2, ker je pripravil manj raznolik nabor nalog, pri katerem so prevladovali posamezni tipi vprašanj.

Preglednica 7: Raznolikost oblik nalog v pripravljenih pisnih preizkusih znanja.

Generativno orodje	Ocena uporabljenih oblik nalog (1-4)	Utemeljitev ocene
brezplačen Chat GPT 5.2	4	Uporabljene oblike nalog smiselno preverjajo znanje in razumevanje; oblike nalog so raznolike in ne omogočajo reševanja zgolj z ugibanjem.
plačljivi Chat GPT 5.2	4	Uporabljene oblike nalog smiselno preverjajo znanje in razumevanje; oblike nalog so raznolike in ne omogočajo reševanja zgolj z ugibanjem.
Copilot	3	Naloga vstavljanja manjkajočih izrazov je naloga ugibanja. Predlog izboljšave je, da UI našteje več izrazov in učenec izbere tistega, ki je ustrezen.
Gemini 3.0	3	Naloga povezovanja delov okostja z njihovo funkcijo je prelahka za ta nivo. Predlog izboljšave je navedba več funkcij okostja.
Perplexity UI	4	Uporabljena oblika nalog smiselno preverja znanje in razumevanje; oblike nalog so raznolike in ne omogočajo reševanja zgolj z ugibanjem.
Deep UI	3	Naloga povezovanja je neustrezna za ta nivo.

Na podlagi dobljenih rezultatov lahko sklepamo, da večina analiziranih generativnih orodij omogoča pripravo razmeroma raznolikih pisnih preizkusov, vendar je za večjo pestrost nalog potrebna dodatna prilagoditev učitelja.

3.7 Struktura pisnega preizkusa

Primerjava strukture pripravljenih pisnih preizkusov je pokazala razlike med analiziranimi generativnimi orodji (preglednica 8). Brezplačna različica ChatGPT 5.2, plačljiva različica ChatGPT 5.2, Copilot in Gemini 3.0 so dosegle oceno 3, saj so pripravile logično organizirane pisne preizkuse, vendar z manjšimi pomanjkljivostmi v razporeditvi ali zaporedju posameznih nalog. Perplexity AI in Deep AI sta prejela oceno 2 zaradi manj pregledne organizacije nalog oziroma manj smiselne strukture celotnega pisnega preizkusa.

Preglednica 8: Struktura pripravljenih pisnih preizkusov znanja.

Generativno orodje	Ocena strukturiranosti testa (1-4)	Utemeljitev ocene
--------------------	------------------------------------	-------------------

brezplačen	4	Naloge so razporejene od lažjih k težjim; test omogoča postopno in smiselno napredovanje.
Chat GPT 5.2	4	Naloge so razporejene od lažjih k težjim; test omogoča postopno in smiselno napredovanje.
plačljivi Chat GPT 5.2	3	Naloge so večinoma razporejene od lažjih k težjim, z manjšimi odstopanji.
Copilot	4	Naloge so razporejene od lažjih k težjim; test omogoča postopno in smiselno napredovanje.
Gemini 3.0	4	Naloge so razporejene od lažjih k težjim; test omogoča postopno in smiselno napredovanje.
Perplexity UI	4	Naloge so razporejene od lažjih k težjim; test omogoča postopno in smiselno napredovanje.
Deep UI	3	Naloge so razporejene od lažjega k težjemu, a prehod med lažjo in težjo nalogo ni postopen.

Iz dobljenih rezultatov je razvidno, da večina analiziranih generativnih orodij pripravi smiselno strukturirane pisne preizkuse, vendar je pri posameznih orodjih pred uporabo priporočljivo preveriti logično zaporedje in preglednost nalog.

3.8 Ustreznost točkovnika

Primerjava točkovnikov je pokazala opazne razlike med analiziranimi generativnimi orodji (preglednica 9). Gemini 3.0 je dosegel najvišjo oceno (4), saj je pripravil pregleden in dosleden točkovnik, pri katerem je bilo število točk smiselno usklajeno z zahtevnostjo posameznih nalog. Brezplačna in plačljiva različica ChatGPT 5.2 ter Copilot so prejeli oceno 3 zaradi manjših neskladij pri razporeditvi točk med posameznimi nalogami. Perplexity UI in Deep UI sta dosegla oceno 2, saj so bile ugotovljene večje pomanjkljivosti pri točkovanju, predvsem glede usklajenosti med zahtevnostjo nalog in številom dodeljenih točk.

Preglednica 9: Ustreznost točkovnika v pripravljenih pisnih preizkusih znanja.

Generativno orodje	Ocena ustreznosti točkovnika (1-4)	Utemeljitev ocene
brezplačen	2	Točkovnik je pregleden, vendar večina nalog je preveč točkovanih, npr. za pravičen odgovor (rastni hrustanec) je predvideval 3 točke.
Chat GPT 5.2	3	Večina nalog je ovrednotena sorazmerno in pregledno, določene naloge preveč točkovane.
Plačljivi Chat GPT 5.2	3	Naloga daljšega odgovora je preveč točkovana. Prav tako so posamezni odgovori preveč točkovani, npr. Predlog dveh ukrepov za izboljšanje stanja kosti je točkovano s 3 točkami.
Copilot	4	Vse naloge so pregledno in sorazmerno ovrednotene glede na zahtevnost in obseg odgovora; enostavne naloge niso precenjene, zahtevnejše naloge niso podcenjene; točkovnik omogoča objektivno in pravično ocenjevanje.
Gemini 3.0	2	Točkovnik je pregleden, vendar večina nalog je preveč ali premalo točkovanih, npr. za pravilno obkrožen odgovor je predvideval 2 točki.
Perplexity UI	2	Točkovnik je pregleden, vendar večina nalog je preveč ali premalo točkovanih, npr. za pravilno dopolnjen stavek (zapis dveh besed) je točkovano s tremi točkami.
Deep UI	2	

Na podlagi primerjave lahko sklepamo, da je prav priprava ustreznega točkovnika eno izmed področij, pri katerem je strokovni pregled učitelja pred uporabo generiranega pisnega preizkusa še posebej pomemben.

3.9 Skupna primerjava generativnih orodij

Za celostno primerjavo uporabnosti analiziranih generativnih orodij smo rezultate vseh osmih kriterijev združili v skupno preglednico (preglednica 10). Posamezni kriteriji so zajemali časovno ustreznost preizkusa, zastopanost kognitivnih ravni, primernost strokovne ravni, razumljivost navodil, strokovno in terminološko ustreznost, raznolikost oblik nalog, strukturiranost preizkusa ter ustreznost točkovnika. Najvišje možno skupno število je znašalo 31 točk.

Preglednica 10: Primerjava generativnih orodij glede na kakovost pripravljenih pisnih preizkusov znanja po posameznih kriterijih vrednotenja.

kriterij vrednotenja	razpon ocen	Generativno orodje					
		ChatGPT 5.2 (brezplačen)	ChatGPT 5.2 (plačljiv)	Copilot	Gemini 3.0	Perplexity UI	Deep UI
čas	(1-3)	2	2	2	1	1	1
kognitivne ravni	(1-4)	4	4	4	4	4	3
strokovna raven	(1-4)	3	3	3	4	3	3
navodila	(1-4)	4	4	4	4	2	3
terminologija	(1-4)	3	2	3	3	2	3
oblike nalog	(1-4)	4	4	3	3	4	3
struktura	(1-4)	4	4	3	4	4	3
točkovnik	(1-4)	2	3	3	4	2	2
Skupno število točk		26	26	25	27	22	21

Na podlagi skupne primerjave vseh osmih kriterijev je največ točk doseglo generativno orodje Gemini 3.0 (27 točk), ki se je izkazalo kot najbolj uravnoteženo orodje za pripravo pisnega preizkusa znanja iz biologije za učence 8. razreda osnovne šole. Visoko oceno je doseglo predvsem zaradi ustrezne strokovne ravni nalog, preglednega točkovnika ter logične strukturiranosti preizkusa.

Brezplačna in plačljiva različica ChatGPT 5.2 sta dosegli enako skupno število točk (26). Obe različici sta pripravili dobro strukturirana pisna preizkusa z raznolikimi oblikami nalog in jasnimi navodili. Razlike med njima so bile majhne in so se pokazale predvsem pri strokovni in terminološki ustreznosti nalog ter pri pripravi točkovnika.

Copilot je dosegel 25 točk in pripravil uporaben pisni preizkus, vendar so bile ugotovljene manjše pomanjkljivosti pri raznolikosti oblik nalog, strukturiranosti preizkusa in točkovanju.

Najnižji skupni oceni sta dosegla Perplexity UI (22 točk) in Deep UI (21 točk). Pri obeh orodjih so bile ugotovljene pomanjkljivosti na več področjih, predvsem pri strokovni in terminološki ustreznosti, razumljivosti navodil oziroma ustreznosti točkovnika, zaradi česar bi bila pred uporabo v pedagoški praksi potrebna obsežnejša vsebinska in didaktična prilagoditev.

Iz celostne primerjave vseh osmih kriterijev lahko sklepamo, da analizirana generativna orodja predstavljajo uporaben pripomoček pri pripravi pisnih preizkusov znanja iz biologije, vendar se njihova kakovost med posameznimi orodji pomembno razlikuje, zato ustvarjenih preizkusov ni smiselno uporabljati brez strokovnega pregleda učitelja.

5 ZAKLJUČEK

Iz izsledkov raziskave lahko sklepamo, da lahko generativna umetna inteligenca predstavlja uporaben pripomoček pri pripravi pisnih preizkusov znanja iz biologije, vendar ustvarjenih preizkusov ni mogoče uporabljati brez strokovnega in didaktičnega pregleda učitelja. Med

analiziranimi generativnimi orodji je največ točk doseglo Gemini 3.0, vendar so bila tudi pri njem ugotovljena posamezna področja, ki zahtevajo dodatno strokovno presojo. Podobno ugotavljajo tudi novejša pregledna raziskava [3], ki poudarjajo, da lahko generativna umetna inteligenca pomembno podpira pripravo preverjanja znanja, vendar uspešna vključitev v pedagoško prakso zahteva strokovno presojo učitelja ter ustrezno načrtovanje ocenjevanja.

5.1. Omejitve raziskave

Pri interpretaciji rezultatov raziskave je treba upoštevati več omejitev. Raziskava je zajemala pet javno dostopnih generativnih orodij umetne inteligence ter brezplačno in plačljivo različico ChatGPT 5.2 v enem časovnem obdobju njihove uporabe. Ker se generativni modeli hitro razvijajo in posodablajo, bi lahko prihodnje različice istih orodij pripravile drugačne rezultate. Druga omejitev raziskave je povezana z vsebinskim obsegom analize, saj je bilo vrednotenje izvedeno le na enem učnem področju biologije – vsebini Kosti v 8. razredu osnovne šole. Ugotovitev zato ni mogoče neposredno sploševati na druga vsebinska področja biologije ali na druge šolske predmete.

Raziskava je bila izvedena z enim vnaprej pripravljenim in končnim promptom, ki je bil v pilotni fazi večkrat preizkušen in postopno izboljššan, nato pa v nespremenjeni obliki uporabljen pri vseh analiziranih generativnih orodjih. Takšna zasnova je omogočila primerljivo vrednotenje posameznih orodij, vendar raziskava ni preučevala vpliva različnih načinov oblikovanja promptov na kakovost ustvarjenih pisnih preizkusov znanja [14, 15, 16].

Določeno omejitev predstavlja tudi vrednotenje kakovosti ustvarjenih preizkusov, ki je temeljilo na strokovni in didaktični presoji raziskovalca. Čeprav so bili uporabljeni vnaprej določeni kriteriji vrednotenja, bi bilo v prihodnjih raziskavah smiselno vključiti več neodvisnih ocenjevalcev ter preveriti uporabnost ustvarjenih pisnih preizkusov tudi v dejanskem učnem procesu z analizo uspešnosti učencev.

Kljub navedenim omejitvam raziskava predstavlja pomemben prispevek k razumevanju možnosti uporabe generativne umetne inteligence pri pripravi pisnih preizkusov znanja iz biologije ter odpira možnosti za nadaljnje raziskave na področju didaktične uporabe umetne inteligence v izobraževanju.

Literatura

- [1] Yusuf, A., Pervin, N., Román-González, M., & Noor, N. M. (2024). Generative AI in education and research: A systematic mapping review. *Review of Education*, 12, e3489. <https://doi.org/10.1002/rev3.3489>
- [2] Ogunleye, B., Zakariyyah, K. I., Ajao, O., Olayinka, O., & Sharma, H. (2024). A Systematic Review of Generative AI for Teaching and Learning Practice. *Education Sciences*, 14(6), 636. <https://doi.org/10.3390/educsci14060636>
- [3] Xia, Q., Weng, X., Ouyang, F. et al. (2024). A scoping review on how generative artificial intelligence transforms assessment in higher education. *Int. Journal Educ. Technol. High. Educ.* 21, 40. <https://doi.org/10.1186/s41239-024-00468-z>
- [4] Zhao, J., Chapman, E., & Ghassemi Pour Sabet, P. (2024). Generative AI and Educational Assessments: A Systematic Review. *Education Research & Perspectives*, 51, 124-155. <https://doi.org/10.70953/ERPv51.2412006>
- [5] Ahmad, N. A., Che, M. H., Zainal, A., Abd Rauf, M. F., v Adnan, Z. (2018). Review of chatbots design techniques. *International Journal of Computer Applications*, 181(8), 7-10. Doi: 10.5120/ijca2018917606

- [6] Setiaji B., & Wibowo, F. W. (2016). Chatbot Using a Knowledge in Database: Human-to-Machine Conversation Modeling. *7th International Conference on Intelligent Systems, Modelling and Simulation (ISMS)*, Bangkok, Thailand, pp. 72-77, doi: 10.1109/ISMS.2016.53
- [7] Tutton, M., & Cohen, D. (2025). Reconceptualizing the role of the university language teacher in light of generative AI. *Education Sciences*, 15(1), 56. <https://doi.org/10.3390/educsci15010056>
- [8] Hiremath, G., Hajare, A., Bhosale, P., Nanaware, R., & Wagh, K. S. (2018). Chatbot for education system. *International Journal of Advance Research, Ideas and Innovations in Technology*, 4(3), 37-43. www.ijariit.com
- [9] Pereira, J., & Barcina, M. A. (2019). A chatbot assistant for writing good quality technical reports. In *Proceedings of the Seventh International Conference on Technological Ecosystems for Enhancing Multiculturality*, 59 – 64. <https://doi.org/10.1145/3362789.3362798>
- [10] Salvagno, M., Taccone, F.S. & Gerli, A.G. (2023). Can artificial intelligence help for scientific writing?. *Critical Care* 27, 75. <https://doi.org/10.1186/s13054-023-04380-2>
- [11] Liu, D. (2023). Prompt engineering for educators—making generative AI work for you. YouTube page.
- [12] Schulhoff, S., Ilie, M., Balepur, N., Kahadze, K., Liu, A., Si, C., ... & Resnik, P. (2024). The prompt report: A systematic survey of prompt engineering techniques. *arXiv preprint arXiv:2406.06608*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2406.06608>
- [13] Ekin, S. (2023). Prompt engineering for ChatGPT: a quick guide to techniques, tips, and best practices. Authorea Preprints. <https://doi.org/10.36227/techrxiv.22683919.v1>
- [14] Kiyak, Y. S., & Emekli, E. (2024). A Prompt for Generating Script Concordance Test Using ChatGPT, Claude, and Llama Large Language Model Chatbots. *Revista Española de Educación Médica*, 5(3). <https://doi.org/10.6018/edumed.612381>
- [15] Lin, Z. (2024). How to write effective prompts for large language models. *Nat. Hum. Behav.* 8, 611–615. <https://doi.org/10.1038/s41562-024-01847-2>
- [16] Republika Slovenija, Ministrstvo za vzgojo in izobraževanje & Zavod RS za šolstvo. (n.d.). *Učni načrt: Biologija. Program osnovna šola* [PDF]. Pridobljeno 20. 2. 2026: https://www.gov.si/assets/ministrstva/MVI/Dokumenti/Osnovna-sola/Ucni-nacrti/obvezni/UN_Biologija.pdf

PRILOGE

Priloga 1: Pisni preizkus znanja, generiran z Chat GPT.

PISNI PREIZKUS ZNANJA

Predmet: Biologija Tematsko področje: Kost

Ime in priimek učenca: _____ Razred: _____
Datum: _____ Čas pisanja: 45 minut Število možnih točk: 50
Doseženo število točk: _____ / 50 Ocena: _____

Procentualni kriterij ocenjevanja:

90–100 % → odl (5) \ 79–89 % → pd (4) \

65–78 % → db (3) \ 50–64 % → zd (2) \ 0–49 % → nzd (1)

Podpis učitelja: _____

1. naloga: Obkroži pravilni odgovor. (5 točk)

1. Kost so del katerega organskega sistema? (1 t)
a) mišičnega \ b) prebavnega \ c) gibalnega \ d) živčnega
2. Koliko kosti ima povprečen odrasel človek? (1 t)
a) približno 100 \ b) približno 150 \ c) približno 206 \ d) približno 300
3. Katera naloga NI funkcija kosti? (1 t)
a) zaščita notranjih organov \ b) tvorba krvnih celic \ c) shranjevanje mineralov \ d) prebava hrane
4. Rdeči kostni mozeg ima predvsem nalogo: (1 t)
a) shranjevanja maščob \ b) tvorbe krvnih celic \ c) povezovanja kosti \ d) zaščite sklepov
5. Katera kost spada med dolge kosti? (1 t)
a) lopatica \ b) vretence \ c) stegnenica \ d) lobanjska kost

2. naloga: Dopolni povedi. (5 točk)

1. Najtrša snov v človeškem telesu je _____. (1 t)
2. Zunanji sloj kosti imenujemo _____. (1 t)
3. Notranji, gobasti del kosti se imenuje _____. (1 t)
4. Kost se v sklepih povezuje s pomočjo _____. (1 t)
5. Mineral, ki daje kostem trdnost, je _____. (1 t)

3. naloga: Kratko odgovori. (6 točk)

1. Naštej dve funkciji okostja. (2 t)
-

2. Zakaj so kosti pri otrocih bolj prožne kot pri odraslih? (2 t)

3. Kaj je naloga pokostnice? (2 t)

4. naloga: Poveži pojme v levem stolpcu z ustreznimi opisi v desnem stolpcu. (6 točk)

Pojem	Opis
A Rdeči kostni mozeg	1 Omogoča gibanje v sklepu.
B Rumeni kostni mozeg	2 Vsebuje maščobne celice.
C Sklep	3 Tvorí krvne celice.
D Ligament	4 Povezuje kosti med seboj.
E Hrustanec	5 Zmanjšuje trenje.
F Tetiva	6 Povezuje mišico s kostjo.

Vpiši pravilne pare: A–, **B–**, C–, **D–**, E–, **F–**.

5. naloga: Opazuj shemo dolge kosti in odgovori na vprašanja. (8 točk)

(Učitelj naj vključi jasno označeno shemo dolge kosti: pokostnica, kompaktna kost, gobasta kost, kostni mozeg, sklepni hrustanec.)

1. Poimenuj dva označena dela kosti. (2 t)

2. Razloži, zakaj je gobasta kost pomembna za zgradbo kosti. (3 t)

3. Kateri del kosti omogoča rast v dolžino pri otrocih? (3 t)

6. naloga: Razloži in utemelji. (10 točk)

Pojasni, kako nezdrava prehrana in pomanjkanje gibanja vplivata na razvoj in trdnost kosti pri mladostnikih. V odgovoru uporabi vsaj tri biološke pojme, povezane s kostmi.

7. naloga: Analiza primera. (10 točk)

Mladostnik si je pri padcu zlomil kost. Zdravnik mu je svetoval ustrezno prehrano in postopno telesno dejavnost.

1. Zakaj je pomembno, da se zlomljena kost pravilno in dovolj dolgo celi? (4 t)

2. Katere snovi v prehrani pospešujejo celjenje kosti in zakaj? (6 t)

Skupaj točk: 50

Priloga 2: Pisni preizkus znanja, generiran s Copilot.

PISNI PREIZKUS ZNANJA

Tematsko področje: Kost Predmet: Biologija – 8. razred

Ime in priimek učenca: _____ Razred: _____ Datum: _____

Čas pisanja: 45 minut

Število možnih točk: _____ Doseženo število točk: _____ Ocena: _____

Procentualni kriterij ocenjevanja

- 90–100 % → odl (5) / 79–89 % → pd (4)
- 65–78 % → db (3) / 50–64 % → zd (2) / 0–49 % → nzd (1)

Podpis učitelja: _____

NALOGE

(Skupno število točk: 50) (Približno 50 % nalog minimalni standard, 50 % višji standard)

1. Izbirni tip – obkroži pravilni odgovor. (4 točke)

1.1 Katera izmed spodnjih trditev o skeletu je pravilna? A) Skelet omogoča prebavo hrane. B) Skelet daje telesu oporo. C) Skelet proizvaja hormone. D) Skelet uravnava telesno temperature. **Točke: 1**

1.2 Najtrša snov v človeškem telesu je: A) hrustanec B) kostni mozeg C) zobna sklenina D) gobasta kost **Točke: 1**

1.3 Dolge kosti najdemo predvsem v: A) lobanji B) stopalu C) rokah in nogah D) hrbtenici **Točke: 1**

1.4 Katera kost je del osi (aksialnega skeleta)? A) stegnenica B) lopatica C) rebro D) dlančnica **Točke: 1**

2. Dopolnjevanje. (4 točke)

V spodnje povedi vstavi manjkajoče izraze: *rdeči kostni mozeg, hrustanec, kalcij, gibanje*

2.1 Konci dolgih kosti so prekrti z _____, ki zmanjšuje trenje. **Točke: 1**

2.2 Za trdnost kosti je pomemben mineral _____. **Točke: 1**

2.3 V _____ nastajajo krvne celice. **Točke: 1**

2.4 Kostni skupaj z mišicami omogočajo _____. **Točke: 1**

3. Kratki odgovori. (6 točk)

3.1 Opiši dve funkciji človeškega skeleta. **Točke: 2**

3.2 Kaj je sklep in čemu služi? **Točke: 2**

3.3 Navedi razliko med kostjo in hrustancem. **Točke: 2**

4. Povezovanje. (4 točke)

Poveži vrsto sklepa s primerom. V tabelo vpiši pravilne črke.

Vrsta sklepa	Primer
--------------	--------

1. Kroglični sklep	A. členki prstov
--------------------	------------------

2. Tečajasti sklep	B. kolk
--------------------	---------

3. Drsni sklep	C. zapestje
----------------	-------------

4. Sedlasti sklep	D. komolec
-------------------	------------

Rešitve (vpiši črke): 1: ____ 2: ____ 3: ____ 4: ____ **Točke: 4**

5. Interpretacija slike / sheme. (8 točk)

Navodilo: Učitelj naj na preizkus priloži sliko dolge kosti (npr. stegnenice) s prikazanimi deli: *diafiza, epifiza, rastni hrustanec, kostni mozeg, kompaktna kost, gobasta kost*.

Naloga: 5.1 Označi tri glavne dele dolge kosti. **Točke: 3**

5.2 Razloži, zakaj je notranjost epifiz gobasta in ne kompaktna. **Točke: 2**

5.3 Na sliki poišči rastni hrustanec in opiši njegovo vlogo. **Točke: 3**

6. Uporaba znanja. (6 točk)

6.1 Zakaj se kosti otrok hitreje celijo kot kosti odraslih? **Točke: 3**

6.2 Oseba si zlomi podlaket. Opiši, kako poteka celjenje kosti (vsaj tri korake). **Točke: 3**

7. Analiza primera. (6 točk)

Preberi opis: "Športnik je zaradi pomanjkanja vitamina D in kalcija razvil oslABLJENE kosti."

Odgovori: 7.1 Pojasni, zakaj pomanjkanje vitamina D vpliva na trdnost kosti. **Točke: 3**

7.2 Predlagaj dva ukrepa, s katerima lahko športnik izboljša stanje kosti. **Točke: 3**

8. Pisni odgovor z razlago. (12 točk)

8.1 Napiši strnjen, logičen in razložen odgovor (8–12 stavkov) na temo: "Pomen skeleta za delovanje človeškega telesa in posledice, če pride do poškodb ali bolezni kosti."

V odgovoru naj bodo vključeni:

- vsaj tri funkcije skeleta,
- primer bolezni ali poškodbe,
- razlaga vpliva na telo,
- predlogi za ohranjanje zdravih kosti.

Točke: 12

SKUPAJ: 50 točk

Priloga 3: Pisni preizkus znanja, generiran z Gemini.

Pisni preizkus znanja: Kost

Ime in priimek: _____ Razred: 8. _____

Datum: _____ Čas pisanja: 45 minut Število možnih točk: 25

Doseženo število točk: _____ Ocena: _____

Kriterij ocenjevanja: * 90–100 % (22,5–25 t): odl (5) / 79–89 % (19,5–22 t): pd (4)
65–78 % (16–19 t): db (3) / 50–64 % (12,5–15,5 t): zd (2) / 0–49 % (0–12 t): nzd (1)

Podpis učitelja: _____

Naloge:

1. Obkroži črko pred pravilnim odgovorom. Katera od naštetih nalog NI naloga človeškega okostja? (1 t) a) Opisovanje telesne oblike in opora.

b) Varovanje notranjih organov (npr. možganov, pljuč).

c) Prenos živčnih impulzov po telesu.

d) Skladiščenje mineralov, kot sta kalcij in fosfor.

2. Dopolni spodnje povedi z ustreznimi izrazi. (2 t) Zunanji, čvrst del kosti imenujemo _____. V notranjosti dolgih kosti se nahaja _____, kjer pri odraslih prevladuje maščobno tkivo, pri otrocih pa tam nastajajo krvne celice.

3. Poveži dele okostja z njihovo funkcijo ali opisom tako, da vpišeš ustrezno črko v oklepaj. (3 t) A – Hrbtenica () Glavna opora telesu, sestavljena iz vretenc.

B – Lobanja () Ploščate kosti, ki varujejo srce in pljuča.

C – Rebra () Sestavljena iz obraznega in možganskega dela.

4. Na spodnji sliki je prikazan prerez dolge kosti. Poimenuj označene dele. (3 t)

(Navodilo: Predstavlja si sliko dolge kosti, kjer so puščice usmerjene na konec kosti, osrednji del in pokostnico.) 1. Puščica na koncu kosti (gobasto tkivo): _____

2. Puščica na površini kosti (vezivna ovojnica): _____

3. Puščica na osrednjem cevastem delu: _____

5. Kratko odgovori na vprašanja. (2 t) a) Kako imenujemo prožni del kosti pri otrocih, ki z leti okosteni? _____

b) Kateri vitamin je nujno potreben za pravilno vgradnjo kalcija v kosti?

6. Pojasni razliko med gibljivimi in negibljivimi stiki kosti. Navedi po en primer za vsakega. (4 t) Razlaga:

Primer gibljivega stika: _____

Primer negibljivega stika: _____

7. Analiziraj pomen telesne dejavnosti in prehrane za zdravje kosti. Kaj se zgodi s kostmi, če v prehrani primanjkuje kalcija, in kako to vpliva na starostnika? (4 t)

8. Slika prikazuje hrbtenico s stransko ukrivljenostjo (skoliozo). Razloži, kateri dejavniki v vsakdanjem življenju učenca lahko privedejo do takšnih nepravilnosti in kako bi jih lahko preprečil. (3 t) (Navodilo: Tu bi bila vključena shema nepravilne drže hrbtenice.) Vzroki:

Preventiva: _____

9. Utemelji naslednjo trditev: "Kost je živ organ." Navedi vsaj tri dokaze, ki podpirajo to trditev. (3 t)

1. _____

2. _____

3. _____

Priloga 4: Pisni preizkus znanja, generiran s Perplexity.**PISNI PREIZKUS ZNANJA**Tematsko področje: **Kosti** Ime in priimek učenca: _____

Razred: 8. _____ Datum: _____ Čas pisanja: 45 minut

Število možnih točk: 30 Doseženo število točk: ____ / 30 Ocena: ____

Procentualni kriterij ocenjevanja:

90–100% → odl (5) / 79–89% → pd (4) / 65–78% → db (3)

50–64% → zd (2) / 0–49% → nzd (1)

Podpis učitelja: _____

1. naloga (2 točki): Obkrožite pravilen odgovor (1. nivo).

Katera kost tvori zgornji del lobanje?

a) stegenska kost / b) temporalna kost / c) kranialna kost / d) vretenčna kost

2. naloga (3 točki): Obkrožite pravilne odgovore (lahko več). Vsak pravilen odgovor 1 točka (1. nivo). Katerih snovi se kosti v telesu najbolj pogosto nahajajo?

a) kalcij / b) ogljik / c) fosfor / d) železo

3. naloga (2 točki): Dopolnite manjkajoča mesta z ustreznimi besedami iz besedne zbirke (1. nivo). Besedna zbirka: dolge, ravne, kratke, nepravilne.

Kosti rok in nog so večinoma _____ kosti.

Vretenca so _____ kosti.

4. naloga (3 točki): Povežite imena kosti (levo) s pravilno skupino (desno) s črto (1. točka za vsako pravilno povezavo; 2. nivo).

Kost	Skupina
stegenska	okončin
rebrna	lobanje
parietalna	debla

5. naloga (5 točk):

Iz sheme človeškega skeleta (glej sliko spodaj) označite s črko A stegensko kost, z B rebrno kost in s C vretence. Vsaka pravilna označba 1 točka, plus 2 točki za pravilno razlago funkcije ene izmed njih (npr. "Stegenska kost podpira telesno težo."; 2. nivo).

(Tu vstavite sliko človeškega skeleta v črno-beli risbi, označeno z glavnimi kostmi: stegenska v stegnu, rebrna v prsni, vretenca v hrbtu. Če slike ni, opišite: "Shema prikazuje sprednji pogled skeleta z vidnimi stegenskimi kostmi v spodnjih okončinah, rebri v prsni votlini in vretenčno steblo v hrbtu.")

6. naloga (5 točk)

Kratek odgovor: Naštejte pet funkcij kosti v človeškem telesu. Vsaka pravilna funkcija 1 točka (2. nivo).

1. _____

2. _____

3. _____
4. _____
5. _____

7. naloga (5 točk)

Uporabite znanje: Predstavljajte si, da ima oseba zlom stegenske kosti. Opišite, katere dve snovi sta ključni za njeno obnovo in zakaj (uporabite pojma kalcij in vitamin D; 3. nivo).
Kratko pojasnilo (do 4 stavkov; 2 točki za snovi, 3 točki za razlago).

8. naloga (5 točk)

Analiza: Primerjajte dolge kosti (npr. stegenska) in ravne kosti (npr. parietalna) glede oblike, lege in funkcije. Napišite vsaj tri razlike v tabeli (1 točka na razliko; 4. nivo).

	Dolge kosti	Ravne kosti
Oblika		
Lega		
Funkcija		

9. naloga (5 točk)

Vrednotenje z razlago: Ali je pravilno trditi, da so kosti v telesu popolnoma trdne in nepremične strukture? Utemeljite z dvema razlogoma (za ali proti) in predlagajte, kako lahko kosti postanejo šibkejše (3. nivo + 5. nivo; 2 točki za stališče, 2 točki za utemeljitev, 1 točka za predlog).

Skupaj: 30 točk

Priloga 5: Pisni preizkus znanja, generiran z DeepAi.

Pisni preizkus znanja

Tematsko področje: Kost

Ime in priimek učenca: _____

Razred: _____

Datum: _____

Čas pisanja: 45 minut

Število možnih točk: 50

Doseženo število točk: _____

Ocena: _____

Procentualni kriterij ocenjevanja:

90–100 % → odl (5) / 79–89 % → pd (4) / 65–78 % → db (3)

50–64 % → zd (2) / 0–49 % → nzd (1)

Podpis učitelja: _____

Navodila:

Natančno preberi vsako nalogo in odgovori v skladu z navodili. Pri izbirnih nalogah obkroži pravilni odgovor. Pri preostalih nalogah napiši odgovor na proctor, namenjen za naloge, s povezovanjem in interpretacijo uporabite priložene slike ali sheme. Vse naloge skupaj štejejo 50 točk.

1. (2 točki): Obkroži pravilno trditev:

- a) Kostni so sestavljene predvsem iz mišičnega tkiva.
- b) Kostni so trda in odporna struktura, sestavljena iz kostnega tkiva.
- c) Kostni so le v okončinah in nimajo vloge v zaščiti organov.

2. (2 točki): Katera od naštetih kosti NE spada v osovje človeškega okostja?

- a) Čeljustnica (mandibula) / b) Vretenca (vertebra) / c) Kostni roke (metakarpalne kosti) / d) Kostni lobanje

3. (3 točke): Dopolni stavek:

Kostni sestavljajo dve glavni vrsti tkiva: _____ in _____.

4. (3 točke): Poveži pravilno:

- a) Kostni mozeg - 1. proizvede rdeče in bele krvne celice
- b) Hrušnica - 2. zagotavlja gibljivost sklepa
- c) Kostni - 3. so glavna struktura okostja

5. (3 točke): Napiši kratek odgovor:

Kaj je funkcija hrustanca v človeškem okostju?

6. (4 točke): Na priloženi shemi (slika kosti človeške noge) označi:

Stegnenico / Golenico / Peta kost

(Pri nalogi je priložena shema človeške noge z oznakami, ki jih je treba prepoznati.)

7. (4 točke): Razloži, kako se kost oblikuje in raste skozi življenjsko dobo.

8. (3 točke): Navedite tri načine, kako lahko ohranjamo zdrave kosti.

9. (4 točke): Analiziraj sliko: (priložena slika z različnimi vrstami sklepov)

Napiši, kateri sklep je najbolj gibljiv in zakaj.

10. (4 točke): Vrednotenje: Razmisli in napiši, zakaj je pomembno, da skrbimo za zdravje svojih kosti.

Skupno število točk: 50

Priloga 6: Pisni preizkus znanja, generiran s plačljivim Chat GPT.

PISNI PREIZKUS ZNANJA

Predmet: Biologija Tematsko področje: Kostni

Ime in priimek učenca: _____ Razred: _____

Datum: _____ Čas pisanja: 45 minut Število možnih točk: 40

Doseženo število točk: _____ / 40 Ocena: _____

Procentualni kriterij ocenjevanja:

90–100 % → odl (5) / 79–89 % → pd (4) / 65–78 % → db (3) /

50–64 % → zd (2) / 0–49 % → nzd (1)

Podpis učitelja: _____

1. naloga: Obkroži pravilen odgovor. (4 točke)

1. Kostí v človeškem telesu imajo predvsem nalogo:
A zaščite notranjih organov / B shranjevanja vitaminov
C tvorbe hormonov / D prebave hrane
2. Odrasel človek ima približno:
A 106 kosti / B 206 kosti / C 306 kosti / D 406 kosti
3. Katera kost spada med dolge kosti?
A lopatica / B stegnenica / C vretence / D rebro
4. Kostí so povezane med seboj s/z:
A mišicami / B kite / C sklepi / D kožo

2. naloga: Dopolni povedi. (4 točke)

1. Kostno tkivo je zgrajeno iz celic, ki jih imenujemo _____.
2. V notranjosti dolgih kosti se nahaja _____ kostni mozeg.
3. Kostem daje trdnost mineral _____.
4. Površino kosti pokriva vezivna ovojnica, ki se imenuje _____.

3. naloga: Kratko odgovori. (4 točke)

1. Naštej dve nalogi okostja.

-
2. Zakaj so kosti pri otrocih bolj prožne kot pri starejših ljudeh?
-

4. naloga: Poveži pojme z ustreznim opisom. (6 točk)

Pojem	Opis
A Rebra	1 Varujejo možgane.
B Lobanja	2 Omogočajo gibanje okončin.
C Hrbtenica	3 Ščitijo srce in pljuča.
D Sklepi	4 Omogoča pokončno držo in gibljivost trupa.
E Rdeči kostni mozeg	5 Omogoča povezovanje kosti.
F Rumeni kostni mozeg	6 Skladišči maščobe.

Vpiši pravilne pare: A–, B–, C–, D–, E–, F–

5. naloga: Oglej si shemo dolge kosti in odgovori na vprašanja. (8 točk)

Navodilo za vključitev slike: V preizkus vključite jasno označeno shemo dolge kosti (prerez), na kateri so vidni: pokostnica, kompaktna kost, gobasta kost, sklepni hrustanec, rdeči in rumeni kostni mozeg.

1. Poimenuj dva označena dela kosti. (2 točki)
-

2. Razloži vlogo gobaste kosti. (3 točke)

-
3. Pojasni, zakaj je sklepni hrustanec pomemben za gibanje. (3 točke)
-

6. naloga: Uporabi znanje v novi situaciji. (6 točk)

Predstavljaš si, da si športni zdravnik. Mladi košarkar si je zlomil podlahtnico.

1. Razloži, zakaj je pri zlomu pomemben mirujoč položaj kosti. (3 točke)

-
2. Pojasni, kako se kost celi. (3 točke)
-

7. naloga: Razmisli in utemelji odgovor. (4 točke)

Zakaj je zdrava prehrana (kalcij, vitamin D) pomembna za razvoj in ohranjanje zdravih kosti? Svoj odgovor utemelji z vsaj dvema razlogoma.

Skupaj točk: 40

Invazivne tujerodne rastline so evolucijski prvaki: hipoteze uspešnosti, funkcionalne lastnosti in vloga človeka

Invasive alien plants are evolutionary champions: success hypotheses, functional traits and the role of humans

Eva Horvat

Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Koroška cesta 160, 2000 Maribor, Slovenija

Povzetek

Invazivne tujerodne rastline pogosto obravnavamo kot škodljive zaradi njihovih negativnih vplivov na biotsko pestrost, gospodarstvo in zdravje ljudi. Vendar so z vidika evolucije izrazito uspešni organizmi. V tem članku skušamo pojasniti njihovo ekološko uspešnost v okviru procesov učinkovitega naravnega izbora. Opisane so ključne hipoteze, ki pojasnjujejo biološke invazije: hipoteza pritiska propagulov, hipoteza zmanjšanja pritiska sovražnikov, hipoteza novega orožja, hipoteza evolucije povečane kompetitivne sposobnosti ter hipoteza biotske odpornosti. Nato so opisane funkcionalne lastnosti invazivnih rastlin, kot so hitra rast, visoka plodnost, učinkovito razširjanje, fenološka prilagodljivost in fenotipska plastičnost, ki prav tako prispevajo k njihovi konkurenčni prednosti. Na koncu je obravnavana vloga človeške dejavnosti, saj globalizacija in motnje habitatov pospešujejo širjenje (invazivnih) tujerodnih rastlin, hortikultura pa namerno selekcionira tiste rastline, ki imajo lastnosti ključne za invazivnost.

Ključne besede: alohtone rastline, biologija invazij, evolucijska ekologija, družba, antropogeni vplivi

Abstract

Invasive alien plants are often considered harmful due to their negative impacts on biodiversity, the economy and human health. However, from an evolutionary perspective, they are remarkably successful organisms. Therefore, this article attempts to explain their ecological success in the context of efficient natural selection processes. Key hypotheses explaining invasions are presented: the propagule pressure hypothesis, the enemy release hypothesis, the novel weapons hypothesis, the evolution of increased competitive ability hypothesis and the biotic resistance hypothesis. Functional traits of invasive plants, such as rapid growth, high fecundity, efficient dispersal, phenological adaptability and phenotypic plasticity, which also contribute to their competitive advantage, are then described. Finally, the role of human activity is discussed, as globalization and habitat disturbance accelerate the spread of (invasive) alien plants, while horticulture deliberately selects those plants that have traits promoting invasiveness.

Key words: exotic plants, invasion biology, evolutionary ecology, society, anthropogenic impacts

1 UVOD

Invazivne tujerodne vrste so organizmi, ki so bili zaradi človekove dejavnosti namerno ali nenamerno preneseni izven svojega naravnega območja in ogrožajo biotsko pestrost, povzročajo gospodarsko škodo ali škodijo človeškemu zdravju. Znano je, da različne invazivne tujerodne vrste rastlin zmanjšujejo pestrost domorodnih rastlinskih vrst, povečujejo produktivnost ekosistema in spreminjajo hitrost kroženja hranil. V metaanalizi so leta 2011 ugotovili, da tujerodne rastline opazno zmanjšajo fitnes in rast domorodnih rastlinskih vrst za 41,7 % oziroma 22,1 % s tem, da uspešneje tekmujejo za vire in tvorijo goste monokulture. Poleg tega so invazivne tujerodne rastline (ITR) zmanjšale fitnes živalskih vrst za 16,5 % in abundanco za 17,3 %, saj zmanjševanje biotske pestrosti rastlin neposredno prekinja prehranjevalne spletke za žuželke in ptice ter posredno za druge živali. Ti vplivi na delovanje

ekosistemov pa se ne odražajo le na ravni biotske pestrosti, temveč imajo tudi pomembne gospodarske in družbene posledice [1].

Raziskovalci so kvantificirali globalne stroške invazij za sedem glavnih sektorjev in ocenjujejo, da invazivne vrste, vključno z rastlinami, svetovno gospodarstvo stanejo več kot 360 milijard evrov letno, pri čemer nekatere ocene kažejo, da bi vsota lahko presegla tudi bilijone evrov. Ti stroški nastanejo zaradi obvladovanja širjenja, zmanjšane pridelke in poškodovanja infrastrukture [2]. Med rastlinami v kmetijstvu škodo povzročajo plevelne vrste, kot je pelinolistna ambrozija (*Ambrosia artemisiifolia*), ki uspešneje tekmuje za hranila in s tem zmanjšuje pridelek poljščin [3]. V urbanih okoljih lahko drevesne vrste, kot je veliki pajesen (*Ailanthus altissima*), z agresivnim koreninskim sistemom prodirajo skozi najmanjše razpoke v pločnikih in zgradbah ter sčasoma povzročijo veliko škodo [4]. Poleg tega lahko nekatere ITR negativno vplivajo na zdravje ljudi, na primer pelinolistna ambrozija s povzročanjem alergijskih reakcij [3] ali opeklin, kot jih povzroča orjaški dežen (*Heracleum mantegazzianum*) [4]. Zaradi navedenih negativnih učinkov invazivnih tujerodnih rastlin potekajo številne raziskave, usmerjene v razumevanje mehanizmov, ki tem vrstam omogočajo konkurenčno prednost pred domorodnimi vrstami. Tako se lahko razvijajo ustrezne strategije nadzora in se preprečuje nadaljnja škoda. Kljub temu so invazivne tujerodne vrste tako ekološko uspešne, da so poskusi njihovega iztrebljanja ali omejevanja velikokrat neuspešni [5].

Tradicionalno obravnavanje invazivnih tujerodnih vrst kot škodljivih temelji na antropocentričnem vrednotenju, ki biološke procese presoja z vidika njihovih učinkov na človeka. Evlucijska perspektiva ta okvir presega, saj invazije interpretira kot rezultat delovanja naravnega izbora, pri katerem so uspešne tiste lastnosti, ki povečujejo preživetje in razmnoževanje organizmov. Namen tega članka je prispevati k celovitejšemu razumevanju ekološke uspešnosti ITR. Zato ni predstavljena zgolj antropocentrična obravnava njihovih vplivov, ampak je vključena tudi evlucijska perspektiva, ki omogoča analizo mehanizmov, odgovornih za njihov uspeh.

2 INVAZIVNE TUJERODNE RASTLINE SO EVLUCIJSKI PRVAKI

Z vidika evolucije so invazivne tujerodne rastline izrazito uspešni organizmi [6]. Evlucija ne prepozna oznak »domorodno« ali »tujerodno« in ne pripisuje moralne vrednosti biološkemu uspehu ali upadu; naravni izbor le favorizira lastnosti, ki osebkom povečajo verjetnost preživetja in razmnoževanja [7]. Številne invazivne rastlinske vrste imajo lastnosti, kot so hitra rast, visoka plodnost, toleranca na širok spekter pogojev in sposobnost, da uspešneje tekmujejo za svetlobo, hranila ali prostor kot domorodne vrste [6]. Nekatere so v prednosti zaradi lastnosti, ki jih nudi novo okolje, na primer pomanjkanje naravnih škodljivcev [8, 9], bolj učinkovita kemična obramba [10] ali proste ekološke niše, ki jih te vrste zasedejo. Glavni razlog hitrega povečanja števila vrst ITR v zadnjem stoletju je globalizacija, zlasti mednarodna trgovina in promet, ki sta močno povečala transport vrst čez geografske ovire [11]. Hkrati urbanizacija, kmetijstvo in podnebne spremembe ustvarjajo motene ekosisteme, ki praviloma dajejo prednost generalističnim vrstam, kot so v veliki meri invazivne tujerodne vrste. Njihove lastnosti jim omogočajo zasedanje prostih ekoloških niš in konkurenčno izrinjanje domorodnih vrst [12]. Invazivne rastline so problematične predvsem z vidika interesov človeške družbe, z evlucijskega vidika pa predstavljajo vrste, ki so med najbolj prilagojenimi na hitro spreminjajoče se razmere v sodobnem svetu.

3 HIPOTEZE USPEŠNOSTI INVAZIVNIH TUJERODNIH RASTLIN

Opazovanja vnesenih vrst segajo v sredino 19. stoletja, ko so Charles Darwin in drugi raziskovalci prvič začeli dokumentirati učinke vnesenih vrst [13]. Biologija invazij, kot znanstvena disciplina, se je začela razvijati v 50. letih 20. stoletja s knjigo *The Ecology of Invasions by Animals and Plants*, ki jo je napisal Charles Elton. V njej je opisal, kako vnesene vrste prečkajo naravne geografske ovire in povzročajo kaotične, pogosto uničujoče spremembe v novih ekosistemih [14]. Ker tujerodne rastline nenehno vstopajo v nova okolja [11], je razumevanje mehanizmov, vključenih v proces invazije, ključno za boljše napovedovanje učinkov in nadzor teh vrst [5]. V desetletjih raziskav so bile predlagane številne hipoteze, ki skušajo pojasniti uspeh invazivnih vrst. Vendar se zaradi kompleksne narave invazij pogosto deloma idejno prekrivajo in nobena sama ne more pojasniti vseh primerov. Večina hipotez se namreč osredotoča le na en dejavnik, biotski ali abiotski, ki prispeva le v določeni stopnji invazije [15].

Ena najpomembnejših razlag je hipoteza o pritisku propagulov, pri čemer propaguli predstavljajo razmnoževalne enote organizma, kot so semena, plodovi ali brsti. Ta hipoteza predpostavlja, da večji pritisk propagulov, tako v smislu števila vnosov kot njihove frekvence, povečuje verjetnost naturalizacije vrste v novem okolju. Glede na metaanalizo [16] približno 80 % od 92 analiziranih študij poroča o dokazih, ki podpirajo to hipotezo, zato sodi med najbolj podprte na področju pojasnjevanja invazij. Hkrati nakazuje, da je za obvladovanje invazij ključnega pomena zmanjševanje vnosa tujerodnih rastlin, saj je večkratni vnos kritičen dejavnik, ki odloča o uspešni naturalizaciji tujerodne vrste [16, 17].

Na domorodnem območju se vrste sočasno razvijajo s patogeni, zajedavci in herbivori, ki so se lahko specializirali za specifično vrsto in zato učinkovito omejujejo njeno populacijo. Ko rastlina prispe na novo ozemlje, stare »sovražnike« pusti za seboj, medtem ko so novi sovražniki, ki so verjetneje generalisti, manj učinkoviti pri omejevanju populacij vnesene vrste. To je mehanizem, ki ga predlaga hipoteza zmanjšanja pritiska sovražnikov. Številne raziskave potrjujejo, da je število herbivorov iz skupine žuželk v povprečju večje na domačem ozemlju kot na novem ozemlju in da je škoda večja na domorodnih rastlinah kot na tujerodni vrsti [8, 9]. Vendar hipoteza ni univerzalno potrjena. Učinek je lahko šibkejši, kadar je vnesena vrsta tesneje sorodna z domorodnimi, saj takrat obstaja večja verjetnost, da si delijo iste herbivore ali patogene [18]. Prav tako so v nekaterih primerih domorodni patogeni, zajedavci in herbivori lahko učinkoviti pri zatiranju potencialno invazivne vrste [19, 20] ter enako tujerodni patogeni, zajedavci in herbivori, ki so prispeli pred tujerodno rastlino [21].

V zadnjem času v Evropi, in prav tako v Sloveniji, beležimo številne tujerodne vrste specializiranih herbivorov, ki se prehranjujejo z ITR. Primer je severnoameriški hrošč ambrozijev lepenec (*Ophraella communa*), ki se primarno hrani na invazivni tujerodni pelinolistni ambroziji. Prvič je bil zabeležen v južni Švici in severni Italiji leta 2013 [22], od takrat pa se širi predvsem v države okoli Alp, kot so Slovenija [23, 24], Hrvaška [24], Avstrija [25] in Slovaška [26]. Nedavne študije poročajo, da hrošč povzroča obsežno osutost listja, zmanjšanje števila cvetov in semen, kar je v nekaterih regijah severne Italije povzročilo več kot 80-odstotno zmanjšanje koncentracije cvetnega prahu pelinolistne ambrozije v zraku [27]. Podoben primer sta tujerodna listna zavrtčača *Paractopa robiniella* in *Macrosaccus robiniella*, ki napadata invazivno tujerodno vrsto navadno robinijo (*Robinia pseudoacacia*) ter sta v Evropi bila zabeležena leta 1970 oziroma 1983. Gosenice zavrtčacev vrtajo rove na spodnji strani listov, kar povzroči njihovo sušenje in prezgodnje odpadanje [28]. Čeprav so tujerodne rastline po

naturalizaciji običajno deležne zmanjšanja pritiska sovražnikov [8, 9], lahko sčasoma za njih specializirane rastlinojede žuželke prispejo za njimi iz domačega območja in zmanjšajo koristi tega učinka, kot je predstavljeno pri zgornjih primerih. Ponovno se vzpostavi odnos, ki je podoben kot v domorodnem okolju, zaradi česar specializirana tujerodna žuželka učinkovito omejuje širjenje invazivne tujerodne rastline tudi v novem okolju. Tujerodne vrste specializiranih herbivorov, ki se hranijo z ITR, zato predstavljajo možnost biološke kontrole. Ta je lahko bolj učinkovita kot mehanske metode zatiranja in okoljsko sprejemljivejša kot kemične metode zatiranja [29].

Hipoteza novega orožja oz. obrambe predpostavlja, da nekatere rastline razvijejo kemično obrambo, ki jim v domačem okolju omogoča učinkovito tekmovanje z drugimi vrstami. V novem okolju so domorodne rastline pogosto občutljive na kemijske spojine, ki jih izločajo ITR, saj zaradi ločenega evlucijskega razvoja nanje niso prilagojene. To daje vneseni vrsti konkurenčno prednost. Čeprav je hipoteza podprta z nekaterimi raziskavami [10], je deležna kritik zaradi pretiranega zanašanja na laboratorijske biološke teste, nezadostnih terenskih dokazov in velikega števila študij, ki je ne podpirajo [30]. Poskusi se pogosto izvajajo v nadzorovanih laboratorijskih pogojih ali rastlinjakih, kar izključuje mnoge biološke procese prisotne v naravnih ekosistemih [31]. Večina študij je osredotočenih na kalitev semen in rast sadik izbranih testnih vrst v nadzorovanih pogojih, medtem ko bi terenski poskusi, ki merijo rast in fitnes sobivajočih rastlin v več rastnih sezonah, zagotovili bolj realistične rezultate [30].

Hipoteza evlucije povečane kompetitivne sposobnosti predvideva, da se tujerodne rastline po vnosu v novo okolje osvobodijo pritiska herbivorov iz domačega okolja. Posledično lahko vire, ki bi jih sicer namenjale obrambi, prerazporedijo v rast in razmnoževanje, kar poveča njihovo konkurenčno sposobnost v novem okolju [32]. Tako kot prejšnje hipoteze tudi ta nima enoznačnih dokazov. Številne študije sicer kažejo povečano rast ITR, vendar ne dokažejo, da izvira iz zmanjšane obrambe, kot predvideva hipoteza [33].

Z vidika hipoteze biotske odpornosti so ekosistemi z večjo biotsko pestrostjo bolj odporni na invazije, saj raznolike skupnosti bolje izkoriščajo vire, kar zmanjša število prostih niš za nove vrste. Te se ob vstopu soočajo z močnim konkurenčnim izključevanjem in herbivorijo. Eksperimentalne študije majhnega obsega to hipotezo pogosto podpirajo, medtem ko opazovalne študije velikega obsega občasno kažejo nasprotni trend, da večja biotska pestrost sovпада z več invazijami. To je lahko posledica dejstva, da so biotsko pestri ekosistemi pogosto bogatejši s hranili in bolj izpostavljeni motnjam, kar olajša vnos tujerodnih vrst. Na splošno ima hipoteza biotske odpornosti v primerjavi z drugimi razlagami razmeroma omejeno empirično podporo, saj le približno 15–50 % študij (odvisno od prostorskega merila) zanj zagotavlja močne dokaze [16].

4 FUNKCIONALNE LASTNOSTI RASTLIN, POVEZANE Z NJIHOVO INVAZIVNOSTJO

Čeprav posamezne hipoteze poudarjajo različne biotske in abiotske dejavnike, ki prispevajo k uspehu ITR, uspešnost invazij v veliki meri določajo lastnosti organizmov samih. Od Bakerjevega poskusa opredelitve »idealnega plevela« pred več kot 50 leti [34] so ekologi poskušali prepoznati značilnosti vrst, ki napovedujejo invazivnost. Obstajajo dokazi, da se invazivne tujerodne rastline v nekaterih lastnostih razlikujejo od neinvazivnih tujerodnih ali domorodnih rastlin. Na primer invazivne rastline zaznamujejo hitra rast, večja proizvodnja semen, zgodnja zrelost, učinkoviti mehanizmi raznašanja propagulov in prilagodljivost na

raznolika okolja. Novejše študije so Bakerjeve lastnosti izpopolnile od precej splošnih, a težko merljivih konceptov, na primer tekmovalje s "posebnimi sredstvi", do bolj specifičnih fizioloških ali morfoloških lastnosti, na primer SLA (specifična listna površina, ki je razmerje med površino lista in njegovo suho maso ter odraža življenjsko strategijo rastline), učinkovitost rabe hranil. To nam daje vpogled v to, da obstaja veliko poti, ki vodijo do uspešnih invazij in da so lahko na videz splošne lastnosti, kot je hitra rast, posledica različnih fizioloških mehanizmov, vključujoč pridobivanje virov in njihove učinkovite izrabe [6]. Vendar pa je vpliv lastnosti ITR na proces invazije odvisen od konteksta. Tiste lastnosti, ki spodbujajo invazijo v eni združbi ali v eni fazi invazije, lahko zavirajo invazijo v drugih združbah ali drugih fazah invazije. Poleg tega lastnosti invazivnih tujerodnih vrst niso statične, zato se lahko dinamika invazije sčasoma spreminja, tako z razvojem invazivne vrste kot domorodnih konkurentov [35].

ITR se v primerjavi z neinvazivnimi rastlinami najbolj dosledno razlikujejo v lastnostih, povezanih s privzemom virov in rastjo: imajo hitrejšo rast, dosežejo večjo maksimalno višino in vire razporejajo v rastni vršiček [36]. Primerjalne analize kažejo, da sta še posebej SLA in višina rastline uporabna za razlikovanje invazivnih rastlin od njihovih neinvazivnih kongenitov [37, 38]. Invazivne vrste imajo pogosto višji SLA, kar pomeni tanjše, hitro rastoče liste in predpostavlja življenjsko strategijo, ki je povezana s hitro rastjo, ne pa z vlaganjem energije v strukture, ki bi povečale odpornost proti suši ali poškodbam [36, 37]. Za vrste, višje od 0,8 m, se predvideva, da so invazivne ne glede na njihove druge lastnosti, saj ta višina približno ustreza zgornji vegetacijski plasti združb zelnatih rastlin v zmernem pasu. Nižje vrste lahko kompenzirajo z učinkovitejšim razširjanjem diaspor z živalmi (zoohorija), medtem ko so najuspešnejša skupina ITR z 90 % verjetnostjo doseganja statusa invazivnosti rastline z majhnimi semeni. Na splošno hiter razvoj in visoka rast omogočata invazivnim vrstam, da se ustalijo, premagajo domorodne rastline pri zajemu sončne svetlobe ter privzemu hranil, se razmnožujejo pred napadom herbivorov in si hitreje opomorejo po motnjah [39].

Na področju reproduktivnih strategij imajo ITR pogosto razvite obojespolne cvetove in sposobnost samoopraševanja ali pa se razmnožujejo nespolno, na primer s korenikami ali stoloni. Ti omogočajo hitro kolonizacijo novih območij in zmanjšujejo odvisnost od opraševalcev ali spolnih partnerjev. Prav tako invazivne rastline proizvedejo več semen kot domorodne vrste, kar je povezano z večjim vlaganjem virov v spolno razmnoževanje [38].

ITR pogosto pridobijo konkurenčno prednost zaradi fenologije, kot je zgodnejši pojav spomladi ali poznejša aktivnost jeseni, kar se razlikuje od fenologije domorodnih vrst. Zgodnja ali fleksibilna kalitev omogoča, da ITR zrastejo v okolju z omejenimi viri še pred domorodnimi vrstami [40]. Medtem ko daljše ali zamaknjeno obdobje cvetenja omogoča daljšo priložnost razmnoževanja [37]. Prav tako pozna jesenska aktivnost invazivnim rastlinam, kot je kanadska zlata rozga (*Solidago canadensis*) [41], podaljša fotosintezno aktivno obdobje [42].

Fenotipska plastičnost je opredeljena kot sposobnost organizma, da spremeni svoj fenotip kot odziv na okoljske spremembe. Invazivne tujerodne rastline praviloma izkazujejo visoko stopnjo fenotipske plastičnosti, kar jim omogoča prilagajanje svojih morfoloških, fizioloških in reproduktivnih lastnosti v različnih okoljih ter izboljša njihovo preživetje in reproduktivni uspeh. Empirični dokazi o vlogi fenotipske plastičnosti pri invazijskem uspehu ITR so neenotni. V več metaanalizah ugotavljajo, da imajo invazivne tujerodne vrste bolj plastičen fenotip kot domorodne ali neinvazivne tujerodne vrste [43, 44]. Vendar lahko povečana fenotipska plastičnost pomaga izboljšati fitnes neke vrste samo v okolju z obilico virov, medtem ko so v pogojih z omejenimi viri neinvazivni rastlinski taksoni sposobni bolje ohranjati homeostazo fitnesa [43]. V nekaterih drugih raziskavah pomembnih razlik med fenotipsko plastičnostjo

invazivnih tujerodnih rastlin in domorodnih ali neinvazivnih tujerodnih rastlin ne zaznavajo [45, 46]. Ena od razlag za ta nasprotujoča empirična opažanja je, da je fenotipska plastičnost, tako kot druge lastnosti, lahko ugodna le v določenih fazah invazije.

5 ČLOVEŠKA DRUŽBA POSPEŠUJE INVAZIJE RASTLIN

Funkcionalne lastnosti, ki omogočajo uspeh invazivnih tujerodnih rastlin, niso pomembne le v naravnih ekosistemih, temveč tudi v kontekstu človekove dejavnosti. Antropogene spremembe okolja, kot so globalizacija, raba zemljišč in hortikultura, ustvarjajo pogoje, ki selektivno favorizirajo prav tiste lastnosti, ki so povezane z invazivnostjo. S tem človek ne deluje le kot posrednik vnosa vrst, temveč tudi usmerja selekcijske pritiske v prid invazivnim rastlinam.

Ljudje že tisočletja trgujejo z rastlinami, živalmi in drugimi organizmi ter jih prevažajo po vsem svetu [47]. Po letu 1950 pa se je hitrost tega procesa močno povečala. Nove morske, kopenske in zračne povezave ter mednarodna trgovina so vzpostavile nove in hitrejše načine za namerno ali nenamerno širjenje tujerodnih vrst čez naravne geografske ovire, ki so nekoč omejevale njihovo razširjenost. Pričakovano je, da se bodo invazije še naprej stopnjevale, prav tako pa povezani okoljski in družbeni stroški [48].

Prevladujoča pot vnosa ITR je svetovna trgovina z rastlinami za hortikulturo. Leta 2018 je bilo raziskano, da se vsaj 51 % od 337137 vseh znanih vrst višjih rastlin po svetu goji v domačih (70108) ali botaničnih vrtovih (162846) [49]. Čeprav le relativno majhen delež taksonov uide gojenju, pogosto manj kot 10 % [50], je zaradi samega števila gojenih taksonov vnos zaradi hortikulture glavni vir invazivnih vrst rastlin [49]. Rastline, izbrane za okrasne namene, niso naključne, temveč so izbrane zaradi sposobnosti uspevanja v različnih okoljih, enostavnega gojenja in odpornosti na škodljivce [51]. Mnoge od teh lastnosti tesno povezujemo z invazivnostjo. Na primer, klimatsko ujemanje okolja je ključno merilo pri izbiri vrst za vrtnarstvo [52], hkrati pa je pomembno za naturalizacijo in invazivnost [53]. Hortikultura uporaba je naklonjena rastlinam, ki jih je mogoče enostavno razmnoževati [52] in tujerodne vrste s hitrim vznikom sadik se pogosteje naturalizirajo [54]. Podobno je hitra vegetativna rast zaželen lastnost v vrtnarski industriji [52] in spodbuja tudi invazivnost [55]. Zgodaj cvetoče vrste imajo pogosto dolgo obdobje cvetenja ali ponavljajoča se obdobja cvetenja [56], zaradi česar jih je mogoče prodati prej ali dlje časa, kar poveča dobiček [52]. Hkrati je bilo ugotovljeno, da je daljše obdobje cvetenja povezano z invazivnostjo [57]. Vrtnarstvo lahko torej omogoča invazije s filtriranjem okrasnih vrst na podlagi lastnosti, ki spodbujajo njihovo invazivnost [58].

Poleg tega, da človek omogoča vnos tujerodnih vrst, s preoblikovanjem pokrajine ustvarja tudi mnogo motenih habitatov za njihovo uspešno naselitev in širjenje. Spremembe rabe zemljišč za kmetijski in urbani razvoj so primeri drastičnih antropogenih motenj, vendar so gradnja cest, rudarstvo, energetika, rekreacijska raba, sečnja lesa in pridobivanje drugih naravnih proizvodov prav tako pomembni viri motenj [59]. Zaradi njih pride do sprememb v razpoložljivosti virov [60, 61], odstranitve avtohtonih konkurentov in nastanka vrzeli v vegetaciji, ki ustvarjajo nove priložnosti za kolonizacijo invazivnih rastlin [62]. Te so prilagojene učinkovitemu širjenju in hitri rasti, zaradi česar so običajno prve, ki naselijo motena območja. Poleg tega učinkoviteje privzemajo vire [63], se hitro odzivajo na začasno povečanje virov in imajo od takšnega povečanja nesorazmerno več koristi kot avtohtone vrste [6, 64].

6 ZAKLJUČEK

Invazivne tujerodne rastline kljub svojim negativnim vplivom na ekosisteme in človeško družbo predstavljajo evolucijsko izjemno uspešne organizme. Njihovo razširjenost je mogoče razumeti kot rezultat delovanja naravnega izbora v pogojih antropogenih sprememb okolja. V zadnjih 75 letih, odkar se biologija invazij razvija kot samostojna znanstvena veda, je bil dosežen pomemben napredek pri razumevanju dejavnikov, ki invazivnim tujerodnim vrstam omogočajo ta uspeh v novih okoljih. Med številnimi predlaganimi hipotezami ostaja hipoteza o pritisku propagulov zaradi močne empirične podlage ena najbolj podprtih. Za večino drugih velja, da nobena sama ne pojasni uspeha invazije v vseh kontekstih in da je premalo empiričnih podatkov, da bi podprli številne od njih. Vendar uspeh ITR ni odvisen le od dejavnikov novega okolja, temveč imajo rastline same lastnosti, ki prispevajo k večjemu fitnesu. Od teh sta specifična listna površina in višina rastline najboljša kazalca invazivnosti. So pa učinki funkcionalnih lastnosti na invazijo odvisni od specifične združbe, faze invazije in razvoja domorodnih konkurentov. K uspešnim invazijam pomembno prispevajo tudi človekove dejavnosti, ki omogočajo vnos tujerodnih taksonov, selekcijo vrst s preadaptacijami za invazivnost ter ustvarjanje motenih habitatov, ki pripomorejo k njihovemu širjenju.

Za prihodnost se napoveduje povečanje števila invazivnih rastlin po celem svetu za 36 %, kjer bo najbolj prizadeta prav Evropa s 64 % povečanjem števila invazivnih taksonov glede na leto 2005 [65]. Zato je potrebno mednarodno obvladovanje vnosov in negativnih posledic ITR. V Evropski uniji je ključni predpis uredba št. 1143/2014, katere cilj je preprečevanje vnosa invazivnih vrst, omejevanje njihovega širjenja ter zmanjševanje njihovih škodljivih vplivov na naravo, gospodarstvo in zdravje ljudi [66]. V skladu z njo veljajo tudi nacionalni predpisi, med katerimi je v Sloveniji temeljni Zakon o ohranjanju narave, ki prepoveduje naseljevanje tujerodnih vrst v naravo brez ustreznega dovoljenja. Njegovo izvajanje dodatno urejajo podzakonski akti, medtem ko številni projekti, zlasti v okviru programa LIFE, prispevajo k ozaveščanju in konkretnim ukrepom za obvladovanje invazivnih vrst.

Literatura

- [1] Vilà, M., Espinar, J., Hejda, M., Hulme, P., Jarošík, V., Maron, J., Pergl, J., Schaffner, U., Sun, Y. in Pyšek, P. (2011). Ecological impacts of invasive alien plants: A meta-analysis of their effects on species, communities and ecosystems. *Ecology Letters*, 14(7), 702–708. <https://doi.org/10.1111/j.1461-0248.2011.01628.x>
- [2] Turbelin, A. J., Hudgins, E., Catford, J., Cuthbert, R., Diagne, C., Kourantidou, M., Roiz D. in Courchamp, F. (2024). Biological invasions as burdens to primary economic sectors. *Global Environmental Change*, 87, 102858. <https://doi.org/10.1016/j.gloenvcha.2024.102858>
- [3] Knolmayer, B., Jócsák, I., Taller, J., Keszthelyi, S., in Kazinczi, G. (2024). Common ragweed—*Ambrosia artemisiifolia* L.: A review with special regards to the latest results in biology and ecology. *Agronomy*, 14(3), 497. <https://doi.org/10.3390/agronomy14030497>
- [4] Soler, J. in Izquierdo, J. (2024). The invasive *Ailanthus altissima*: A biology, ecology, and control review. *Plants*, 13(7), 931. <https://doi.org/10.3390/plants13070931>
- [5] Kettenring, K. M. in Adams, C. R. (2011). Lessons learned from invasive plant control experiments: A systematic review and meta-analysis. *Journal of Applied Ecology*, 48(4), 970–979. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2664.2011.01979.x>

- [6] Van Kleunen, M., Weber, E. in Fischer, M. (2010). A meta-analysis of trait differences between invasive and non-invasive plant species. *Ecology Letters*, 13(2), 235–245. <https://doi.org/10.1111/j.1461-0248.2009.01418.x>
- [7] Manly, B. F. J. (1985). Tests of the theory of natural selection: An overview. *Journal of the Royal Society of New Zealand*, 15(4), 411–432. <https://doi.org/10.1080/03036758.1985.10421719>
- [8] Liu, H. in Stiling, P. (2006). Testing the enemy release hypothesis: A review and meta-analysis. *Biological Invasions*, 8(7), 1535–1545. <https://doi.org/10.1007/s10530-005-5845-y>
- [9] Meijer, K., Schilthuizen, M., Beukeboom, L. in Smit, C. (2016). A review and meta-analysis of the enemy release hypothesis in plant-herbivorous insect systems. *PeerJ*, 4, e2778. <https://doi.org/10.7717/peerj.2778>
- [10] Zhang, Z., Liu, Y., Yuan, L., Weber, E. in Van Kleunen, M. (2021). Effect of allelopathy on plant performance: A meta-analysis. *Ecology Letters*, 24(2), 348–362. <https://doi.org/10.1111/ele.13627>
- [11] Hulme, P. E. (2021). Unwelcome exchange: International trade as a direct and indirect driver of biological invasions worldwide. *One Earth*, 4(5), 666–679. <https://doi.org/10.1016/j.oneear.2021.04.015>
- [12] Manzoor, S. A., Griffiths, G. in Lukac, M. (2021). Land use and climate change interaction triggers contrasting trajectories of biological invasion. *Ecological Indicators*, 120, 106936. <https://doi.org/10.1016/j.ecolind.2020.106936>
- [13] Darwin, C. (1859). *On the origin of species* (1. izd.). John Murray. <https://www.aliceandbooks.com>
- [14] Elton, C. (1958). *The ecology of invasions by animals and plants*. Methuen. https://archive.org/details/ecologyofinvasio0000char_h2o8
- [15] Gioria, M., Hulme, P. E., Richardson, D. M. in Pyšek, P. (2026). Why are invasive plants successful? *Annual Review of Plant Biology*, 16, 56. <https://doi.org/10.1146/annurev-arplant-070522>
- [16] Jeschke, J. M. in Heger, T. (ur.). (2018). *Invasion biology: Hypotheses and evidence*. CABI.
- [17] Cassey, P., Delean, S., Lockwood, J. L., Sadowski, J. S. in Blackburn, T. M. (2018). Dissecting the null model for biological invasions: A meta-analysis of the propagule pressure effect. *PLoS Biology*, 16(4), e2005987. <https://doi.org/10.1371/journal.pbio.2005987>
- [18] Hill, S. B. in Kotanen, P. M. (2009). Evidence that phylogenetically novel non-indigenous plants experience less herbivory. *Oecologia*, 161(3), 581–590. <https://doi.org/10.1007/s00442-009-1403-0>
- [19] Maron, J. L. in Vilà, M. (2001). When do herbivores affect plant invasion? Evidence for the natural enemies and biotic resistance hypotheses. *Oikos*, 95(3), 361–373. <https://doi.org/10.1034/j.1600-0706.2001.950301.x>
- [20] Parker, I. M. in Gilbert, G. S. (2007). When there is no escape: The effects of natural enemies on native, invasive, and noninvasive plants. *Ecology*, 88(5), 1210–1224. <https://doi.org/10.1890/06-1377>
- [21] Powell, K. I., Chase, J. M. in Knight, T. M. (2011). A synthesis of plant invasion effects on biodiversity across spatial scales. *American Journal of Botany*, 98(3), 539–548. <https://doi.org/10.3732/ajb.1000402>
- [22] Müller-Schärer, H., in drugi (2014). *Ophraella communa*, the ragweed leaf beetle, has successfully landed in Europe: Fortunate coincidence or threat? *Weed Research*, 54(2), 109–119. <https://doi.org/10.1111/wre.12072>

- [23] Šipek, M., Horvat, E. in Šajna, N. (2023). Eastward range expansion of the ragweed leaf beetle (*Ophraella communa* LeSage, 1986) (Coleoptera, Chrysomelidae) in Slovenia. *BioInvasions Records*, 12(2), 615–623. <https://doi.org/10.3391/bir.2023.12.2.24>
- [24] Zandigiacomo, P., Boscutti, F., Buian, F. M., Villani, A., Wiedemeier, P. in Cargnus, E. (2020). Occurrence of the non-native species *Ophraella communa* on *Ambrosia artemisiifolia* in north-eastern Italy, with records from Slovenia and Croatia. *Bulletin of Insectology*, 73(1), 87–94.
- [25] Šipek, M., Horvat, E. in Šajna, N. (2025). Ragweed leaf beetle *Ophraella communa* LeSage, 1986 (Coleoptera, Chrysomelidae) successfully crossing the Slovenian–Austrian border. *BioInvasions Records*, 14(3), 565–574. <https://doi.org/10.3391/bir.2025.14.3.07>
- [26] Lukátsi, M. in Horváth, D. (2024). Natural enemy of *Ambrosia artemisiifolia* L. is spreading in Central Europe: First records of the ragweed leaf beetle (*Ophraella communa* LeSage, 1986) from Austria and Slovakia (Coleoptera: Chrysomelidae). *Folia Entomologica Hungarica*, 85, 101–106. <https://doi.org/10.17112/foliaenthung.2024.85.101>
- [27] Augustinus, B. A., Gentili, R., Horvath, D., Naderi, R., Sun, Y., Tournet, A., Schaffner, U. in Müller-Schärer, H. (2020). Assessing the risks of non-target feeding by the accidentally introduced ragweed leaf beetle, *Ophraella communa*, to native European plant species. *Biological Control*, 150, 104356. <https://doi.org/10.1016/j.biocontrol.2020.104356>
- [28] Teodora, F. (2017). Dynamics of the attack by *Parectopa robiniella* and *Phyllonorycter robiniella* of black locust from Valea lui Mihai and Covasna. *Forest Biotechnology*, 21(3), 96–103. Pridobljeno 31. julija 2026 s spletne strani <http://www.journal-hfb.usab-tm.ro>
- [29] Clewley, G. D., Eschen, R., Shaw, R. H. in Wright, D. J. (2012). The effectiveness of classical biological control of invasive plants. *Journal of Applied Ecology*, 49(6), 1287–1295. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2664.2012.02209.x>
- [30] Colautti, R. I. in Antunes, P. M. (2025). A critical reassessment of the novel weapons hypothesis and allelopathy as an adaptive strategy that facilitates plant invasion. *New Phytologist*, 248(2), 507–516. <https://doi.org/10.1111/nph.70415>
- [31] Kalisz, S., Kivlin, S. N. in Bialic-Murphy, L. (2021). Allelopathy is pervasive in invasive plants. *Biological Invasions*, 23(2), 367–371. <https://doi.org/10.1007/s10530-020-02383-6>
- [32] Callaway, R. M., Lucero, J. E., Hierro, J. L. in Lortie, C. J. (2022). The EICA is dead? Long live the EICA! *Ecology Letters*, 25(10), 2289–2302. <https://doi.org/10.1111/ele.14088>
- [33] Felker-Quinn, E., Schweitzer, J. A. in Bailey, J. K. (2013). Meta-analysis reveals evolution in invasive plant species but little support for Evolution of Increased Competitive Ability (EICA). *Ecology and Evolution*, 3(3), 739–751. <https://doi.org/10.1002/ece3.488>
- [34] Baker, H. G. (1974). The evolution of weeds. *Annual Review of Ecology and Systematics*, 5, 1–24. <https://www.jstor.org/stable/2096877>
- [35] Liao, H., Pal, R. W., Niinemets, Ü., Bahn, M., Cerabolini, B. E. L. in Peng, S. (2021). Different functional characteristics can explain different dimensions of plant invasion success. *Journal of Ecology*, 109(3), 1524–1536. <https://doi.org/10.1111/1365-2745.13575>
- [36] Fenesi, A. in Botta-Dukát, Z. (2010). Do short-lived and long-lived alien plant species differ regarding the traits associated with their success in the introduced range? *Biological Invasions*, 12(3), 611–623. <https://doi.org/10.1007/s10530-009-9468-6>
- [37] Binama, B. (2023). *Establishment and trait variation of a range expanding Brassicaceae species under various growth conditions* [Doktorska disertacija, Bielefeld University].
- [38] Gallagher, R. V., Randall, R. P. in Leishman, M. R. (2015). Trait differences between naturalized and invasive plant species independent of residence time and phylogeny. *Conservation Biology*, 29(2), 360–369. <https://doi.org/10.1111/cobi.12399>

- [39] Montesinos, D. (2022). Fast invasives fastly become faster: Invasive plants align largely with the fast side of the plant economics spectrum. *Journal of Ecology*, 110(5), 1010–1014. <https://doi.org/10.1111/1365-2745.13616>
- [40] Liu, Y. Y., Sun, Y., Müller-Schärer, H., Yan, R., Zhou, Z. X., Wang, Y. J. in Yu, F. H. (2019). Do invasive alien plants response differ from non-invasives in dominance and nitrogen uptake to variation of abiotic and biotic environments under global anthropogenic change? *Science of the Total Environment*, 672, 634–642. <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2019.04.024>
- [41] Huang, H., Guo, S. in Chen, G. (2007). Reproductive biology in an invasive plant *Solidago canadensis*. *Frontiers of Biology in China*, 2(2), 196–204. <https://doi.org/10.1007/s11515-007-0030-6>
- [42] Godoy, O., Richardson, D. M., Valladares, F. in Castro-Díez, P. (2009). Flowering phenology of invasive alien plant species compared with native species in three Mediterranean-type ecosystems. *Annals of Botany*, 103(3), 485–494. <https://doi.org/10.1093/aob/mcn232>
- [43] Davidson, A. M., Jennions, M. in Nicotra, A. B. (2011). Do invasive species show higher phenotypic plasticity than native species and, if so, is it adaptive? A meta-analysis. *Ecology Letters*, 14(4), 419–431. <https://doi.org/10.1111/j.1461-0248.2011.01596.x>
- [44] Zettlemoyer, M. A., Schultheis, E. H. in Lau, J. A. (2019). Phenology in a warming world: Differences between native and non-native plant species. *Ecology Letters*, 22(8), 1253–1263. <https://doi.org/10.1111/ele.13290>
- [45] Godoy, O., Valladares, F. in Castro-Díez, P. (2011). Multispecies comparison reveals that invasive and native plants differ in their traits but not in their plasticity. *Functional Ecology*, 25(6), 1248–1259. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2435.2011.01886.x>
- [46] Palacio-López, K. in Gianoli, E. (2011). Invasive plants do not display greater phenotypic plasticity than their native or non-invasive counterparts: A meta-analysis. *Oikos*, 120(9), 1393–1401. <https://doi.org/10.1111/j.1600-0706.2010.19114.x>
- [47] Drake, J. A., Mooney, H. A., diCastri, F., Groves, R. H., Kruger, F. J., Rejmanek, M. in Williamson, M. (ur.). (1989). *Biological invasions: A global perspective*. John Wiley & Sons.
- [48] Levine, J. M. in D'Antonio, C. M. (2003). Forecasting biological invasions with increasing international trade. *Conservation Biology*, 17(1), 322–326. <https://doi.org/10.1046/j.1523-1739.2003.02038.x>
- [49] Van Kleunen, M., Weber, E. in Fischer M. (2018). The changing role of ornamental horticulture in alien plant invasions. *Biological Reviews*, 93(3), 1421–1437. <https://doi.org/10.1111/brv.12402>
- [50] Hulme, P. E. (2012). Weed risk assessment: A way forward or a waste of time? *Journal of Applied Ecology*, 49(1), 10–19. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2664.2011.02069.x>
- [51] Hulme, P. E. (2011). Addressing the threat to biodiversity from botanic gardens. *Trends in Ecology & Evolution*, 26(4), 168–174. <https://doi.org/10.1016/j.tree.2011.01.005>
- [52] Simberloff, D. in Rejmánek, M. (ur.). (2011). *Encyclopedia of biological invasions*. University of California Press.
- [53] Richardson, D. M. in Pyšek, P. (2012). Naturalization of introduced plants: Ecological drivers of biogeographical patterns. *New Phytologist*, 196(2), 383–396. <https://doi.org/10.1111/j.1469-8137.2012.04292.x>
- [54] Van Kleunen, M. in Johnson, S. D. (2007). South African Iridaceae with rapid and profuse seedling emergence are more likely to become naturalized in other regions. *Journal of Ecology*, 95(4), 674–681. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2745.2007.01250.x>
- [55] Dawson, W., Fischer, M. in Van Kleunen, M. (2011). The maximum relative growth rate of common UK plant species is positively associated with their global invasiveness. *Global*

- Ecology and Biogeography*, 20(2), 299–306. <https://doi.org/10.1111/j.1466-8238.2010.00599.x>
- [56] Mack, R. N. (2005). Predicting the identity of plant invaders: Future contributions from horticulture. *HortScience*, 40(5), 1168–1174. <https://journals.ashs.org>
- [57] Gallagher, R. V., Randall, R. P. in Leishman, M. R. (2015). Trait differences between naturalized and invasive plant species independent of residence time and phylogeny. *Conservation Biology*, 29(2), 360–369. <https://doi.org/10.1111/cobi.12399>
- [58] Knapp, S., Dinsmore, L., Fissore, C., Hobbie, S. E., Jakobsdottir, I., Kattge, J., King, J. Y., Klotz, S., McFadden, J. P. in Cavender-Bares, J. (2012). Phylogenetic and functional characteristics of household yard floras and their changes along an urbanization gradient. *Ecology*, 93(8), 83–98. <https://doi.org/10.1890/11-0392.1>
- [59] Murphy, G. E. P. in Romanuk, T. N. (2014). A meta-analysis of declines in local species richness from human disturbances. *Ecology and Evolution*, 4(1), 91–103. <https://doi.org/10.1002/ece3.909>
- [60] Davis, M. A., Grime, J. P. in Thompson, K. (2000). Fluctuating resources in plant communities: A general theory of invasibility. *Journal of Ecology*, 88(3), 528–534. <https://doi.org/10.1046/j.1365-2745.2000.00473.x>
- [61] Fristoe, T. S., Chytrý, M., Dawson, W., Essl, F., Heleno, R., Kreft, H., Maurel, N., Pergl, J., Pyšek, P., Seebens, H., Weigelt, P., Vargas, P., Yang, Q., Attorre, F., Bergmeier, E., Bernhardt-Römermann, M., Biurrun, I., Boch, S., Bonari, G., Botta-Dukát, Z., ... Van Kleunen, M. (2021). Dimensions of invasiveness: Links between local abundance, geographic range size, and habitat breadth in Europe's alien and native floras. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 118(22), e2021173118. <https://doi.org/10.1073/pnas.2021173118>
- [62] Catford, J. A., Vesk, P. A., Richardson, D. M. in Pyšek, P. (2012). Quantifying levels of biological invasion: Towards the objective classification of invaded and invisable ecosystems. *Global Change Biology*, 18(1), 44–62. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2486.2011.02549.x>
- [63] Catford, J. A., Jansson, R. in Nilsson, C. (2009). Reducing redundancy in invasion ecology by integrating hypotheses into a single theoretical framework. *Diversity and Distributions*, 15(1), 22–40. <https://doi.org/10.1111/j.1472-4642.2008.00521.x>
- [64] Funk, J. L. in Vitousek, P. M. (2007). Resource-use efficiency and plant invasion in low-resource systems. *Nature*, 446(7139), 1079–1081. <https://doi.org/10.1038/nature05719>
- [65] Omer, A., Dullinger, S., Wessely, J., Lenzner, B., García-Rodríguez, A., Schertler, A., Moser, D., Gattringer, A., Davis, A. J. S., Dawson, W., Fristoe, T. S., Grenié, M., Kinlock, N. L., Kreft, H., Pergl, J., Pyšek, P., van Kleunen, M., Weigelt, P., Winter, M., Zurell, D. in Essl, F. (2026). The global geography of plant invasion risk under future climate and land-use changes. *Nature Ecology & Evolution*, 10(3). <https://doi.org/10.1038/s41559-026-03040-2>
- [66] Evropski parlament in Svet Evropske unije. (2014). *Uredba (EU) št. 1143/2014 Evropskega parlamenta in Sveta z dne 22. oktobra 2014 o preprečevanju in obvladovanju vnosa in širjenja invazivnih tujerodnih vrst.*

Dokazovanje obstoja objekta s pomočjo verjetnosti

Using Probability to Prove Existence

Tanja Dravec *

Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Koroška cesta 160, Maribor, Slovenia

Povzetek

V kombinatoriki se pogosto srečujemo s problemi, pri katerih se zdi, da je potrebno zelo zapleteno štetje ali dolgotrajen konstruktiven dokaz. Presenetljivo pa lahko verjetnost v mnogih primerih ponudi elegantnejši in precej krajši pristop. V članku predstavimo tri klasične rezultate, ki jih lahko učinkovito dokažemo s pomočjo verjetnostne metode: 2-obarvljivost družin množic, spodnjo mejo za Ramseyeva števila ter lemo o številu križanj.

Ključne besede: verjetnostna metoda, 2-barvanje družine množic, Ramseyeva števila, lema o številu križanj.

Abstract

In combinatorics, we often encounter problems that seem to require highly intricate counting arguments or lengthy constructive proofs. Surprisingly, probability can in many cases provide a more elegant and significantly shorter approach. In this article, we present three classical results that can be effectively proved using the probabilistic method: the 2-colorability of set families, a lower bound for Ramsey numbers, and the crossing lemma.

Key words: Probabilistic method, 2-colorable families, Ramsey numbers, crossing lemma.

1 Uvod

Kombinatorika je področje matematike, kjer pogosto proučujemo različne načine razporejanja, povezovanja in barvanja objektov. Posebej v teoriji grafov naletimo na probleme, pri katerih se zdi, da bi bilo treba pregledati veliko različnih možnosti ali skonstruirati zelo zapletene primere. Rešitve takšnih problemov so lahko zelo dolge, tehnično zahtevne in pogosto vključujejo precej zapleteno štetje.

V prvi polovici 20. stoletja se je pojavila nova ideja, ki je močno spremenila način razmišljanja v kombinatoriki. Madžarska matematika Erdős in Rényi sta razvila pristop, ki ga danes poznamo pod imenom *verjetnostna metoda* [4, 8]. Ta metoda velja za eno najpomembnejših idej moderne kombinatorike in teorije grafov.

Osnovna ideja verjetnostne metode je presenetljivo preprosta: če je verjetnost, da naključno izbran objekt *nima* določene lastnosti, manjša od 1, potem mora obstajati vsaj en objekt, ki to lastnost ima. Tako dobimo eksistenčni dokaz za objekt z željeno lastnostjo.

*

E-naslov: tanja.dravec@um.si (Tanja Dravec)

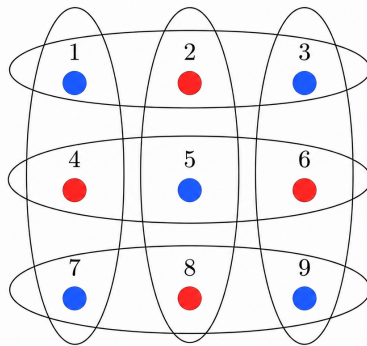
Pogosto takšnega objekta ne znamo eksplicitno skonstruirati, vendar nam verjetnost zagotovi, da zagotovo obstaja. Ravno v tem je moč verjetnostne metode: namesto zapletenega konstruiranja ali dolgotrajnega štetja analiziramo naključno izbran objekt in pokažemo, da ima želene lastnosti s pozitivno verjetnostjo.

Erdős je to idejo uporabil pri številnih problemih kombinatorike in teorije grafov, pri čemer so mnogi njegovi dokazi postali klasični primeri elegantnega matematičnega razmišljanja. Verjetnostna metoda je danes nepogrešljivo orodje moderne matematike in ima pomembne povezave tudi z računalništvom, teorijo kodiranja ter optimizacijo. V tem članku bomo predstavili tri probleme, ki imajo elegantne rešitve z uporabo verjetnostne metode. Primeri bodo postopoma postajali zahtevnejši, hkrati pa bodo lepo pokazali, kako lahko naključje uporabimo za dokazovanje povsem determinističnih matematičnih trditev. Pri izboru problemov in dokazov je bila pomemben vir navdiha knjiga *Proofs from THE BOOK* [1], znana po zbirki posebej elegantnih matematičnih dokazov.

2 2-obarvljivost družin množic

Naj bo $\mathcal{F}$ družina (ne nujno vseh) d -podmnožic množice X , kjer je $|X| \geq d$ in $d \geq 2$. Družina $\mathcal{F}$ je *2-obarvljiva*, če lahko elemente množice X pobarvamo z dvema barvama tako, da se v vsaki množici $A \in \mathcal{F}$ pojavita obe barvi.

Na sliki 1 je primer 2-obarvljive družine šestih 3-podmnožic množice z devetimi elementi.



Slika 1: Primer 2-obarvljive družine. Če na primer lihe elemente pobarvamo modro in sode rdeče, sta v vsaki obkroženi množici zastopani obe barvi.

Hitro opazimo, da vse družine niso 2-obarvljive. Naj bo na primer

$$X = \{1, 2, 3\} \quad \text{in} \quad \mathcal{F} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}.$$

Pri poljubnem barvanju množice X z dvema barvama bosta vsaj dva elementa $i, j \in X$ dobila isto barvo. Zato bo množica $\{i, j\} \in \mathcal{F}$ enobarvna, kar pomeni, da se v njej ne pojavita obe barvi. Sledi, da družina $\mathcal{F}$ ni 2-obarvljiva.

Ta zgled lahko splošimo. Naj bo

$$X = \{1, \dots, 2d - 1\}$$

in

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X : |A| = d\}.$$

Po principu golobjnaka bo pri vsakem barvanju elementov množice X z dvema barvama vsaj d elementov

$$i_1, \dots, i_d \in X$$

dobilo isto barvo. Tedaj je množica

$$\{i_1, \dots, i_d\} \in \mathcal{F}$$

enobarvna, zato družina $\mathcal{F}$ ni 2-obarvljiva.

Vzemimo sedaj poljubno število $d \geq 2$ in množico X moči vsaj d . Zanimalo nas bo *najmanjše* število $m = m(d)$, za katero obstaja družina d -podmnožic $\mathcal{F}$ množice X , da velja $|\mathcal{F}| = m$ in $\mathcal{F}$ ni 2-obarvljiva. Ekvivalentno je $m(d)$ največje število, za katero velja, da je vsaka družina d -podmnožic množice X z manj kot $m(d)$ množicami 2-obarvljiva. V nadaljevanju predstavimo spodnjo mejo za $m(d)$.

Izrek 2.1. *Naj bo $\mathcal{F}$ družina d -podmnožic množice X , kjer je $d \geq 2$ in $|X| \geq d$. Če $|\mathcal{F}| \leq 2^{d-1}$, potem je $\mathcal{F}$ 2-obarvljiva.*

Dokaz. Naj bo $d \geq 2$, $|X| \geq d$ in naj bo $\mathcal{F}$ družina d -podmnožic množice X z $|\mathcal{F}| \leq 2^{d-1}$. Množico X naključno pobarvajmo z dvema barvama z barvanjem $c : X \rightarrow \{a, b\}$, pri čemer za poljuben element x množice X velja $P(c(x) = a) = P(c(x) = b) = \frac{1}{2}$. Za poljubno množico $A \in \mathcal{F}$ naj E_A označuje dogodek, da so vsi elementi množice A z barvanjem c pobarvani z isto barvo. Ker obstajata natanko dve taki barvanji, velja

$$P(E_A) = \left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{1}{2}\right)^d = \left(\frac{1}{2}\right)^{d-1}.$$

Če je $|\mathcal{F}| = 1$, je družina $\mathcal{F}$ očitno 2-obarvljiva. Sicer pa sta poljubna dva dogodka E_A in $E_{A'}$, $A, A' \in \mathcal{F}$ združljiva, zato z uporabo predpostavke $|\mathcal{F}| \leq 2^{d-1}$ dobimo

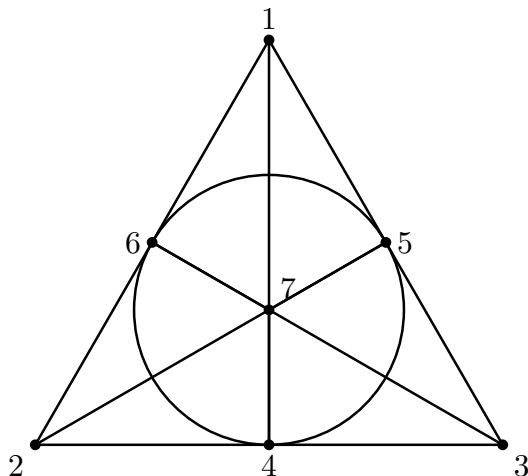
$$P\left(\bigcup_{A \in \mathcal{F}} E_A\right) \leq \sum_{A \in \mathcal{F}} P(E_A) = \sum_{A \in \mathcal{F}} \left(\frac{1}{2}\right)^{d-1} \leq 2^{d-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{d-1} = 1.$$

Torej obstaja barvanje množice X z dvema barvama, pri katerem vsaka množica družine $\mathcal{F}$ vsebuje elemente obeh barv. $\square$

Posledica 2.2. *Za vsako naravno število $d \geq 2$ velja*

$$m(d) > 2^{d-1}.$$

Zgoraj smo že utemeljili preprosto zgornjo mejo za $m(d)$, to je $m(d) \leq \binom{2^{d-1}}{d}$. Seveda pa lahko v literaturi najdemo tudi boljše zgornje meje. Avtor prve znane zgornje meje, dobljene z verjetnostno metodo, je Erdős [5]. Najboljša znana zgornja meja danes je približno $\sqrt{\frac{d}{\log d}} 2^d$, ki sta jo dokazala Radhakrishnan in Srinivasan [9]. Natančne vrednosti za $m(d)$ so znane le za $d = 2$ in $d = 3$. Primer pod sliko 1 dokazuje, da je $m(2) = 3$. Znano je še, da je $m(3) = 7$.



Slika 2: Fanova ravnina. Premice v tej ravnini so predstavljene s kolinearnimi točkami in s krožnico.

Za dokaz neenakosti $m(3) \leq 7$ zadošča poiskati družino sedmih 3-podmnožic množice X , ki ni 2-obarvljiva. Naj bo

$$X = \{1, 2, \dots, 7\}$$

in naj vsaka od sedmih premic Fanove ravnine (glej sliko 2) predstavlja eno množico družine $\mathcal{F}$.

Dokazali bomo, da družina $\mathcal{F}$ ni 2-obarvljiva. Predpostavimo nasprotno, torej da obstaja 2-barvanje

$$c : X \rightarrow \{a, b\},$$

pri katerem je vsaka množica iz $\mathcal{F}$ dvobarvna. To pomeni, da vsaka premica vsebuje točke obeh barv.

Ker je $|X| = 7$, iz principa golobnjaka sledi, da obstajajo vsaj štiri točke

$$x, y, z, w \in X,$$

ki imajo isto barvo; brez škode za splošnost naj bo to barva a .

V Fanovi ravnini poljubni dve točki določata natanko eno premico. Označimo z L_{ij} premico skozi točki i in j . Ker so vse premice dvobarvne, mora za vsak par

$$i, j \in \{x, y, z, w\}, \quad i \neq j,$$

premica L_{ij} vsebovati še tretjo točko iz množice

$$X \setminus \{x, y, z, w\}.$$

Premice, določene s pari točk iz $\{x, y, z, w\}$, so zato paroma različne. Ker imata poljubni dve premici Fanove ravnine natanko eno skupno točko, velja

$$L_{xy} \cap L_{zw} = \{p\}, \quad L_{xz} \cap L_{yw} = \{q\}, \quad L_{xw} \cap L_{yz} = \{r\},$$

kjer

$$\{p, q, r\} = X \setminus \{x, y, z, w\}.$$

Ker je vsaka izmed premic $L_{xy}, L_{xz}, L_{xw}, L_{yz}, L_{yw}, L_{zw}$ dvobarvna in ker imajo točke x, y, z, w barvo a , morajo imeti točke p, q, r barvo b . Toda v Fanovi ravnini poleg omenjenih šestih premic obstaja še natanko ena premica,

$$L = \{p, q, r\},$$

ki je zato enobarvna. To pa je protislovje s predpostavko, da so vse premice dvobarvne.

Sledi, da Fanova ravnina ni 2-obarvljiva, zato velja

$$m(3) \leq 7.$$

Z analizo primerov lahko dokažemo, da so vse družine šestih 3-podmnožic dane množice X 2-obarvljive [7].

3 Ramseyeva števila

Naj bo K_N polni graf na N vozliščih. Graf K_N ima lastnost (m, n) , če za vsako barvanje povezav grafa K_N z dvema barvama, recimo rdečo in modro, velja, da obstaja polni podgraf K_m , katerega vse povezave so rdeče barve, ali obstaja polni podgraf K_n , katerega vse povezave so modre. Če ima graf K_N lastnost (m, n) , potem ima za vsak $s \geq N$, tudi K_s lastnost (m, n) . Zato nas seveda zanima *najmanjši* N (če obstaja) s to lastnostjo, ki mu pravimo *Ramseyevo število* in ga označimo z $R(m, n)$.

Trditev 3.1. Za poljubno naravno število $m \geq 2$ velja

$$R(m, 2) = R(2, m) = m.$$

Dokaz. Naj bo $c : E(K_m) \rightarrow \{a, b\}$ poljubno barvanje povezav grafa K_m z dvema barvama, a in b . Če obstaja vsaj ena povezava barve b , potem K_m vsebuje podgraf K_2 , katerega edina povezava je barve b . Sicer so vse povezave barve a , zato je kar sam K_m polni podgraf, katerega vse povezave so barve a . Od tod sledi, da je $R(m, 2) \leq m$.

Po drugi strani pa lahko pobarvamo vse povezave polnega grafa K_{m-1} z barvo a . S tem K_{m-1} ne vsebuje podgrafa K_m , ki ima vse povezave barve a , prav tako pa ne vsebuje podgrafa K_2 , katerega povezava bi bila barve b . Zato je $R(m, 2) > m - 1$. Torej, $R(m, 2) = m$. Analogno dokažemo, da je $R(2, m) = m$. $\square$

Preden dokažemo zgornjo mejo za Ramseyevo število $R(m, n)$, vpeljimo še naslednjo oznako. Naj bo $G = (V, E)$ graf in $A \subseteq V(G)$. Z $G[A]$ označujemo podgraf od G , induciran z množico vozlišč A .

Trditev 3.2. Če obstajata $R(m - 1, n)$ in $R(m, n - 1)$, potem obstaja $R(m, n)$ in velja

$$R(m, n) \leq R(m - 1, n) + R(m, n - 1).$$

Dokaz. Naj bo $N = R(m - 1, n) + R(m, n - 1)$ in naj bo $c : E(K_N) \rightarrow \{a, b\}$ poljubno barvanje povezav z barvama a in b . Naj bo $v \in V(K_N)$ poljubno vozlišče in naj bosta $A = \{x \in V(K_N) : c(vx) = a\}$, $B = \{x \in V(K_N) : c(vx) = b\}$. Ker velja $|A| + |B| = N - 1$, je bodisi $|A| \geq R(m - 1, n)$, bodisi $|B| \geq R(m, n - 1)$. Brez izgube za splošnost predpostavimo $|A| \geq R(m - 1, n)$. Iz definicije $R(m - 1, n)$ sledi, da obstaja $A' \subseteq A$ velikosti $m - 1$ z lastnostjo $c(xy) = a$ za vsak $x, y \in A'$ ali obstaja $B' \subset A$

velikosti n z lastnostjo $c(xy) = b$ za vsak $x, y \in B'$. Slednje implicira, da je $K_N[B']$ polni podgraf grafa K_N z n vozlišči, katerega vse povezave so barve b . Če pa obstaja $A' \subseteq A$ velikosti $m - 1$ z lastnostjo $c(xy) = a$ za vsak $x, y \in A'$, potem je $K_N[A' \cup \{v\}]$ polni podgraf od K_N z m vozlišči, katerega vse povezave so barve a . Graf K_N torej zadošča lastnosti (m, n) , kar pomeni, $R(m, n) \leq N = R(m - 1, n) + R(m, n - 1)$. $\square$

Posledica 3.3. Za poljubni naravni števili $m, n \geq 2$ velja

$$R(m, n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}.$$

Dokaz. Neenakost dokažimo z indukcijo po $m + n$. Iz trditve 3.1 sledi, da za vsak $m \geq 2$ velja $R(m, 2) = m = \binom{m+2-2}{m-1}$ in $R(2, m) = m = \binom{2+m-2}{1}$. Naj bosta sedaj m, n poljubni naravni števili, obe večji od 2. Predpostavimo, da za vsaka s, t , z $s + t < m + n$ velja $R(s, t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$. Potem iz trditve 3.2 in induksijske predpostavke sledi

$$R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1) \leq \binom{m+n-3}{m-2} + \binom{m+n-3}{m-1} = \binom{m+n-2}{m-1}.$$

$\square$

Naš glavni rezultat, dokazan z verjetnostno metodo, bo izračun spodnje meje za $R(k, k)$. Da lahko primerjamo razliko med zgornjo in spodnjo mejo, bomo obe meji zapisali kot potenco dvojke. Zato potrebujemo naslednji vemesni rezultat.

Lema 3.4. Za vsako naravno število n velja

$$\binom{2n}{n} \leq 2^{2n-1}.$$

Dokaz. Neenakost bomo dokazali z indukcijo po n . Za $n = 1$ velja: $\binom{2n}{n} = 2$ in $2^{2n-1} = 2$.

Naj bo sedaj n poljubno naravno število večje od 1 in predpostavimo, da za vsak $m < n$ velja $\binom{2m}{m} \leq 2^{2m-1}$. Z uporabo Pascalovega trikotnika dobimo

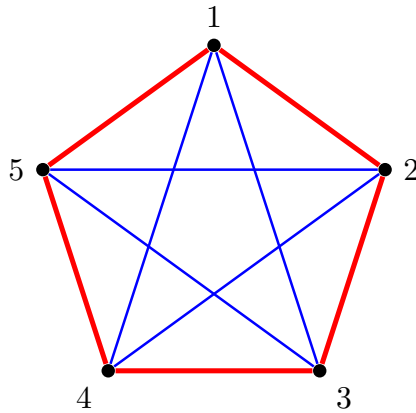
$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n} = \binom{2n-2}{n-2} + \binom{2n-2}{n-1} + \binom{2n-2}{n-1} + \binom{2n-2}{n} = \\ &= 2\binom{2n-2}{n-1} + 2\binom{2n-2}{n-2} \leq 4\binom{2n-2}{n-1}, \end{aligned}$$

kjer zadnja neenakost sledi iz dejstva, da je v dani vrstici Pascalovega trikotnika največje število ravno tisto, ki leži na sredini vrstice. Z uporabo induksijske predpostavke dobimo

$$\binom{2n}{n} \leq 4\binom{2(n-1)}{n-1} \leq 4 \cdot 2^{2n-3} = 2^{2n-1}.$$

$\square$

Posledica 3.3 in lema 3.4 implicirata naslednji rezultat.



Slika 3: Barvanje povezav K_5 . Rdeče povezave so odebeljene.

Posledica 3.5. Za poljubno naravno število $k \geq 2$ velja

$$R(k, k) \leq 2^{2k-3}.$$

V nadaljevanju tega poglavja se osredotočimo na iskanje spodnje meje Ramseyevega števila $R(k, k)$. Še prej dokažimo naslednjo lemo.

Lema 3.6. Za poljubni naravni števili $n \geq 2$ in $k \leq n$ velja

$$\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{2^{k-1}}.$$

Dokaz. Ker za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja $k! \geq 2^{k-1}$, dobimo

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!} \leq \frac{n^k}{2^{k-1}}.$$

□

Izrek 3.7. Za vsako naravno število $k \geq 2$ velja

$$R(k, k) \geq 2^{\frac{k}{2}}.$$

Dokaz. Iz trditve 3.1 sledi, da je $R(2, 2) = 2 \geq 2^{\frac{2}{2}}$. Iz posledice 3.3 sledi, da je $R(3, 3) \leq \binom{4}{2} = 6$. Ker obstaja tako barvanje povezav grafa K_5 , prikazano na sliki 3, da K_5 ne vsebuje podgraфа K_3 , katerega vse povezave so iste barve, je $R(3, 3) > 5$ in posledično $R(3, 3) = 6 \geq 2^{\frac{3}{2}}$.

Naj bo sedaj $k \geq 4$. Recimo, da je $R(k, k) = N < 2^{\frac{k}{2}}$. Naključno pobarvajmo povezave grafa K_N z barvama a in b , kjer vsaka povezava dobi vsako od barv z verjetnostjo $\frac{1}{2}$. Zato je vsako barvanje $c : E(K_N) \rightarrow \{a, b\}$ enako verjetno, z verjetnostjo $2^{-\binom{N}{2}}$. Naj bo A poljubna podmnožica $V(K_N)$ moči k . Z D_A označimo dogodek, da so vse povezave med vozlišči množice A pobarvane z barvo a . Potem je

$$P(D_A) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}.$$

Sedaj izračunajmo verjetnost p_1 , da ima kaka od k -podmnožic množice $V(K_N)$ vse svoje inducirane povezave barve a . Velja

$$p_1 = P\left(\bigcup_{|A|=k} D_A\right) \leq \sum_{|A|=k} P(D_A) = \binom{N}{k} \cdot 2^{-\binom{k}{2}}.$$

Ker je $N < 2^{\frac{k}{2}}$, iz leme 3.6 sledi

$$\binom{N}{k} 2^{-\binom{k}{2}} \leq \frac{N^k}{2^{k-1}} 2^{-\binom{k}{2}} < 2^{\frac{k^2}{2} - \binom{k}{2} - k + 1} = 2^{-\frac{k}{2} + 1} \leq \frac{1}{2},$$

kjer zadnja neenakost sledi iz dejstva, da je $k \geq 4$. Dokazali smo, da je $p_1 < \frac{1}{2}$. Na enak način dokažemo, da je verjetnost p_2 , da za kako k -podmnožico A množice $V(K_N)$ velja, da so vse povezave grafa $K_N[A]$ pobarvane z barvo b , manjša od $\frac{1}{2}$. Posledično velja $p_1 + p_2 < 1$, kar pomeni, da mora obstajati tako barvanje K_N , da povezave nobenega podgraфа K_k ne bodo vse iste barve. Zato graf K_N ne zadošča lastnosti (k, k) , torej je $R(k, k) > N$ za poljuben $N < 2^{\frac{k}{2}}$ ali ekvivalentno, $R(k, k) \geq 2^{\frac{k}{2}}$. $\square$

Takoj lahko opazimo, da je precej velika razlika med dokazano zgornjo in spodnjo mejo za $R(k, k)$. Čeprav je bila spodnja meja iz izreka 3.7 v naslednjih desetletjih večkrat izboljšana, je ostal eksponent $\frac{k}{2}$ najboljši znan vse do nedavnega. Največji napredek pri zgornji meji predstavlja Conlonov rezultat, ki podaja oceno oblike $\frac{4^k}{k^{\omega(k)}}$, kjer $\omega(k)$ z naraščanjem k teži proti neskončnosti, vendar zelo počasi [3].

4 Prekrižna števila

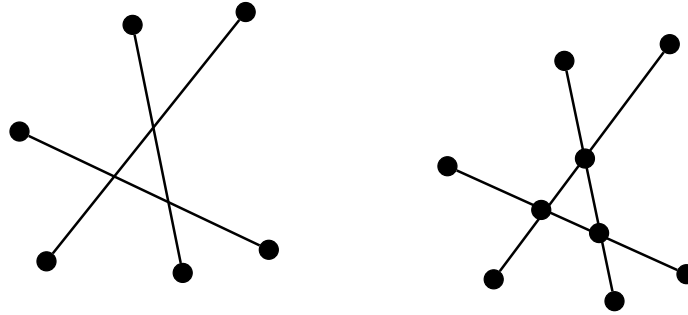
Graf G je *ravninski*, če ima ravninsko risbo, to je taka vložitev grafa v ravnini $\mathbb{R}^2$, da se povezave ne sekajo, razen v skupnih krajiščih. V poljubni risbi grafa G je *križanje* dveh povezav e in f točka ravnine, ki leži v notranjosti obeh povezav in ni krajišče nobene od njiju. Ravninski graf je torej natanko tak graf, ki ima risbo brez križanj. *Lica* ravninske risbe so povezane komponente množice točk ravnine, ki ne pripadajo nobeni povezavi ali vozlišču grafa. Torej, lica so maksimalna območja ravnine, ki jih omejujejo povezave grafa. *Notranja lica* so lica, ki so omejena, *zunanje lica* pa je edino neomejeno območje. Za risbo brez križanj enostavnega ravninskega grafa G z $n \geq 3$ vozlišči, m povezavami in f lici velja Eulerjeva formula

$$n - m + f = 2.$$

Iz nje hitro sledi zgornja meja za število povezav v ravninskih grafih na vsaj treh vozliščih, tj. $m \leq 3n - 6$. Torej, če za graf G velja $m > 3n - 6$, potem G ni ravninski. *Prekrižno število* grafa G , $\text{cr}(G)$ je definirano kot najmanjše število križanj med vsemi risbami grafa G v ravnini, pri čemer križanja več kot dveh povezav v eni točki niso dovoljena. Iz definicije neposredno sledi, da je G ravninski natanko tedaj, ko je $\text{cr}(G) = 0$.

Zanimale nas bodo torej risbe enostavnega grafa s čim manj presečišči. V takih risbah se ne pojavi nobena od naslednjih situacij:

- obstaja križanje povezave same s seboj;
- obstaja križanje dveh sosednjih povezav;
- poljubni dve povezavi imata več kot eno križanje.



Slika 4: Del grafa G (leva stran) s tremi povezavami, šestimi vozlišči in tremi križanji. Pripadajoči graf H (desna stran) ima 9 vozlišč in 9 povezav.

Če se na neki risbi pojavi katera koli od zgornjih možnosti, potem obstaja risba z manj križanji.

Preden nadaljujemo, se spomnimo leme o rokovanju, imenovane tudi osnovna lema teorije grafov, ki jo bomo potrebovali v nadaljevanju.

Lema 4.1. Za vsak graf $G = (V, E)$ velja

$$2|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} \deg(v).$$

Naj bo G graf narisan v ravnini tako, da ima dana risba natanko $\text{cr}(G)$ križanj. Naj bo H graf, ki ga iz grafa G dobimo tako, da vsako križanje povezav grafa G nadomestimo z novim vozliščem, povezave pa so vsi deli originalnih povezav, ki pri tem nastanejo. Tako dobljen graf H je seveda enostaven ravninski graf (primer je na sliki 4).

Naj bo G poljuben graf narisan v ravnini tako, da ima dana risba natanko $\text{cr}(G)$ križanj. Naj bo H ravninski graf, ki ga iz G dobimo z zgoraj opisanim postopkom. Potem velja: $|V(H)| = |V(G)| + \text{cr}(G)$ in $|E(H)| = |E(G)| + 2\text{cr}(G)$, pri čemer zadnja enakost sledi iz leme o rokovanju in iz dejstva, da je stopnja vsakega novega vozlišča v H enaka 4.

Zgoraj vpeljan graf H uporabimo za dokaz naslednje spodnje meje za prekrižno število grafa.

Trditev 4.2. Za poljuben graf $G = (V, E)$ z $n \geq 3$ vozlišči in m povezavami velja

$$\text{cr}(G) \geq m - 3n + 6.$$

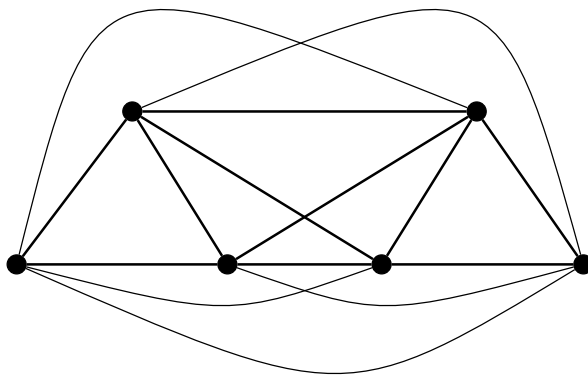
Dokaz. Naj bo G poljuben graf z n vozlišči in m povezavami narisan v ravnini tako, da ima dana risba natanko $\text{cr}(G)$ križanj. Naj bo H ravninski graf, ki ga iz G dobimo z zgoraj opisanim postopkom. Ker je H ravninski, je njegovo število povezav navzgor omejeno z $|E(H)| \leq 3|V(H)| - 6$. Ker znamo število vozlišč in povezav grafa H izraziti s številom vozlišč in povezav grafa G , dobimo

$$m + 2\text{cr}(G) \leq 3(n + \text{cr}(G)) - 6,$$

iz česar sledi

$$\text{cr}(G) \geq m - 3n + 6.$$

□

Slika 5: Risba grafa K_6 s tremi križanji.

Posledica 4.3. Za poljuben graf $G = (V, E)$ z n vozlišči in m povezavami velja

$$cr(G) \geq m - 3n.$$

Dokaz. Za $n \geq 3$ iz trditve 4.2 sledi $cr(G) \geq m - 3n + 6$. Resničnost trditve preverimo še za $n \in \{0, 1, 2\}$. Če je $n = 0$, potem je $m = 0$ in zato $cr(G) = 0 = m - 3n$. Če je $n = 1$, potem je $m = 0$ in $cr(G) = 0 \geq 0 - 3 = -3$. Nazadnje naj bo $n = 2$. V tem primeru je $m \in \{0, 1\}$ in $cr(G) = 0$, torej trditev velja. $\square$

Iz trditve 4.2 takoj sledi $cr(K_6) \geq \binom{6}{2} - 18 + 6 = 3$. Ker obstaja risba grafa K_6 (glej sliko 5) z natanko tremi križanji, je $cr(K_6) = 3$.

Spodnja meja, predstavljena v trditvi 4.2 je uporabna zlasti v primeru, ko m linearno narašča z n . V primeru, ko je $m = \Theta(n^2)$, pa lahko mejo izboljšamo takole.

Izrek 4.4. Naj bo G enostaven graf z n vozlišči in m povezavami, kjer je $m \geq 4n$. Potem velja

$$cr(G) \geq \frac{1}{64} \frac{m^3}{n^2}.$$

Dokaz. Naj bo graf G narisani v ravnini tako, da se njegove povezave sekajo v natanko $cr(G)$ presečiščih. Za $p \in [0, 1]$ generirajmo induciran podgraf G_p grafa G tako, da vsako vozlišče grafa G neodvisno od ostalih izberemo z verjetnostjo p . Naj bodo n_p, m_p in X_p naključne spremenljivke, ki zaporedoma merijo število vozlišč, povezav in križanj risbe grafa G_p . Iz definicije prekrižnega števila sledi $X_p \geq cr(G_p)$, zato velja

$$E(X_p - m_p + 3n_p) \geq E(cr(G_p) - m_p + 3n_p) \geq 0,$$

kjer zadnja neenakost sledi iz posledice 4.3. V naslednjem koraku izračunajmo pričakovane vrednosti $E(X_p), E(n_p), E(m_p)$ posameznih spremenljivk. Ker je n_p porazdeljena z binomsko porazdelitvijo, je $E(n_p) = np$. Ker povezava grafa G pripada grafu G_p natanko tedaj, ko obe njeni krajišči ležita v G_p , je $E(m_p) = p^2m$. Nazadnje opazimo, da je $E(X_p) = p^4 cr(G)$, saj je križanje grafa G tudi v G_p natanko tedaj, ko so vsa štiri različna vozlišča, ki določajo sekajoči povezavi, vsebovana v G_p . Iz linearnosti matematičnega upanja sledi

$$0 \leq E(X_p - m_p + 3n_p) = E(X_p) - E(m_p) + 3E(n_p) = p^4 cr(G) - p^2m + 3pn.$$

Če iz te neenačbe izrazimo $\text{cr}(G)$, dobimo

$$\text{cr}(G) \geq \frac{p^2 m - 3pn}{p^4} = \frac{pm - 3n}{p^3}.$$

Ta meja velja za vse $p \in [0, 1]$, tudi za $p := \frac{4n}{m}$, ki je največ 1 zaradi naše predpostavke. Zato lahko v zgoraj zapisani meji pm nadomestimo s $4n$ in dobimo

$$\text{cr}(G) \geq \frac{n}{p^3} = \frac{m^3}{64n^2}.$$

□

Izrek 4.4 je v literaturi poznan pod imenom *lema o številu križanj* (crossing lemma). Kot domnevo sta jo najprej zastavila Erdős in Guy [6], pri čemer natančna vrednost konstante $\frac{1}{64}$ še ni bila znana. Prvi dokaz iz 80. let prejšnjega stoletja je podal slabšo konstanto, namreč $\frac{1}{100}$ [10, 2]. Lema o številu križanj dolgo časa ni bila posebej poznana – pravzaprav so jo številni še dolgo po objavi prvih dokazov obravnavali kot domnevo. Njeno uporabnost je v odmevnem članku pokazal László Székely [11], ko jo je uporabil pri reševanju različnih dotlej težavnih ekstremalnih problemov v geometriji. Zgoraj predstavljen dokaz z verjetnostno metodo je povzet po [1] in je nastal na podlagi elektronske korespondence med Bernardom Chazellejem, Michom Sharirjem in Emom Welzljem.

5 Zaključek

Za zaključek lahko poudarimo, da verjetnostna metoda predstavlja izjemno učinkovito orodje sodobne kombinatorike, saj omogoča elegantne in pogosto presenetljivo kratke dokaze rezultatov, ki jih je z determinističnimi pristopi težko doseči. V članku smo videli, kako lahko z uporabo verjetnostnih argumentov dokažemo obstoj 2-obarljivih družin množic, pridobimo spodnjo mejo za Ramseyjeva števila ter izpeljemo lemo o številu križanj, ki govori o spodnji meji prekriznega števila grafov.

Literatura

- [1] M. Aigner, G.M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, sixth ed., Springer, Berlin 2018.
- [2] M. Ajtai, V. Chvátal, M. Newborn, E. Szemerédi, Crossing-free subgraphs, *Annals of Discrete Math.* **12** (1982), 9–12.
- [3] D. Conlon, A new upper bound for diagonal Ramsey numbers, *Annals Math.* **170** (2009), 941–960.
- [4] P. Erdős, Graph theory and probability, *Canadian J. Math.* **11** (1959), 34–38.
- [5] P. Erdős, On a combinatorial problem I, *Nordisk Math. Tidskrift* **11** (1963), 5–10.
- [6] P. Erdős, R.K. Guy, Crossing number problems, *Amer. Math. Monthly* **80** (1973), 52–58.
- [7] P. Erdős, A. Hajnal, On a property of families of sets, *Acta Math. Hungar.* **12** (1961), 87–123.
- [8] P. Erdős, A. Rényi, On the evolution of random graphs, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közl.* **5** (1960), 17–61.
- [9] J. Radhakrishnan, A. Srinivasan, Improved bounds and algorithms for hypergraph 2-coloring, *Random Struct. Algorithms* **16** (2000), 4–32.
- [10] T. Leighton, *Complexity Issues in VLSI*, MIT Press, Cambridge MA, 1983.

- [11] L.A. Székely, Crossing numbers and hard Erdős problems in discrete geometry, *Combinatorics, Probability, and Computing* **6** (1997), 353–358.

Večdimenzionalna oksidacija silicijevega karbida

Multidimensional Oxidation of Silicon Carbide

Vito Šimonka

Silvaco Europe Ltd., Compass Point, St. Ives PE27 5JL, United Kingdom

Povzetek

Polprevodniki so osnova izdelkov sodobnih tehnologij, kot so pametni telefoni, električna vozila in sončne elektrarne. Najbolj razširjen polprevodnik je silicij, ki pa pri visokih napetostih in temperaturah dosega omejitve v prebojni napetosti, hitrosti preklapljanja in odvajanju odvečne toplote. Zato pomembnejšo vlogo prevzema silicijev karbid (SiC), ki omogoča učinkovitejše delovanje močnostnih elektronskih naprav. Razvoj polprevodnikov danes temelji na fizikalnih simulacijah, ki omogočajo napovedovanje lastnosti naprav že pred izdelavo prototipov. Eden najpomembnejših korakov pri izdelavi tranzistorjev je rast oksidne plasti, ki vpliva na njihove električne lastnosti. Klasična modela za opis oksidacije, model Deal-Grove in model Massoud, pri SiC nista dovolj natančna, saj je hitrost oksidacije odvisna od kristalne orientacije materiala. Zato smo razvili interpolacijsko metodo, ki omogoča natančno 2D in 3D simulacijo oksidacije na kompleksnih strukturah polprevodnikov. Raziskava, ki jo obravnavamo v prispevku, potrjuje, da postajajo fizikalne simulacije ključna orodja za razvoj polprevodnikov prihodnosti, saj omogočajo boljše razumevanje materialov ter učinkovitejše načrtovanje elektronskih naprav.

Ključne besede: silicijev karbid, polprevodniki, fizikalne simulacije, oksidacija

Abstract

Semiconductors are the foundation of modern technologies such as computers, electric vehicles, and solar power plants. The most widely used semiconductor is silicon, however, at high voltages and temperatures it reaches its limits in terms of breakdown voltage, switching speed, and heat dissipation. As a result, silicon carbide (SiC) is taking on an increasingly important role, as it enables more efficient operation of power electronic devices. Today, semiconductor development relies heavily on computer simulations, which make it possible to predict device properties even before prototypes are manufactured. One of the most important steps in transistor fabrication is the growth of an oxide layer, which significantly affects their electrical characteristics. The classical oxidation models, the Deal-Grove and Massoud, are not sufficiently accurate for SiC because the oxidation rate depends on the crystal orientation of the material. Therefore, an interpolation-based method was developed that enables accurate 2D and 3D simulation of oxidation on complex structures. This research confirms that computer simulations are becoming essential tools for the development of future semiconductors, as they provide a better understanding of materials and enable more efficient design of electronic devices.

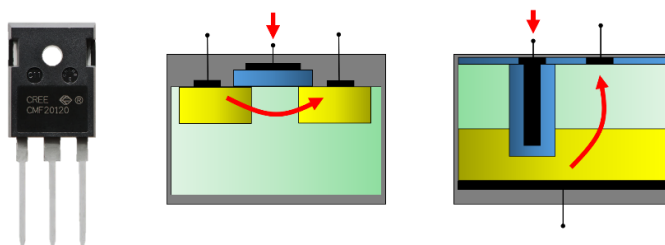
Key words: silicon carbide, semiconductors, computer simulations, oxidation

1 UVOD

Čeprav se pogosto govori o električnih avtomobilih, sončnih elektrarnah in umetni inteligenci, je v ozadju vseh teh tehnologij skupni imenovalec – polprevodniki. Brez njih ne bi bilo sodobnih računalnikov, komunikacijskih sistemov, energetskih pretvornikov ali elektronskih krmilnikov. Večino elektronske revolucije zadnjih šestdesetih let je omogočil silicij. Zaradi ugodne cene, obilice surovine in odličnih električnih lastnosti je postal temelj skoraj vse sodobne elektronike. Vendar se zahteve sodobne družbe spreminjajo, saj se poleg hitrega razvoja električnih vozil povečujejo tudi zahteve po učinkovitem upravljanju in pretvorbi električne energije. Električna vozila zahtevajo pretvorbo velikih količin energije, hitri polnilci delujejo pri visokih napetostih, energetska omrežja pa morajo postajati vedno bolj učinkovita. Zaradi vse večjega števila priključenih porabnikov in razpršenih virov energije postaja razvoj zanesljivih, prilagodljivih in energetsko učinkovitih elektroenergetskih omrežij ključnega pomena [1, 2].

Pri takšnih zahtevah začnejo prihajati do izraza omejitve naprav iz silicija, kot so: večje izgube zaradi nizke prebojne napetosti, večja občutljivost zaradi večjih tokov uhajanja, slabše odvajanje toplote zaradi prenizke toplotne prevodnosti ter navsezadnje nižja odpornost na sevanje. Raziskovalci zato intenzivno razvijajo materiale nove generacije. Med njimi izstopa silicijev karbid (SiC), ki ga številni strokovnjaki označujejo za enega ključnih materialov prihodnje energetike. SiC lahko deluje pri precej višjih temperaturah kot silicij, prenese večje električne napetosti in pri delovanju povzroča manj izgub energije. Zaradi tega ga danes najdemo v tranzistorjih električnih vozil, hitrih polnilnih postajah, sončnih elektrarnah in industrijskih pretvornikih [2, 3].

Tranzistor je elektronska komponenta, ki omogoča delovanje skoraj vse sodobne elektronike, na primer: mobilni telefoni, računalniki, avtomobili, gospodinjski aparati, avdio in video naprave, LED svetila, telekomunikacijska oprema in sateliti ter vesoljska tehnika. Kot zanimivost, navedemo, da je v procesorju računalnika več deset milijard tranzistorjev, pri čemer se vsak od njih vklopi in izklopi milijardokrat na sekundo. Tranzistor, prikazan na Sliki 1, ima običajno tri priključke, ki se imenujejo ponor (drain), vrata (gate) in izvor (source). Majhen tok skozi vrata omogoči vklop večjega toka med ponorjem in izvorjem, tako nastane prevodni kanal med njima. Tranzistor zato lahko deluje kot stikalo ali ojačevalec. Glavni vrsti tranzistorjev sta bipolarni tranzistor (BJT), ki ga krmili tok, in "metal-oxide-semiconductor field-effect transistor" (MOSFET), ki ga krmili napetost. Glede na strukturne izvedbe poznamo klasično, pri kateri kanal nastane vodoravno pod vrati, in »Trench«, kjer so vrata vkopana v polprevodnik, pri čemer kanal nastane ob navpičnih stenah tega jarka [4].



Slika 1: Levo je močnostni MOSFET tranzistor s tremi priključki (ponor, vrata in izvor), na sredini je shema prereza notranje zgradbe vodoravne izvedbe tranzistorja, na desni pa shema kompleksnejše Trench izvedbe. Ko skozi sredinski priključek steče tok (kratka rdeča puščica), se ustvari prevodni kanal in steče tok tudi skozi druga dva priključka (dolga rdeča puščica).

Izdelava sodobnih polprevodniških naprav s fotopostopki in dopiranjem poteka na izjemno majhnih dimenzijah. Debeline posameznih plasti merimo v nanometrih. Za primerjavo: človeški las je približno 80.000-krat debelejši. Na dimenzijah nanometrov že majhne spremembe pomembno vplivajo na delovanje naprave. Zato morajo biti proizvodni postopki natančno nadzorovani. V preteklosti je bil razvoj novih polprevodniških tehnologij močno odvisen od eksperimentalnega dela. Raziskovalci so izdelovali prototipe, jih testirali, spreminjali parametre in postopek večkrat ponavljali. Tak pristop pa je drag in zamuden.

Danes pomemben del razvoja poteka drugače. Preden nastane fizični prototip, raziskovalci ustvarimo njegov, tako imenovani digitalni dvojček. S pomočjo fizikalnih simulacij lahko napovemo, kako se bo material obnašal pri različnih temperaturah, koncentracijah ali

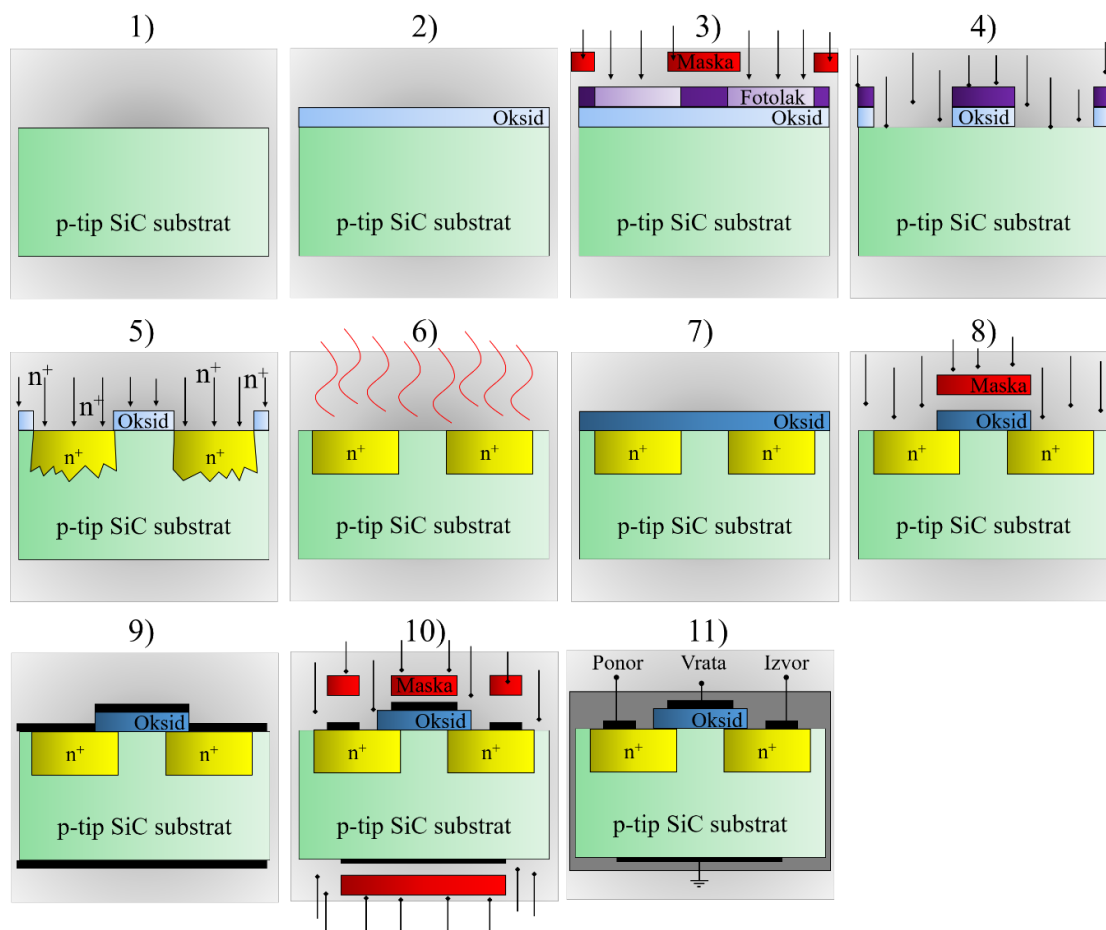
geometrijah. Takšen pristop omogoča hitrejši razvoj, nižje stroške in boljše razumevanje procesov, ki jih eksperimentalno pogosto ni mogoče neposredno opazovati. V naslednjem poglavju opišemo primer simulacije izgradnje MOSFET.

2 FIZIKALNE SIMULACIJE

Fizikalna simulacija ni zgolj risanje virtualnih modelov. Gre za uporabo fizikalnih zakonov, matematičnih enačb in numeričnih metod, s katerimi računalnik simulira obnašanje materialov. Na področju polprevodnikov se za takšne simulacije uporablja izraz TCAD (Technology Computer-Aided Design). Raziskovalci v računalnik vnesejo fizikalne lastnosti materiala, temperaturo, kemične reakcije in geometrijo naprave. Programsko orodje nato izračuna, kako se bo material spreminjal med proizvodnim procesom in kakšne električne lastnosti bo imela končna naprava.

Kot primer predstavimo fizikalno simulacijo proizvodnje n-kanalnega MOSFET tranzistorja, ki poteka po korakih, grafično prikazanih na Sliki 2 ter opisanih v naslednjih točkah [1, 3]:

- 1) *Priprava substrata*: p-tip SiC je temeljna podlaga oz. osnovni polprevodniški material.
- 2) *Rast oksidne plasti*: Na površini substrata se termično vzgoji plast silicijevega dioksida (SiO_2), ki služi kot zaščitna in izolacijska plast.
- 3) *Fotolitografija*: Na oksid se nanese fotolak (photoresist), ki se osvetli z UV-svetlobo skozi masko. Osvetljeni deli se po razvijanju odstranijo in določijo območja nadaljnje obdelave.
- 4) *Jedkanje oksida*: Izpostavljeni deli oksidne plasti se odstranijo, s čimer nastaneta odprtini za izvor in ponor.
- 5) *Ionska implantacija donorjev*: V odprta območja se implantirajo donorji (n^+), ki ustvarijo močno dopirani n-tip področji za izvor in ponor.
- 6) *Aktivacija dopantov*: Sledi visokotemperaturno žarjenje, pri katerem se implantirani atomi aktivirajo in popravijo poškodbe kristalne mreže.
- 7) *Ponovna rast oksida*: Na površini se ponovno oblikuje oksidna plast, ki bo kasneje služila kot oksid za vrata.
- 8) *Druga fotolitografija*: Z novo masko se definira območje za vrata.
- 9) *Oblikovanje oksida za vrata*: Oksid ostane le na območju vrat, medtem ko so kontaktna območja za izvor in ponor pripravljena za metalizacijo.
- 10) *Metalizacija in oblikovanje kontaktov*: Na zgornjo in spodnjo stran rezine se nanese kovina. S pomočjo maske se oblikujejo kovinski kontakti za izvor, ponor in vrata.
- 11) *Končna struktura tranzistorja*: Nastane popolnoma izdelan MOSFET z električnimi priključki: ponor (drain, D), vrata (gate, G) in izvor (source, S). Ključni koraki tako izdelanega tranzistorja so oblikovanje n^+ območij izvora in ponorja, izdelava oksida za vrata in nanos kovinskih kontaktov, ki omogočajo krmiljenje toka skozi tranzistor.



Slika 2: Iz p-tipa SiC substrata se s kombinacijo oksidacije, fotolitografije, ionske implantacije, žarjenja in metalizacije izdelava n-kanalni MOSFET. Podroben opis korakov od 1) do 11) je podan v besedilu.

Pri izdelavi takšnih tranzistorjev niso vsi koraki enako pomembni. Nekateri koraki zahtevajo zelo natančne simulacije in izračune, saj neposredno vplivajo na električne lastnosti tranzistorja. Eden najpomembnejših korakov je predvsem natančna odmera debeline oksida za vrata, saj ta vpliva na kapacitivnost vrat (Gate Capacitance), pragovno napetost (Threshold Voltage), krmiljenje kanala, hitrost vklopa, prevodni tok (Drain Current), električno polje v oksidu (Electric Field) in zanesljivost naprave ter njeno življenjsko dobo. Pri tem lahko že majhna sprememba debeline oksida (v nanometrih!) povzroči občutno spremembo.

3 RAST OKSIDNE PLASTI

Kot smo omenili v prejšnjem poglavju, je eden ključnih korakov pri izdelavi polprevodniških naprav termična oksidacija. Pri tem procesu na površini materiala nastane tanka plast oksida, ki deluje kot električni izolator in omogoči izdelavo vrat za vklop in izklop naprave. Brez tega številne sodobne elektronske komponente sploh ne bi mogle delovati.

Za opis rasti oksida se najpogosteje uporablja model Deal-Grove [5], ki predpostavlja tri zaporedne procese:

- transport oksidanta (navadno O_2 ali H_2O) iz plinske faze do površine oksida,
- difuzijo oksidanta skozi že nastalo oksidno plast in
- kemijsko reakcijo na meji med SiC in SiO_2 .

Slika 3 grafično prikazuje proces rasti oksida. Glavna kemijska reakcija tega procesa je:



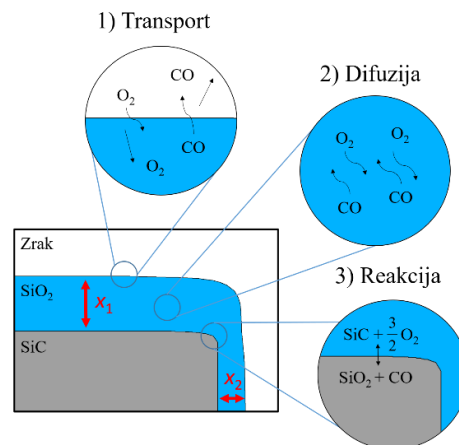
Hitrost naraščanja debeline (x) tako nastalega oksida lahko opišemo z diferencialno enačbo:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{B}{A + 2x}, \quad (2)$$

pri čemer sta A in B reakcijska koeficienta. Enačbi (1) lahko dodamo še člen za pospešeno začetno rast oksida, ki ga navadno imenujemo Massoudov člen [6]:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{B}{A + 2x} + C e^{-\frac{x}{L}}, \quad (3)$$

pri čemer je C začetna hitrost oksidacije in L karakteristična dolžina, na kateri začetna hitrost oksidacije pade na $1/e$ začetne vrednosti.



Slika 3: Prikazan je mehanizem termične oksidacije SiC in nastanek plasti SiO_2 v treh ključnih korakih: Transport, difuzija in reakcija oksidanta O_2 in stranskega produkta CO. Rdeči puščici prikazujeta debelino oksida na vrhu in ob strani strukture, ki se razlikujeta.

Glede na leta, v katerih so ti modeli bili razviti in objavljeni, sklepamo, da je oksidacija silicija že desetletja dobro raziskana. Pri SiC pa se pojavijo dodatni izzivi. Raziskovalci so ugotovili, da hitrost oksidacije ni enaka v vseh smereh kristala [2, 3]. Dve različni kristalni ploskvi istega materiala oksidirata z različnima hitrostma. To pomeni, da površina med proizvodnjo ne raste enakomerno. Zato nastajajo kompleksne tridimenzionalne strukture, ki jih je težko napovedati. Če fizikalni model teh razlik ne upošteva, lahko pride do velikih napak pri načrtovanju naprav.

4 KRISTAL POSTANE VEČDIMENZIONALNI PROBLEM

Klasična modela Deal-Grove in Massoud sta namenjena reševanju enodimenzionalnih problemov, torej ne moreta pravilno opisati oksidacije kompleksnih dva (2D) in tri (3D)-dimenzionalnih struktur, kjer je hitrost oksidacije močno odvisna od kristalografske orientacije površine. Glavna rešitev tega problema je razvoj interpolacijske metode [6], ki je ključna razširitev klasičnih modelov ter omogoči simulacijo oksidacije SiC.

Za SiC so ugotovili, da je ta material zelo anizotropen. Različne kristalne ploskve se zelo različno odzivajo na prisotnost kisika, zato lahko izmerimo štiri ključne mejne hitrosti oksidacije v naslednjih kristalnih smereh: (0001), (000-1), (11-20), (1-100). Osnovna ideja interpolacijske metode je, da iz teh štirih znanih hitrosti izračuna rast oksidacije v poljubno smer v prostoru. Pri tem metoda upošteva geometrijske lastnosti ter simetrije heksagonalne kristalne strukture SiC. V ravnini xy ustvari šestkratno simetrijo, ki je značilna za smer (11-20) in (1-100). V smeri osi z pa ločeno obravnava smer (0001) in (000-1), ker se ti dve hitrosti rasti oksida bistveno razlikujeta. Razširitev modela torej zapišemo kot [1, 7]:

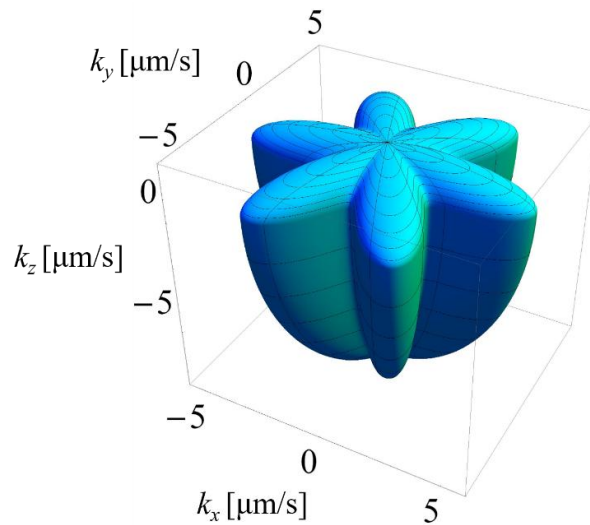
$$\begin{aligned}x &= [k_y + (k_x - k_y) \cos^2(3t)] \cos(t) \cos(u), \\y &= [k_y + (k_x - k_y) \cos^2(3t)] \sin(t) \cos(u), \\z &= k_z \sin(u),\end{aligned}\tag{3}$$

pri čemer so x , y in z koordinate prostora, $t \in [0, 2\pi]$ in $u \in [-\pi/2, \pi/2]$ sta parametrični spremenljivki, k_x , k_y in k_z pa so hitrosti oksidacij v dani smeri.

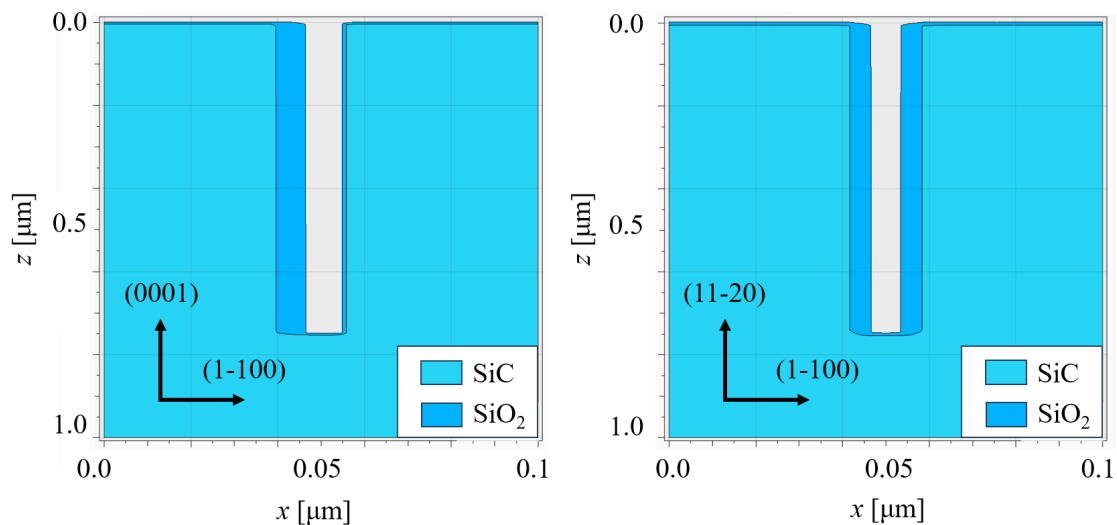
Koeficienti klasičnih oksidacijskih modelov A , B , C , in L s to razširitvijo postanejo odvisni tudi od kristalne smeri. Slika 4 prikazuje primer vrednosti reakcijskega koeficienta v vseh smereh v prostoru. Z uporabo teh rezultatov lahko simuliramo rast oksida na ukrivljenih in večdimenzionalnih strukturah MOSFET-a, pri čemer je ključnega pomena načrtovanje vratnega oksida jarkov kompleksnih geometrij tranzistorjev. Tak primer je recimo Trench MOSFET, katerega kanal se oblikuje ob stenah jarka. To, v primerjavi s klasičnim vodoravnim tranzistorjem, poveča širino prevodnega kanala in s tem omogoči večjo gostoto celic. V primeru izdelave procesorja za osebni računalnik (PC) to pomeni več logičnih enot (tranzistorjev), kar vpliva na zmogljivost procesorja: večje število jeder, velikost predpomnilnika (cache), naprednejše računske enote in manjšo porabo električne energije.

Primer oksidacije jarka za takšen napreden tranzistor prikazuje Slika 5, kjer sta prikazana dva primera oksidacije z dvema različnima orientacijama substrata SiC. Leva slika prikazuje substrat orientacije (0001) v z - in (1-100) v x -smeri ter rotacije 0° , desna slika pa (11-20) v z -

in (1–100) v x -smeri ter rotacije 45° . Vidimo lahko izjemno pomembne razlike med tema primeroma, saj je oksid levega primera nesimetričen, kar bo negativno vplivalo na električne lastnosti tranzistorja. Takšna vrata bodo nepredvidljiva, tranzistor se bo lahko nenadzorovano vklapljal/izklapljal ter navsezadnje celo odpovedal. To pomeni, da reza substrata ne moremo poljubno izbrati, ampak mora le-ta biti zelo natančno pripravljen. Predstavljena razširitev modela nam tako pomaga izbrati pravilne parametre materialnih lastnosti za izdelavo elektronskih naprav, kot so kristalna orientacija, rotacija in kot reza (Miscut Angle) SiC substrata.



Slika 4: Rezultat interpolacijske metode, ki v kombinaciji z modelom Deal-Grove in modelom Massoud omogoča natančne 2D in 3D TCAD simulacije rasti oksida na SiC strukturah; k_x , k_y in k_z so reakcijski koeficienti oksidacije v x -, y - in z -smeri.



Slika 5: Rezultati simulacij rasti oksida okoli jarka v SiC za dve različni orientaciji: (0001) levo in (11–20) desno. Slika je narejena s programskim orodjem SILVACO Victory Process.

5 ZAKLJUČEK

V članku smo obravnavali interpolacijsko metodo, ki je ključna nadgradnja standardnih modelov oksidacije materialov pri proizvodnji elektronskih naprav. Ta interpolacijska metoda omogoča bistveno natančnejše tridimenzionalne simulacije, kar je pomembno predvsem pri načrtovanju sodobnih močnostnih tranzistorjev. Raziskava hkrati kaže, kako tesno so danes povezani fizika, matematika in računalništvo. Napredek sodobne tehnologije ni odvisen zgolj od novih materialov, temveč tudi od naše sposobnosti, da njihovo obnašanje razumemo in napovemo.

Morda se zdi raziskovanje oksidacije materialov, predvsem polprevodnikov, zelo oddaljeno od vsakdanjega življenja. V resnici pa ima neposreden vpliv na tehnologije, ki jih uporabljamo vsak dan. Z upoštevanjem anizotropije pri oksidaciji smo pokazali, kako lahko različne orientacije kristala vplivajo na rast oksidne plasti in posledično na končno geometrijo MOSFET tranzistorja ter s tem na njegove elektronske lastnosti. Da spomnimo, MOSFET je ena najpomembnejših elektronskih komponent, brez katere ne bi bilo sodobnih računalnikov, pametnih telefonov, električnih vozil in številnih drugih naprav.

V zadnjih letih se vse pogosteje uporablja izraz digitalni dvojček. To je virtualni model fizičnega sistema, ki omogoča simulacijo njegovega obnašanja. Polprevodniška industrija je bila med prvimi, ki je ta koncept dejansko uresničila. Še preden je tranzistor izdelan v laboratoriju, pogosto obstaja njegov digitalni model. Raziskave, primer katere smo opisali v tem članku, prispevajo k temu, da postajajo digitalni modeli vse natančnejši. V prihodnosti bodo fizikalne simulacije verjetno še tesneje povezane z umetno inteligenco in strojnim učenjem. Tako bomo lahko nove materiale in naprave razvijali hitreje kot kadar koli prej. V tem pogledu fizikalne simulacije postajajo eno najpomembnejših orodij znanosti 21. stoletja.

Literatura

- [1] Šimonka, V. (2022). Thermal Oxidation and Dopant Activation of Silicon Carbide. Doktorska disertacija. Technische Universität Wien.
- [2] Agarwal, A. in Haney, S. (2008). An Overview of Silicon Carbide Power Devices. *Materials Science Forum*, 600–603, 895–900.
- [3] Kimoto, T. in Cooper, J. A. (2014). *Fundamentals of Silicon Carbide Technology*. Singapore: Wiley.
- [4] C. Shekhar (2026). "Semiconductor Materials: Current Applications and Limitations of Advanced Semiconductor Devices." *Machine Learning for Semiconductor Materials* 1–16.
- [5] B. E. Deal in A. S. Grove (1965). General Relationship for the Thermal Oxidation of Silicon. *Journal of Applied Physics*, 36(12):3770–3778.
- [6] H. Z. Massoud & J. D. Plummer (1987). Analytical Relationship for the Oxidation of Silicon in Dry Oxygen in the Thin-Film Regime. *Journal of Applied Physics*, 62(8):3416–3423.
- [7] V. Šimonka, G. Nawratil, A. Hössinger, J. Weinbub in S. Selberherr (2017). "Anisotropic Interpolation Method of Silicon Carbide Oxidation Growth Rates for Three-Dimensional Simulation". *Solid-State Electronics* 128, pp. 135–14.

Sinteza paracetamola in antifebrina

Synthesis of paracetamol and antifebrin

Jelena Spasić, Brina Cenc Dojer

Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Koroška cesta 160, 2000 Maribor

Povzetek

Sintetizirali in z infrardečo spektroskopijo karakterizirali smo dva analgetika in antipiretika, *N*-acetil-*para*-aminofenol in *N*-fenilacetamid, poznana pod komercialnima imenoma paracetamol in antifebrin. Prvi je širši javnosti bolj znan kot drugi, saj se antifebrin v zdravstvu od 60. let prejšnjega stoletja zaradi nevarnih stranskih učinkov več ne uporablja. Zanimalo nas je, kateri so nezaželeni stranski učinki antifebrina, zaradi katerih ga kot analgetika ne uporabljamo več in ali lahko s kemikalijami in pripomočki, ki jih imamo na voljo v našem laboratoriju, sintetiziramo omenjeni snovi.

Ključne besede: paracetamol, antifebrin, kemijska sinteza, infrardeča spektroskopija, stranski učinki

Abstract

We synthesized and characterized two analgesic and antipyretic compounds using infrared spectroscopy: *N*-acetyl-*para*-aminophenol and *N*-phenylacetamide, better known by their commercial names, paracetamol and antifebrin. The first one is much more widely known to the general public than the second one, as antifebrin has not been used in medicine since the 1960s due to its dangerous side effects. We were interested in identifying the adverse side effects of antifebrin that led to its discontinuation as an analgesic and, whether the mentioned compounds could be synthesized using the chemicals and equipment available in our laboratory.

Key words: paracetamol, antifebrin, chemical synthesis, infrared spectroscopy, side effects

1 UVOD

Antipiretiki in analgetiki so bili v drugi polovici 19. stoletja pridobljeni predvsem kot stranski produkti destilacije premogovega katrana. Študij na živalih v tistem času skoraj niso opravljali, zato je bilo dosti zdravil kasneje umaknjenih zaradi toksičnosti. Prvi antipiretiki so bili antipirin, antifebrin in fenacetin, nekoliko kasneje pa paracetamol in aspirin. [1]

N-acetil-*para*-aminofenol (tudi acetaminofen) oziroma komercialno paracetamol (tudi panadol) spada med najpogostejše uporabljene analgetike in antipiretike sodobne medicine. Po nekaterih podatkih naj bi ga leta 1877 prvi sintetiziral ameriški kemik Harmon Northrop Morse iz *p*-nitrofenola in ledocetne kisline s kositrom kot reducirajočim elementom [2], po nekaterih podatkih pa naj bi ga sintetizirali že leta 1852 [3]. Njegove učinke na telo je približno deset let kasneje odkril nemški fiziolog Joseph von Mering. Kljub pozitivnim učinkom, se je začel paracetamol uporabljati šele v 50. letih prejšnjega stoletja, njegova uporaba pa se je razmahnila v 70. letih, ko so ugotovili, da je zmerno uživanje zdravila varno. V 80. letih so ga začeli predpisovati tudi pediatri, ko se je izkazalo, da aspirin, ki so ga takrat uporabljali kot antipiretik, pri otrocih povzroča Reyeov sindrom (ob uporabi salicilatov lahko pri otrocih ob zdravljenju viroz pride do encefalitisa, možganskega edema in smrti) [4]. Paracetamol lahko v omejenih količinah jemljejo tudi nosečnice in doječe matere [5].

N-fenilacetamid (tudi acetanilid in acetanil), komercialno antifebrin, je prvi sintetiziral francoski kemik Charles Frideric Gerhardt, njegove antipiretične in analgetične učinke pa so odkrili po naključju. Leta 1886 naj bi v lekarno Kalle&Co. v Nemčiji po naftalen prišel pacient z notranjimi zajedalci, vendar so mu pomotoma dali antifebrin, koprodukt industrijskega barvila, ki ni bil mišljen kot zdravilo. Ko se je pacient po nekaj dneh vrnil brez bolečin in

povišane temperature, ampak še z vedno prisotnimi zajedalci, so ugotovili napako. Slednjo sta začela proučevati zdravnika Paul Hepp in Arnold Chan in prišla do ugotovitve o uporabnosti acetanilida v farmacevtske namene [6,7].

V članku iz leta 1889 [8] avtor navaja, da antifebrin zmanjša bolečino, bolezní pa ne pozdravi. Zdravilo primerja z antipirinom, ki se je konec 19. in v začetku 20. stoletja prav tako uporabljal za zniževanje telesne temperature in blaženje bolečin. Navaja, da antifebrin hitreje znižuje temperaturo, da je za doseg želenega učinka potrebna veliko manjša količina zdravila, da manj draži prebavila in je cenejši ter lažje dostopen kot antipirin.

Žal pa je imelo zdravilo negativne stranske učinke, katere so zaradi učinkovitosti zdravila kot antipiretika in analgetika skušali upravičevati do 40. let prejšnjega stoletja. Že v letu 1909 je F. L. Kebler objavil škodljive stranske učinke antipirina, antifebrina in fenacetina [9]. Številni pacienti so po dolgotrajnem jemanju antifebrina kolapsirali, postali so modri zaradi motenega delovanja hemoglobina in s tem motenega prenosa kisika v krvi, imeli so moteno delovanje srca, pri nekaterih je nastopila celo smrt.

V začetku 20. stoletja so odkrili, da je produkt metabolizma antifebrina paracetamol, kateremu so lahko pripisali antipiretične in analgetične učinke.

V sodobnih aplikacijah antifebrin služi predvsem kot kemični vmesni produkt in ne kot terapevtsko sredstvo. Uporablja pa se pri sintezi farmacevtskih izdelkov in barvil. Deluje kot stabilizator vodikovega peroksida v kozmetiki in industrijskih postopkih beljenja, kot dodatek v lakih na osnovi celuloznih estrov in premazih iz vlaknastih smol [10–12].

V literaturi sva našli nekaj postopkov sinteze antifebrina in paracetamola. Odločili sva se, da bova s pripomočki in kemikalijami, ki jih imamo na fakulteti, skušali oba sintetizirati.

2 EKSPERIMENTALNO DELO

Eksperimentalno delo je zaradi uporabe nevarnih kemikalij potekalo v digestoriju. Nevarnosti uporabljenih kemikalij so predvsem jedkost, akutna strupenost, teratogenost, strupenost in vnetljivost. Zaradi različnih lastnosti kemikalij sva v nadaljevanju pri vsaki navedli piktograme iz varnostnih listov [13].

2.1 Sinteza paracetamola

2.1.1 Postopek I

Kemikalije, ki sva jih uporabili za sintezo paracetamola:

Ime in čistost kemikalije	Proizvajalec	Piktogrami
4-aminofenol, 98 %	Sigma Aldrich	

Acetanhidrid, 99 %	Fluka	
Žveplova(VI) kislina, 95.0-97.0 %	Honeywell Fluka	
Etanol, absolutni	Sigma Aldrich	

Tabela 1: Kemikalije, uporabljene za sintezo paracetamola po postopku I.

V 100 mL erlenmajerico sva prenesli 6.0 g 4-aminofenola in dodali 6.5 mL acetanhidrida. K tej mešanici sva dodali še 4 kapljice koncentrirane žveplove kisline. Raztopino sva premešali in postavili na vodno kopel. Segrevali sva jo približno 25 minut pri 60 °C (slika 1). Nato sva vsebino bučke ohladili na sobno temperaturo in jo prenesli v čašo, v katero smo predhodno nalili 50 mL ledeno hladne vode.



Slika 1: Sinteza paracetamola po postopku I.

Za izpiranje vsebine bučke v čašo sva uporabili deionizirano vodo. Ko se je raztopina ohladila, sva vsebino nučirali in jo posušili na zraku [14].

Produkt sva nato prekrystalizirali z minimalno količino 70 % etanola. Po popolnem raztapljanju sva raztopino ohladili v ledeni kopeli. Končni produkt sva ponovno filtrirali, posušili na zraku in ga prenesli na predhodno stehtano urno steklo ter zabeležili njegovo maso.

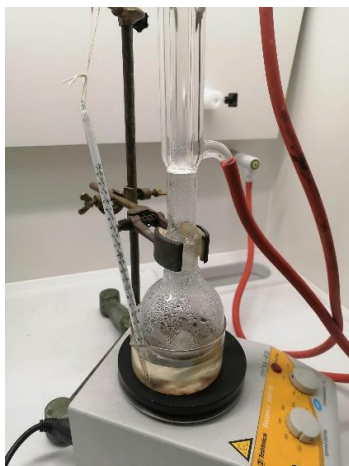
2.1.2 Postopek II

Kemikalije, ki sva jih uporabili za sintezo paracetamola:

Ime in čistost kemikalije	Proizvajalec	Piktogrami
4-aminofenol, 98 %	Sigma Aldrich	
Acetanhidrid, 99 %	Fluka	
Žveplova(VI) kislina, 95.0-97.0 %	Honeywell Fluka	
Etanol, absolutni	Sigma Aldrich	
Aktivno oglje	Scharlau	
Metanol, 99.9 %	Carlo Erba	

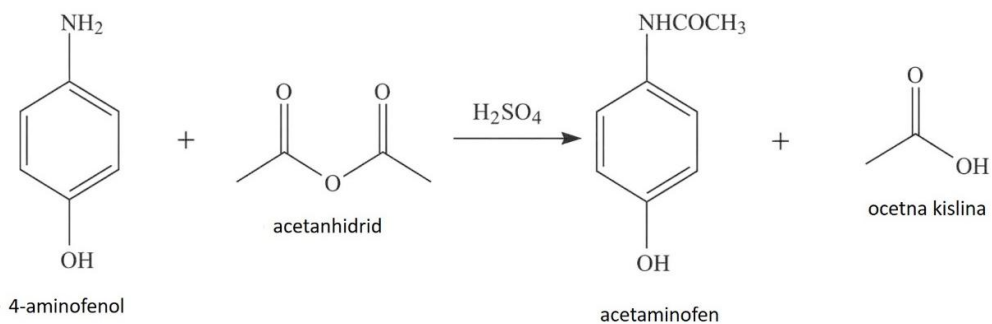
Tabela 2: Kemikalije, uporabljene za sintezo paracetamola po postopku II.

V bučko sva nalili 30 mL vode in dodali 10.9 g 4-aminofenola. Mešanico sva začeli mešati in med mešanjem dodali 10 mL acetanhidrida. Segreli sva jo do približno 120 °C. Ko se je snov popolnoma raztopila, sva mešali še eno uro (slika 2). Nato sva mešanico ohladili v hladni vodi.



Slika 2: Sinteza paracetamola po postopku II.

Nastali produkt sva prenesli v čašo, v kateri smo že imeli pripravljeno mešanico vode in metanola v razmerju 50 : 50 (80 ml), ki sva jo predhodno rahlo segreli. Dodali sva aktivno oglje in raztopino ohladili. Produkt sva nato sprali z vodo in filtrirali [15].



Slika 3: Kemijska reakcija sinteze paracetamola (acetaminofena).

2.2 Sinteza antifebrina

Kemikalije, ki sva jih uporabili za sintezo paracetamola:

Ime in čistost kemikalije	Proizvajalec	Piktogrami
Očetna kislina, 99.8 %	Sigma Aldrich	

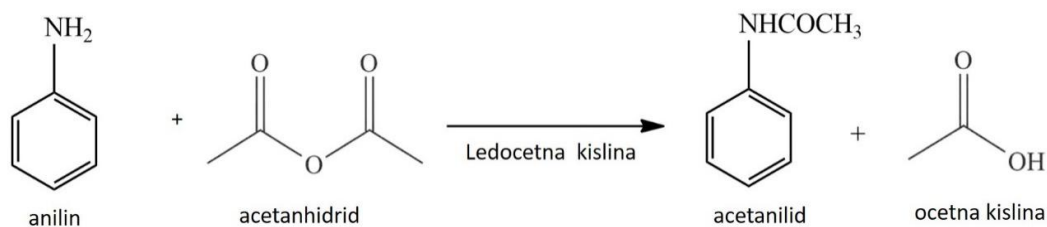
Acetanhidrid, 99 %	Fluka	
Anilin, 99 %	Sigma Aldrich	

Tabela 3: Kemikalije, uporabljene za sintezo antifebrina.

V 250 mL bučko sva nalili 10 mL acetanhidrida in dodali 5 mL anilina. Nato sva s pipeto dodali očetno kislino (2.5 mL). Zmes sva segrevali pod refluxom približno 20 minut. Nato sva bučko prenesli na hladno kopel [16] (slika 4).



Slika 4: Ohlajanje produkta sinteze antifebrina/acetanilida v hladni vodi.



Slika 5: Kemijska reakcija sinteze antifebrina/acetanilida.

Acetanilid je hitro kristaliziral. Produkt sva filtrirali s pomočjo filtrirnega papirja in pustili, da se posuši. Končni produkt sva prenesli na predhodno stehtano urno steklo ter zabeležili njegovo maso.

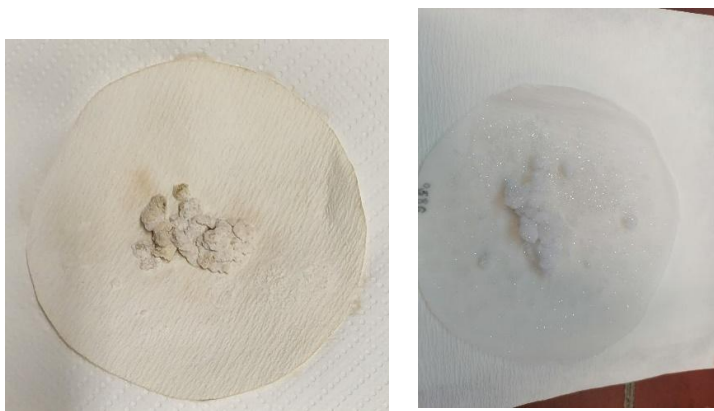
3 REZULTATI IN DISKUSIJA

Produkte reakcij sva stehtali in izračunali izkoristek:

$$\frac{m(4\text{-aminofenol})}{M(4\text{-aminofenol})} = \frac{m(\text{acetaminofen})}{M(\text{acetaminofen})} \quad (1)$$

$$\epsilon = \frac{m(\text{acetaminofen}) - \text{dobljena}}{m(\text{acetaminofen}) - \text{teoretična}} \cdot 100 \quad (2)$$

Izkoristek sinteze paracetamola po prvem postopku je bil 42.8 %, po drugem pa 23.1 %.



Slika 6: Produkta sinteze paracetamola po postopku I (levo) in postopku II (desno).

Na podoben način sva izračunali izkoristek sinteze antifebrina, ki je bil 92.5 %.

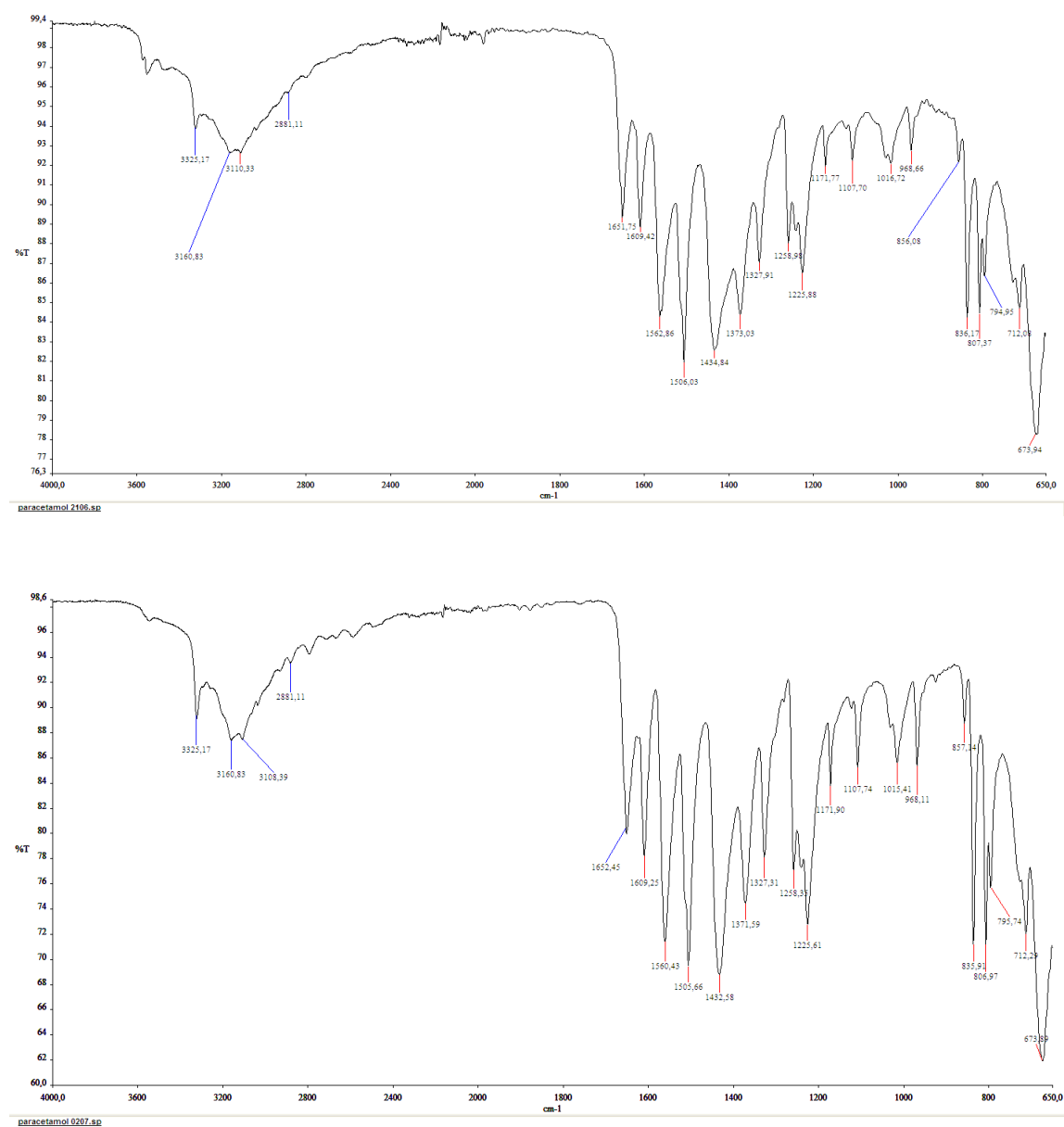


Slika 7: Produkt sinteze antifebrina.

Dobljene produkte (sliki 6 in 7) sva po sušenju analizirali s pomočjo infrardeče spektroskopije in rezultate primerjali s podatki v literaturi [17–19].

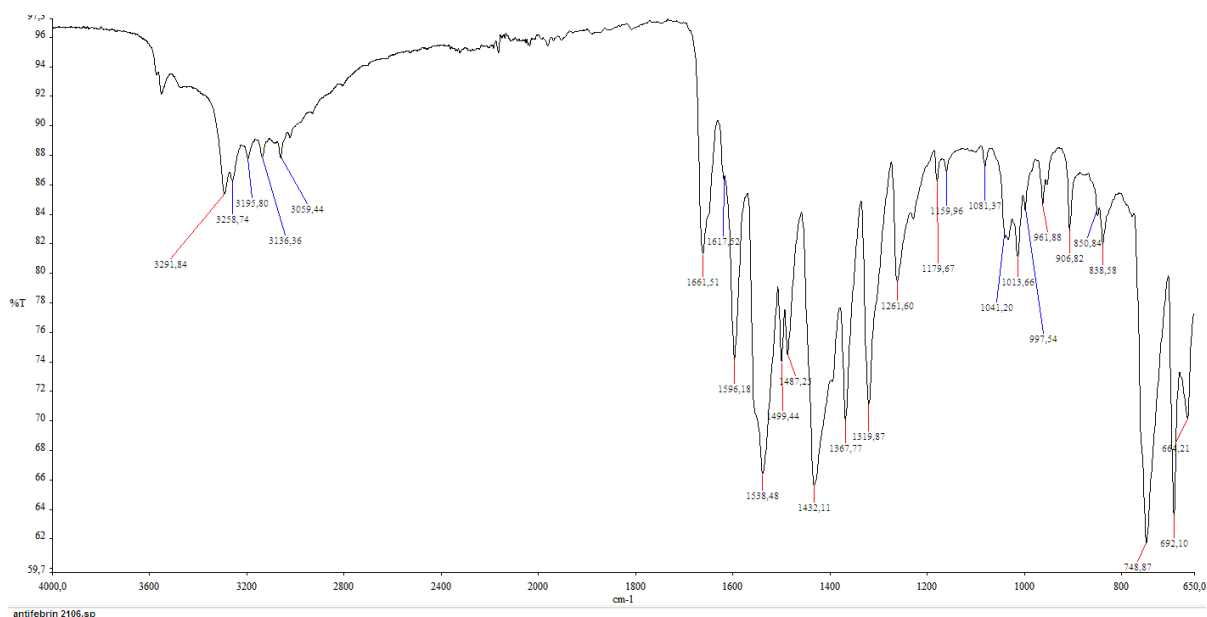
Na IR spektrih acetaminofena/paracetamola (Slika 8) so opazna naslednja nihanja: v območju valovnih števil okoli $3500\text{--}3200\text{ cm}^{-1}$ zaznamo nihanja – OH skupine in N – H vezi, v območju okoli 3100 cm^{-1} (3110 , 3160 cm^{-1}) pa nihanja – CH skupin. Nihanje vezi okoli 1650 cm^{-1} je pogojeno s prisotnostjo C=O funkcionalne skupine. Nihanja med 1600 cm^{-1} in 1500 cm^{-1} so posledica nihanj N – H in C – N vezi. Raztezne vibracije C – O vezi se pojavljajo pri približno $1300\text{--}1250\text{ cm}^{-1}$ (1259 cm^{-1}). Za *para*-substituirane fenole je značilno nihanje tudi pri približno 1200 cm^{-1} (1226 cm^{-1}). Šibka raztezna nihanja C – N vezi se pojavijo tudi med 1100 in 1000 cm^{-1} (1108 , 1016 cm^{-1}). Deformacijska nihanja 1 : 4-substituiranih aromatskih obročev se pojavljajo v območju med 860 in 800 cm^{-1} (836 , 807 cm^{-1}).

S spodnjih slik je vidno, da sta si spektra obeh produktov zelo podobna.



Slika 8: FTIR spekter paracetamola, pridobljenega po postopku I (zgoraj) in postopku II (spodaj).

Na IR spektru acetanilida/antifebrina (Slika 9) so opazna naslednja nihanja: v območju valovnih števil okoli $3300\text{--}3200\text{ cm}^{-1}$ zaznamo nihanja –NH skupine, v območju okoli 3100 cm^{-1} (3136 , 3060 cm^{-1}) pa nihanja –CH skupin. Nihanje vezi okoli 1650 cm^{-1} kaže na prisotnost C=O funkcionalne skupine (1661 cm^{-1}). Nihanja med 1600 cm^{-1} in 1500 cm^{-1} so posledica nihanj N – H in C – N vezi (1596 , 1538 , 1499 cm^{-1}). Upogibna nihanja C – H vezi se pojavljajo pri približno 1360 cm^{-1} (1368 cm^{-1}). Šibka raztezna nihanja C – N vezi se pojavijo tudi med 1100 in 1000 cm^{-1} (1108 , 1016 cm^{-1}). Deformacijska nihanja monosubstituiranih aromatskih obročev se pojavljajo v območju med 800 in 600 cm^{-1} (748 , 692 cm^{-1}).



Slika 9: FTIR spekter sintetiziranega antifebrina.

4 ZAKLJUČEK

Iz podatkov v literaturi sva pridobili znanje o analgetikih in antipiretikih, paracetamolu in antifebrinu. Spoznali sva zgodovinska dejstva o obeh in se seznanili z nevarnimi stranskimi učinki antifebrina. S pripomočki in kemikalijami, ki jih imamo na voljo v našem laboratoriju, sva uspešno sintetizirali omenjeni spojini. Paracetamol sva sintetizirali po dveh postopkih, v literaturi pa jih je mogoče najti še mnogo. Priprava zmesi in sinteze so zaradi nevarnih lastnosti posameznih izhodnih kemikalij potekale v digestoriju. Obe spojini sva karakterizirali z infrardečo spektroskopijo. Razlike med posameznimi spektri so bile predvsem zaradi odsotnosti –OH skupine in C – O vezi pri antifebrinu.

Literatura

- [1] <https://saude.ufpr.br/wp-content/uploads/2020/07/The%20Cambridge%20Illustrated%20History%20of%20Medicine.pdf> - Pridobljeno 6. 6. 2026.
- [2] <https://www.reagent.co.uk/blog/paracetamol-history-of-a-pain-reliever/> - Pridobljeno 6. 6. 2026.
- [3] Arbedon, S.T. (2021). History and Interaction of Paracetamol, *Journal of Biomedical Pharmaceutical Sciences*, 4, 313.
- [4] <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/11319582/> - Pridobljeno 6. 6. 2026.
- [5] Jozwiak-Bebenista, M., Nowak, J.Z. (2014). Paracetamol: mechanism of action, applications and safety concern, *Acta Poloniae Pharmaceutica*, 71, 11–23.
- [6] Ball, C., Westhorpe, R.N. (2011). The history of simple analgesics, *Anaesthesia and Intensive Care*, 39, 331.
- [7] Brune, K. (1997). The early history of non-opioid analgesics. , 1(1), 0–40.
- [8] <https://pdfs.semanticscholar.org/8dab/32f3709b64e0d4079ecb9a1accfa148c9312.pdf> - Pridobljeno 8. 6. 2026.
- [9] Kebler, L.F. - The Harmful Effects of Acetanilide, Antipyrine, and Phenacetin. Washington: USA, 1909.
- [10] <https://longchangextracts.com/acetanilide-cas-103-84-4-complete-guide-to-this-historical-pharmaceutical-intermediate-2/> - Pridobljeno 3. 8. 2026
- [11] <https://www.chemicalbook.com/article/how-is-acetanilide-produced-what-are-its-uses.htm> - Pridobljeno 3. 8. 2026
- [12] https://www.scribd.com/document/54678754/Acetanilide#google_vignette - Pridobljeno 3. 8. 2026
- [13] Varnostni listi uporabljenih kemikalij:
<https://www.carlroth.com/medias/SDB-0950-SI-SL.pdf?context=bWFzdGVyfHNIY3VyaXR5RGF0YXNoZWV0c3wzNTk4ODh8YXBwbGljYXRpb24vcGRmfGFhSTBMmhrTVM4NU1qUXhNVEkwT0RZME1ETXhMMU5FUWw4d09UVXdYMU5KWDFOUxUxQmZjZmM4MGRkZmZmZjU2MTU5Mzh1YzFhNjUxMDU2YzFIM2QwMmViZjRmYTkyYjE4ODNlNGVhMDhiYmY0MjJjMDQw>
<https://www.carlroth.com/medias/SDB-4483-SI-SL.pdf?context=bWFzdGVyfHNIY3VyaXR5RGF0YXNoZWV0c3wzNjM1NDh8YXBwbGljYXRpb24vcGRmfGFhSTBMmhrTVM4NU1qUXhNVEkwT0RZME1ETXhMMU5FUWw4d09UVXdYMU5KWDFOUxUxQmZjZmM4MGRkZmZmZjU2MTU5Mzh1YzFhNjUxMDU2YzFIM2QwMmViZjRmYTkyYjE4ODNlNGVhMDhiYmY0MjJjMDQw>

Optimizacija prehrane krav molznic z linearnim programiranjem

Optimization of Dairy Cow Feed using Linear Programming

Matilde Oliveira

University of Maribor

Faculty of Natural Sciences and Mathematics

Povzetek

Ta študija predstavi model linearnega programiranja za optimizacijo sestave krmnega obroka za mlečne krave z namenom minimizacije stroškov ob hkratnem izpolnjevanju prehranskih zahtev. Model določi optimalno kombinacijo krmnih komponent na podlagi njihove stroškovne in hranilne učinkovitosti. Dualna formulacija omogoča ekonomsko interpretacijo problema prek senčnih cen, povezanih z energetskimi in beljakovinskimi zahtevami. Poleg tega je izvedena analiza občutljivosti za oceno vpliva sprememb cen krme in prehranskih omejitev na optimalno rešitev, obravnavan pa je tudi razširjeni scenarij, ki vključuje seno in silažo. Optimalna strategija krmljenja doseže minimalni strošek 423,16 centa na dan ob izpolnjevanju vseh prehranskih zahtev. Analiza pokaže tudi obstoj več optimalnih rešitev, kar pomeni, da lahko različne sestave krme dosežejo enak minimalni strošek. Rezultati poudarjajo učinkovitost optimizacijskih metod pri sprejemanju odločitev v kmetijstvu ter vrednost kombiniranja primarne, dualne in analize občutljivosti pri problemih formulacije krme.

Ključne besede: linearno programiranje, optimizacija, dualnost, matematično modeliranje, prehrana.

Abstract

This study presents a linear programming model to optimize the composition of dairy cow feed while minimizing cost and satisfying nutritional requirements. The model determines the optimal combination of feed components based on their cost-to-nutrient efficiency. The dual formulation provides an economic interpretation of the problem by associating shadow prices with energy and protein requirements. In addition, sensitivity analysis is performed to evaluate how changes in feed prices and nutritional constraints affect the optimal solution, and an extended scenario including hay and silage is investigated.

The optimal feeding strategy achieves a minimum cost of 423.16 cents per day while satisfying all nutritional requirements. The analysis also reveals multiple optimal solutions, indicating that different feed compositions can achieve the same minimum cost. These results highlight the effectiveness of optimization techniques in agricultural decision-making and demonstrate the value of combining primal, dual, and sensitivity analyses in feed formulation problems.

Keywords: linear programming, optimization, duality, mathematical modelling, nutrition.

1 Introduction

Milk production is a central activity in the agricultural sector, where feeding strategies play a crucial role in determining both the quality of milk and the overall cost of production. Since feed represents one of the largest operational expenses in dairy farming, its efficient management is of significant economic importance.

Dairy cows require a carefully balanced diet that satisfies specific nutritional requirements, particularly in terms of energy and protein intake, in order to sustain milk production and maintain animal health. However, the available feed components differ in both nutritional composition and cost, and these costs are subject to market fluctuations. As a result, farmers face the challenge of selecting a combination of feed ingredients that meets nutritional requirements while minimizing total cost.

This situation naturally leads to a mathematical modelling approach. The problem can be formulated as a constrained optimization problem, in which the decision variables represent the

quantities of each feed component included in the diet. The objective is to minimize the total cost of the feed, while constraints ensure that the minimum nutritional requirements are satisfied. More precisely, the aim is to determine the optimal vector of feed quantities that satisfies daily energy and protein requirements for a dairy cow, while achieving the lowest possible cost. Due to the linear relationship between feed quantities, nutrient contributions, and cost, the problem can be formulated as a linear programming model. In addition to constructing and solving the model, it is essential to critically evaluate its assumptions and limitations. Real-world feeding systems involve complexities such as variability in feed composition, interactions between nutrients, and the necessity of dietary diversity, which are not fully captured in a basic linear model. Therefore, this study also considers possible extensions of the model by introducing additional constraints in order to obtain more realistic solutions.

The model is implemented computationally using Python, which enables efficient numerical solution and allows for sensitivity analysis with respect to changes in key parameters such as feed prices and nutritional requirements. This provides further insight into the robustness of the optimal solution and the economic impact of parameter variations.

Overall, this work demonstrates how mathematical modelling and optimization techniques can be applied to a real-world agricultural problem, highlighting the trade-off between economic efficiency and nutritional adequacy, and emphasizing the importance of critical model evaluation in practical applications.

2 Data

The data used in this model consist of several feed components commonly employed in dairy cow nutrition. For each feed type, information is provided regarding its cost, energy content, protein content, as well as minimum and maximum inclusion levels.

The cost is expressed in cents per kilogram (cents/kg), while energy is measured in megajoules per kilogram (MJ/kg) and protein content in grams per kilogram (g/kg). The minimum and maximum inclusion levels are given in kilograms (kg) and represent, respectively, the minimum and maximum amounts of each feed that can be included in the diet. All these values are assumed to be constant and are treated as parameters within the optimization model.

Feed	Cost (cents/kg)	Energy (MJ/kg)	Protein (g/kg)	Minimum (kg)	Maximum (kg)
Corn	24	8.3	105	3	15
Soybean meal	51	8.5	446	1	5
Sunflower meal	32	6.7	400	1.5	4
Wheat	22	8	135	2	10
Barley	22	8	120	2	5
Pumpkin cake	60.5	8.4	640	0.5	3
Rapeseed	31.2	7.5	315	1	4

Table 1 - Cost, nutritional values, and minimum and maximum inclusion levels of the feed components.

In addition to these parameters, the minimum daily nutritional requirements for a dairy cow are defined as follows:

- Minimum energy requirement: 124.5 MJ;
- Minimum protein requirement: 1485 g.

These values define the constraints that must be satisfied by any feasible solution of the model. All parameter values are assumed to be constant. In particular, variations in feed composition and price fluctuations over time are not considered at this stage of the model.

The numerical values used in this study were provided as part of the Mathematical Modelling project specification and were adopted consistently throughout the analysis. The objective of this work is to demonstrate the application of linear programming techniques for feed optimization rather than to establish nutritional recommendations for practical dairy farming. Therefore, the numerical values should be interpreted as representative modelling data used for educational purposes.

3 Model Assumptions

In order to construct a tractable mathematical model, several simplifying assumptions are introduced. These assumptions reduce the complexity of the real-world system while preserving its essential characteristics.

The main assumptions are as follows:

- **Constant nutritional composition:** Each feed component is assumed to have fixed energy and protein content per unit. Variations between batches or over time are neglected.
- **Linearity of nutrient contribution:** The total energy and protein intake are assumed to be directly proportional to the quantities of feed used, which allows the use of linear expressions in the model.
- **No interaction effects between feeds:** Feed components are assumed to combine independently, without affecting each other's nutritional contribution. In practice, such interactions may occur, but they are not considered in this model.
- **Linear cost structure:** The cost of each feed is assumed to be proportional to the quantity used. Effects such as bulk discounts are not considered. However, availability limitations are incorporated through maximum inclusion constraints.
- **Continuity of variables:** Feed quantities are treated as continuous variables, meaning that fractional amounts of feed can be used.
- **Limited nutritional requirements:** The model considers only energy and protein constraints. Other relevant factors, such as fiber, vitamins, and minerals, are not included.

These assumptions allow the problem to be formulated as a linear programming model. However, they also introduce limitations, which motivate further refinement of the model in subsequent sections.

4 Model Formulation

The feeding problem can be formulated as a linear programming problem, in which the objective is to determine the optimal combination of feed components that minimizes total cost while satisfying the nutritional requirements of a dairy cow.

4.1 Decision Variables

Let the decision variables be defined as:

- x_1 = amount of corn (kg)
- x_2 = amount of soybean meal (kg)
- x_3 = amount of sunflower meal (kg)
- x_4 = amount of wheat (kg)
- x_5 = amount of barley (kg)
- x_6 = amount of pumpkin cake (kg)

x_7 = amount of rapeseed (kg)

All decision variables are subject to minimum and maximum inclusion constraints:

$$m_i \leq x_i \leq M_i, i = 1, \dots, 7. \quad (1)$$

4.2 Parameters

The model is defined by the following parameters:

- c_i : cost of feed i (cents per kg);
- e_i : energy content of feed i (MJ per kg);
- p_i : protein content of feed i (g per kg).

The minimum daily requirements are:

- Energy: $E_{min} = 124.5$ MJ.
- Protein: $P_{min} = 1485$ g.

4.3 Objective Function

The objective is to minimize the total cost of the feed:

$$\min_{x_1, \dots, x_7} C = \sum_{i=1}^7 c_i x_i = 24x_1 + 51x_2 + 32x_3 + 22x_4 + 22x_5 + 60.5x_6 + 31.2x_7 \quad (2)$$

4.4 Constraints

The model must satisfy the following nutritional constraints:

Energy constraint:

$$\sum_{i=1}^7 e_i x_i \geq E_{min} \quad (3)$$

$$8.3x_1 + 8.5x_2 + 6.7x_3 + 8x_4 + 8x_5 + 8.4x_6 + 7.5x_7 \geq 124.5. \quad (4)$$

Protein constraint:

$$\sum_{i=1}^7 p_i x_i \geq P_{min} \quad (5)$$

$$105x_1 + 446x_2 + 400x_3 + 135x_4 + 120x_5 + 640x_6 + 315x_7 \geq 1485. \quad (6)$$

Minimum and maximum inclusion constraints:

$$m_i \leq x_i \leq M_i, i = 1, \dots, 7. \quad (7)$$

4.5 Complete Model

The complete linear programming model can be written as:

$$\min C \quad 24x_1 + 51x_2 + 32x_3 + 22x_4 + 22x_5 + 60.5x_6 + 31.2x_7$$

$$\begin{aligned}
 \text{s. t. } & 8.3x_1 + 8.5x_2 + 6.7x_3 + 8x_4 + 8x_5 + 8.4x_6 + 7.5x_7 \geq 124.5 \\
 & 105x_1 + 446x_2 + 400x_3 + 135x_4 + 120x_5 + 640x_6 + 315x_7 \geq 1485 \\
 & m_i \leq x_i \leq M_i, i = 1, \dots, 7.
 \end{aligned} \tag{8}$$

This model represents a standard linear programming problem, where the objective is to minimize cost subject to nutritional constraints.

5 Implementation and Results

The linear programming model was implemented and solved using Python with the aid of the PuLP library. The implementation includes the definition of decision variables, parameters, objective function, and all constraints, including both minimum and maximum inclusion levels for each feed component.

The optimal solution shows that most feed components are included at their respective minimum levels, while wheat and barley exceed their minimum bounds. In particular, barley reaches its maximum allowed level, with $x_5 = 5$, and wheat increases to approximately $x_4 \approx 3.67$ kg. The optimal total cost is 423.16 cents per day.

To further investigate the structure of the solution, an alternative optimal solution was computed. This alternative feeding strategy achieves the same minimum cost while using a different combination of wheat and barley, confirming the existence of multiple optimal solutions in the primal problem.

The dual problem was also solved to obtain the shadow prices associated with the nutritional requirements. The dual solution provides an economic interpretation of the optimization model and confirms the Strong Duality Theorem, since the optimal objective values of the primal and dual formulations are identical.

Feed Component	Optimal Quantity (Kg)	Price (cents/kg)	Cost (cents)
Corn (x_1)	3	24.0	72.000
Soybean meal (x_2)	1	51.0	51.000
Sunflower meal (x_3)	1.5	32.0	48.000
Wheat (x_4)	3.67	22.0	80.712
Barley (x_5)	5	22.0	110.000
Pumpkin cake (x_6)	0.5	60.5	30.250
Rapeseed (x_7)	1	31.2	31.200
Total Cost			423.1625

Table 2 - Base optimal solution, feed prices, and cost contribution of each feed component.

Feed Component	Alternative Optimal Quantity (Kg)	Price (cents/kg)	Cost (cents)
Corn (x_1)	3	24.0	72.000
Soybean meal (x_2)	1	51.0	51.000
Sunflower meal (x_3)	1.5	32.0	48.000
Wheat (x_4)	4	22.0	88.000
Barley (x_5)	4.67	22.0	102.712
Pumpkin cake (x_6)	0.5	60.5	30.250
Rapeseed (x_7)	1	31.2	31.200
Total Cost			423.1625

Table 3 - Alternative optimal solution, feed prices, and cost contribution of each feed component.

Solution	Total Cost (cents)
Base primal solution	423.1625
Alternative primal solution	423.1625
Dual Solution	423.1625

Table 4 - Comparison of the objective values of the base primal solution, alternative primal solution, and dual solution.

This structure of the solution can be explained by the relative cost-efficiency of the feed components. Barley and wheat provide energy at a relatively low cost compared to other feeds, making them particularly attractive in satisfying the energy constraint. As a result, the optimizer increases their quantities beyond the minimum required levels. In contrast, other feeds remain at their minimum levels because increasing them would lead to a higher cost without providing a more efficient contribution to the nutritional requirements.

The fact that barley reaches its maximum value indicates that its upper bound is a binding constraint in the optimal solution. This means that, from a cost perspective, it would be beneficial to include even more barley if it were allowed. Since this is not possible, the model compensates by increasing the quantity of wheat, which has similar nutritional characteristics and cost structure.

Moreover, the nutritional constraints, particularly the energy requirement, play a central role in determining the composition of the optimal diet. The solution suggests that the energy constraint is active or nearly active, driving the need to use the most cost-efficient energy sources available within the given bounds.

Table 2 presents the optimal solution obtained from the primal formulation. The results show that most feed components are included at their minimum admissible levels, while wheat and barley are selected in larger quantities because of their favourable cost-to-energy ratios.

To further investigate the structure of the model, an alternative optimal solution was computed and is reported in Table 3. In this solution, part of the quantity assigned to barley is transferred to wheat. Although the quantities of these two feed components differ from those in the original solution, the total cost remains unchanged at 423.16 cents per day. This confirms the existence of multiple optimal solutions in the primal problem.

The presence of alternative optimal solutions indicates that wheat and barley can partially substitute each other while still satisfying all nutritional requirements and maintaining the same objective value. From a practical perspective, this provides decision-makers with flexibility in the formulation of feeding strategies without increasing the total cost.

The dual formulation was also solved to analyse the economic value of the nutritional constraints. Table 4 compares the optimal objective values obtained from the base primal solution, the alternative primal solution, and the dual problem. Although the two primal solutions correspond to different feed compositions, both attain the same objective value of 423.16 cents and the dual formulation also yields the same optimal objective value.

The equality of the primal and dual objective values confirms the Strong Duality Theorem. Therefore, although the primal formulation admits multiple optimal solutions, the optimal objective value remains unique and is identical to that of the dual problem. The existence of several optimal primal solutions does not contradict the uniqueness of the dual solution, since duality theory requires equality of the optimal objective values rather than uniqueness of the primal solutions themselves. This result validates the consistency of the optimization model and demonstrates the theoretical relationship between the primal and dual formulations.

6 Dual Problem and Graphical Interpretation

To further analyse the structure of the optimal solution obtained in Section 5, we consider the dual formulation of the problem. In the primal model, the objective is to determine the optimal quantities of each feed component that minimize the total cost while satisfying the minimum energy and protein requirements. The dual problem provides an alternative perspective by assigning values to these nutritional requirements. In particular, it allows us to interpret energy and protein as resources with an associated economic value.

For graphical purposes, a simplified version of the primal problem is considered. The complete model presented in Section 5 includes lower and upper bounds on the feed quantities, which would lead to a considerably larger dual formulation. Since such a formulation cannot be conveniently represented in two dimensions, only the nutritional constraints and non-negativity conditions are retained in the graphical analysis.

The dual formulation of this simplified primal model is obtained by associating one dual variable with each nutritional constraint. Since the simplified primal model includes two nutritional constraints, the dual problem involves two variables, corresponding to energy and protein.

This simplification is used exclusively for interpretation and visualization and does not affect the computational results reported in Section 6, which were obtained from the complete model. The simplified primal problem can therefore be written as:

$$\min \sum_{i=1}^7 c_i x_i \quad (9)$$

subject to:

$$\sum_{i=1}^7 e_i x_i \geq 124.5 \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^7 p_i x_i \geq 1485, \quad (11)$$

$$x_i \geq 0. \quad (12)$$

Since the primal problem includes two constraints (energy and protein), the dual problem will have two variables. We therefore introduce the dual variables:

- y_1 , associated with the energy constraint;
- y_2 , associated with the protein constraint.

The dual objective function is constructed using the right-hand side values of the primal constraints:

$$\max 124.5y_1 + 1485y_2. \quad (13)$$

Each variable x_i in the primal problem gives rise to one constraint in the dual problem. These constraints ensure that the value of the nutrients provided by each feed component does not exceed its cost:

$$\begin{aligned} e_i y_1 + p_i y_2 &\leq c_i, \forall i \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

The dual variables can be interpreted as the implicit prices of nutrients. In particular, y_1 represents the value of one unit of energy (MJ), while y_2 represents the value of one unit of protein (g).

At optimality, the feed components that are effectively used in the primal solution correspond to constraints that are binding in the dual problem, satisfying

$$e_i y_1 + p_i y_2 = c_i. \quad (15)$$

This means that, for these components, the value of the nutrients they provide is exactly equal to their cost, making them the most cost-efficient options.

Substituting the numerical values, the dual problem becomes:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 124.5y_1 + 1485y_2 \\
 \text{s.t.} \quad & 8.3y_1 + 105y_2 \leq 24 \\
 & 8.5y_1 + 446y_2 \leq 51 \\
 & 6.7y_1 + 400y_2 \leq 32 \\
 & 8y_1 + 135y_2 \leq 22 \\
 & 8y_1 + 120y_2 \leq 22 \\
 & 8.4y_1 + 640y_2 \leq 60.5 \\
 & 7.5y_1 + 315y_2 \leq 31.2 \\
 & y_1, y_2 \geq 0.
 \end{aligned} \tag{16}$$

The feasible region defined by these constraints is convex, and the optimal solution is attained at one of its vertices.

For graphical clarity, the coefficients of the energy variable are scaled by a factor of 10. This transformation does not affect the structure of the problem, but simplifies the visualization of the constraints.

The constraints can therefore be rewritten as:

$$\begin{aligned}
 83y_1 + 105y_2 &\leq 24 \\
 85y_1 + 446y_2 &\leq 51 \\
 67y_1 + 400y_2 &\leq 32 \\
 80y_1 + 135y_2 &\leq 22 \\
 80y_1 + 120y_2 &\leq 22 \\
 84y_1 + 640y_2 &\leq 60.5 \\
 75y_1 + 315y_2 &\leq 31.2.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Each constraint of the dual problem defines a half-plane in the (y_1, y_2) plane. The feasible region is given by the intersection of these half-planes together with the non-negativity conditions $y_1 \geq 0$ and $y_2 \geq 0$.

Since the dual problem involves two variables, it can be analysed graphically. The resulting feasible region is convex and bounded, and the optimal solution is attained at one of its vertices.

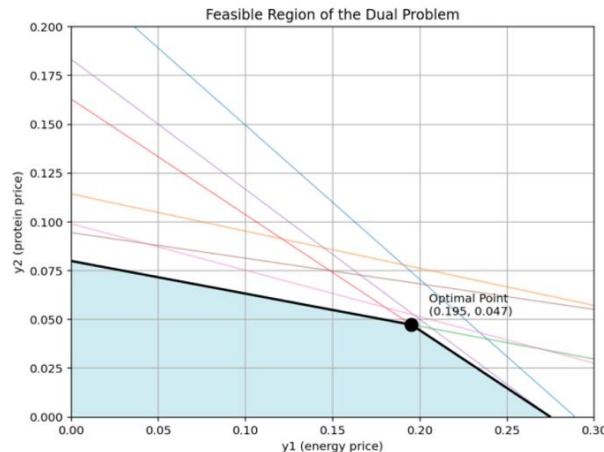


Image 1 - Feasible region of the dual problem and identification of the optimal solution

Image 1 illustrates the feasible region of the simplified dual problem together with its boundary. For clarity, the vertical scale has been restricted to highlight the region of interest. The optimal solution is located at a vertex of the feasible region, corresponding to the intersection of two binding constraints. The coordinates of this point were obtained computationally from the dual constraints and are consistent with the graphical representation.

$$(y_1, y_2) \approx (0.195, 0.047). \quad (18)$$

In this case, the optimal solution is attained at the intersection of two binding constraints that define the active boundary of the feasible region.

These values represent the shadow prices of energy and protein, respectively. In particular, y_1 represents the increase in the optimal feeding cost resulting from a one-unit increase in the minimum energy requirement, while y_2 represents the increase in the optimal feeding cost resulting from a one-unit increase in the minimum protein requirement.

At the optimal solution, the binding constraints satisfy

$$e_i y_1 + p_i y_2 = c_i. \quad (19)$$

which means that the value of the nutrients provided by the corresponding feed components is exactly equal to their cost. These components are therefore the most cost-efficient in terms of nutrient contribution.

This confirms that only a subset of constraints is active at optimality, while the remaining constraints are non-binding and do not influence the final solution.

An interesting observation is that the primal formulation presented in Section 6 admits multiple optimal solutions, while the simplified graphical dual formulation attains its optimum at a single vertex of the feasible region. This does not contradict the theory of linear programming duality. It should be noted that the graphical dual formulation presented in this section is a simplified representation introduced for visualization purposes. The equality of the optimal objective values discussed below refers to the complete primal and dual formulations solved computationally in Section 6. According to the Strong Duality Theorem, the optimal objective values of the primal and dual problems must be equal, but the number of optimal solutions does not need to coincide.

Geometrically, multiple optimal solutions in the primal problem occur when the objective function is parallel to a boundary segment of the feasible region, allowing several feasible points to attain the same optimal cost. In contrast, the dual feasible region attains its optimum at a single vertex, leading to a unique optimal dual solution.

This observation illustrates that primal and dual optimality are related through equality of optimal objective values rather than through uniqueness of solutions. The result is fully consistent with the theoretical properties of linear programming duality.

7 Sensitivity Analysis

To better understand the behaviour of the model, a sensitivity analysis was performed by modifying certain parameters and constraints.

7.1 Scenario 1: Increase in the Cost of Barley

In this scenario, the cost of barley is increased from 22 to 35 cents per kilogram, reflecting a possible rise in market prices. All other parameters remain unchanged.

The results show that barley is no longer used beyond its minimum required level, with $x_5 = 2$, while wheat increases significantly to approximately $x_4 \approx 6.67$ kg. The remaining variables x_1, x_2, x_3, x_6, x_7 remain at their respective minimum levels.

Feed Component	Base Model (Kg)	Scenario 1 (kg)
Corn (x_1)	3	3
Soybean meal (x_2)	1	1
Sunflower meal (x_3)	1.5	1.5
Wheat (x_4)	3.67	6.67
Barley (x_5)	5	2
Pumpkin cake (x_6)	0.5	0.5
Rapeseed (x_7)	1	1

Table 5 - Comparison between the base model and the Scenario 1 (increase in barley cost)

The total cost increases from 423.16 to 449.16 cents per day.

This change in the solution can be explained by the loss of cost-efficiency of barley. In the base model, barley was one of the most economical sources of energy, which led to its maximum utilization. However, after the price increase, barley becomes relatively expensive compared to other feed components, and the optimizer reduces its use to the minimum allowed level.

To compensate for the reduced use of barley, the model increases the quantity of wheat, which provides a similar energy contribution at a lower cost. Table 5 clearly illustrates this substitution effect between barley and wheat.

The increase in total cost reflects the reduced efficiency of the available feed components. Since a previously economical ingredient becomes more expensive, the model is forced to rely on less efficient alternatives, leading to a higher overall cost.

This scenario highlights the sensitivity of the optimal solution to changes in feed prices and demonstrates how market fluctuations can significantly affect both the composition and the cost of the diet.

7.2 Scenario 2: Increase in Energy Requirement

In this scenario, the minimum energy requirement is increased from 124.5 MJ to 160 MJ, while all other parameters remain unchanged. This modification reflects a situation in which higher energy intake is required.

The results indicate that barley remains at its maximum allowed level, with $x_5 = 5$, while wheat increases significantly to approximately $x_4 \approx 8.11$ kg. The remaining variables x_1, x_2, x_3, x_6, x_7 remain at their respective minimum levels.

Feed Component	Base Model (Kg)	Scenario 2 (kg)
Corn (x_1)	3	3
Soybean meal (x_2)	1	1
Sunflower meal (x_3)	1.5	1.5
Wheat (x_4)	3.67	8.11
Barley (x_5)	5	5
Pumpkin cake (x_6)	0.5	0.5
Rapeseed (x_7)	1	1

Table 6 - Comparison between the base model and the Scenario 2 (increase in energy requirement)

The total cost increases from 423.16 to 520.79 cents per day.

This change in the solution is driven by the tightening of the energy constraint, which becomes the dominant factor in the optimization problem. Since barley is one of the most cost-efficient sources of energy, it remains at its maximum allowed level. However, this is no longer sufficient to satisfy the higher energy requirement.

As a result, the model significantly increases the quantity of wheat, which provides additional energy at a relatively low cost. Table 6 clearly shows this strong increase in wheat consumption. The substantial increase in total cost reflects the higher amount of feed required to meet the stricter energy constraint. This scenario demonstrates that the model is highly sensitive to changes in nutritional requirements, particularly energy, and highlights the key role of energy-efficient feed components in determining the optimal diet.

7.3 Scenario 3: Mandatory Use of Corn Stock

In this scenario, a minimum amount of corn is imposed, namely $x_1 \geq 10$, reflecting a situation in which a certain quantity of feed must be used, for example due to storage constraints or to avoid waste.

The results show that corn is used exactly at the imposed level, with $x_1 = 10$, while wheat and barley are reduced to their minimum levels, with $x_4 = 2$ and $x_5 = 2$. The remaining variables x_2, x_3, x_6, x_7 remain at their respective minimum levels.

Feed Component	Base Model (Kg)	Scenario 3 (kg)
Corn (x_1)	3	10
Soybean meal (x_2)	1	1
Sunflower meal (x_3)	1.5	1.5
Wheat (x_4)	3.67	2
Barley (x_5)	5	2
Pumpkin cake (x_6)	0.5	0.5
Rapeseed (x_7)	1	1

Table 7 - Comparison between the base model and the Scenario 3 (mandatory use of corn)

The total cost increases from 423.16 to 488.45 cents per day.

This change in the solution is driven by the imposed constraint on corn usage, which forces the model to include a larger quantity of a relatively less cost-efficient feed component. As a result, the optimizer reduces the quantities of more efficient feeds, such as barley and wheat, in order to maintain feasibility while minimizing cost.

Table 7 clearly illustrates this shift in the composition of the diet. The increase in total cost reflects the inefficiency introduced by the constraint, as the model is no longer free to select the most economical combination of feed components.

This scenario highlights how practical constraints, such as mandatory use of available stock, can lead to suboptimal solutions from an economic perspective. It also emphasizes the importance of flexibility in feed selection in order to achieve cost efficiency.

Overall, the sensitivity analysis shows that the model is particularly sensitive to changes in energy requirements and feed prices, while additional constraints can lead to less cost-efficient solutions.

8 Extended Scenario with Hay and Silage

To illustrate the flexibility of the proposed optimization framework, an extended scenario including hay and silage was considered. These feed components are widely used in dairy cattle nutrition and represent common feeding practices in European agricultural systems.

The same linear programming framework was maintained, while the set of available feed components was extended with the inclusion of hay and silage. Their nutritional characteristics were incorporated into the optimization model together with the existing feed sources.

In this extended scenario, the minimum inclusion levels for hay and silage were intentionally retained to represent a practical feeding strategy in which these newly introduced feed components are deliberately included in the daily ration. Consequently, the objective of this

scenario is not to investigate an unconstrained reformulation of the diet, but rather to evaluate the economic impact of extending the set of available feed components while respecting predefined practical inclusion requirements.

The inclusion of these additional feed components enlarges the set of available feed ingredients and demonstrates that the optimization framework can be extended to incorporate additional practical feeding options while respecting predefined inclusion requirements. This extension provides a more realistic representation of practical dairy cattle feeding strategies and demonstrates the flexibility of the mathematical model.

Feed	Cost (cents/kg)	Energy (MJ/kg)	Protein (g/kg)	Minimum (kg)	Maximum (kg)
Corn	24	8.3	105	3	15
Soybean meal	51	8.5	446	1	5
Sunflower meal	32	6.7	400	1.5	4
Wheat	22	8	135	2	10
Barley	22	8	120	2	5
Pumpkin cake	60.5	8.4	640	0.5	3
Rapeseed	31.2	7.5	315	1	4
Hay	18	8.4	182	1	8
Silage	15	6.8	80	5	20

Table 8 - Cost, nutritional values, and minimum and maximum inclusion levels of the feed components considered in the extended feeding scenario.

Feed Component	Optimal Quantity (Kg)
Corn	3
Soybean meal	1
Sunflower meal	1.5
Wheat	2
Barley	2
Pumpkin cake	0.5
Rapeseed	1
Hay	1
Silage	5

Table 9 - Optimal quantities of feed components in the extended feeding scenario.

The optimization model was solved again after introducing hay and silage as additional feed components. Table 9 reports the optimal quantities obtained for the extended feeding scenario. All feed components are selected at their minimum admissible inclusion levels. In particular, the newly introduced feeds, hay and silage, enter the optimal solution at their minimum quantities of 1 kg and 5 kg, respectively. The optimal feeding strategy obtained in the extended scenario differs from the base model. While the original formulation required increased quantities of wheat and barley to satisfy the energy requirement at minimum cost, the introduction of hay and silage provides additional low-cost nutrient sources. As a result, all feed components remain at their minimum admissible levels while still satisfying the nutritional requirements. This leads to a reduction in the optimal total cost from 423.16 cents per day in the base model to 413.45 cents per day in the extended scenario.

In general, the extended model provides a broader representation of practical dairy cattle feeding systems and illustrates how mathematical optimization techniques can adapt to changes in food availability and nutritional composition.

Accordingly, the obtained solution should be interpreted as the least-cost diet under these predefined practical inclusion requirements rather than as the global optimum of an unconstrained extended formulation.

9 Model Improvements

Although the proposed linear programming model provides a clear and effective solution to the feed optimization problem, several improvements can be introduced to enhance its realism and applicability to real-world situations.

A first important extension would be the inclusion of additional nutritional constraints. In the current model, only energy and protein requirements are considered, whereas other essential components such as fiber, vitamins, and minerals are neglected. In practice, these factors play a crucial role in animal health, digestion, and milk quality. Incorporating such constraints would lead to a more comprehensive formulation, ensuring that the resulting diet is not only cost-efficient but also nutritionally balanced.

A second limitation arises from the assumption that all parameters are fixed and known with certainty. In reality, both the composition of the feed and the prices of the market are subject to variability due to seasonal changes, differences in production batches, and economic fluctuations. A more realistic approach would involve modeling these parameters as uncertain quantities. This could be addressed through sensitivity ranges, robust optimization techniques, or stochastic programming, allowing the identification of solutions that remain effective under varying conditions.

Another possible improvement concerns the continuity of the decision variables. The current model allows fractional quantities of feed, which may not always be practical in real farming operations, where feed is often distributed in discrete units or subject to operational constraints. This limitation could be addressed by formulating the problem as a mixed-integer linear program, ensuring that the solution is implementable in practice.

Furthermore, the model assumes that feed components contribute independently to the total nutritional intake, leading to a purely linear structure. However, in reality, interactions between nutrients can occur, affecting digestibility and absorption. For example, certain combinations of feed can enhance or reduce the availability of specific nutrients. Capturing such effects would require the introduction of non-linear relationships, resulting in a more accurate, albeit more complex, model.

An additional extension would be to consider the dynamic aspects of feeding strategies. The current formulation is static and represents a single-period optimization problem. In practice, feeding decisions are made over time, taking into account variations in animal condition, production stages, and feed availability. A dynamic or multi-period model could better capture these temporal effects and support improved long-term decision-making.

Overall, these improvements would increase the realism and practical relevance of the model, but at the cost of greater mathematical and computational complexity. Therefore, a balance must be established between the accuracy and tractability of the model, depending on the specific objectives and the availability of data.

10 Discussion

The results obtained from the linear programming model provide valuable insights into the structure of cost-efficient feeding strategies for dairy cows. The model successfully identifies an optimal combination of feed components that satisfies the nutritional requirements at minimum cost, highlighting the role of cost-to-nutrient efficiency in determining the composition of the diet.

A key observation from the results is that only a subset of feed components actively influences the optimal solution. In particular, barley and wheat play a dominant role as a result of their relatively low cost per unit of energy. This explains why barley reaches its maximum inclusion level in the base scenario, while wheat increases beyond its minimum bound. In contrast, other feed components remain at their minimum levels, as increasing their quantities would not provide a cost-effective contribution to nutritional requirements.

The graphical analysis of the simplified dual problem reinforces this interpretation. The optimal solution is located at the intersection of two binding constraints, that is, constraints that are satisfied with equality at the optimal solution, confirming that only a limited number of constraints determine the final solution. This reflects a fundamental property of linear programming: although many constraints define the feasible region, only a few are active at optimality.

The dual variables provide an economic interpretation of the problem by representing the implicit prices of nutrients. The values obtained for y_1 and y_2 indicate the marginal worth of energy and protein, respectively. This interpretation helps to explain how changes in nutritional requirements or feed composition can affect the optimal solution.

The sensitivity analysis further demonstrates the robustness and limitations of the model. Changes in feed prices and nutritional requirements lead to significant adjustments in the optimal solution, particularly through substitution effects between feed components. For example, when the cost of barley increases, the model shifts towards greater use of wheat, illustrating how the optimization process adapts to maintain cost efficiency.

The extended scenario including hay and silage provides additional insight into the behaviour of the optimization model. Although the overall structure of the solution remained similar, the introduction of hay and silage reduced the optimal cost from 423.16 to 413.45 cents per day. Both hay and silage were included only at their minimum required levels, indicating that the original feed components continued to provide a more favourable cost-to-nutrient ratio under the considered assumptions. This result illustrates an important property of linear programming models: enlarging the feasible set does not necessarily improve or modify the optimal solution if the newly introduced alternatives are not sufficiently competitive in terms of cost and nutritional contribution.

The results also highlight some limitations of the model. The assumption of fixed nutritional values and linear relationships simplifies the problem but does not fully represent real feeding systems. In practice, variability in feed composition, interactions between nutrients, and operational constraints can affect the applicability of the solution.

In addition, the existence of multiple optimal solutions indicates that different feeding strategies may achieve the same minimum cost. Although this provides flexibility, it also suggests that additional criteria, such as availability or practical constraints, may need to be considered when implementing the solution. This flexibility may be advantageous in practice, since farmers can select among different feeding strategies according to feed availability, storage conditions, or operational preferences without increasing the total cost.

The model offers a clear and effective framework for feed optimization. At the same time, the results should be interpreted with awareness of the underlying assumptions and potential limitations.

11 Conclusion

This study applied a linear programming model to determine cost-efficient feeding strategies for dairy cows under nutritional constraints. The results show that the model effectively identifies optimal feed combinations while providing a clear economic interpretation through the dual formulation.

The analysis highlights the importance of a small number of active constraints in determining the optimal solution, as well as the role of nutrient values as implicit prices. In addition, the sensitivity analysis illustrates how the model responds to changes in key parameters. The extended scenario including hay and silage showed that enlarging the set of available feed components does not necessarily alter the optimal solution, highlighting the importance of cost-to-nutrient efficiency in feed selection.

Although the model offers a structured and insightful framework, its applicability depends on the underlying assumptions, and further extensions may be required to better reflect real-world conditions. In particular, future work could incorporate additional nutritional factors, stochastic variations in feed composition, and practical management constraints.

This work demonstrates the value of optimization techniques in supporting decision-making in agricultural systems and illustrates how mathematical modelling can contribute to more efficient and economically sustainable feeding strategies.

References

- [1] **Pučnik, D**, *Optimizacija obroka*, 2026. Original problem statement and data provided for the Mathematical Modelling project.
- [2] **MIT OpenCourseWare**, *Linear Programming and Duality*, 2024. Available at: https://ocw.mit.edu/courses/18-200-principles-of-discrete-applied-mathematics-spring-2024/resources/mit18_200_s24_lec17_pdf/.
- [3] **Cornell University**, *Duality in Linear Programming*, 2024. Available at: <https://optimization.cbe.cornell.edu/index.php?title=Duality>.
- [4] **COIN-OR Project**, *PuLP Linear Programming Library*, 2024. Available at: <https://coin-or.github.io/pulp/>
- [5] **Feedipedia**, *Alfalfa Hay*, 2024. Available at: <https://www.feedipedia.org/node/11743>
- [6] **Feedipedia**, *Maize Silage*, 2024. Available at: <https://www.feedipedia.org/node/13883>

VABILO AVTORJEM

Dianoia (grško διάνοια) po Platonu označuje védenje, razmišljanje o modelih stvarnosti, o naravoslovno-matematičnih in tehničnih temah. Uporabljajo ga matematiki (modeliranje) in znanstveniki (formuliranje problema), inženirji (načrtovanje sistema). Opredeljuje kompetenco, proces ali rezultat diskurzivnega razmišljanja, za razliko od neposrednega razumevanja obravnavane tematike. Aristotel to védenje naprej razdeli na teoretično (episteme) in praktično (phronesis).

Dianoia po Platonu torej označuje vmesni nivo človeškega spoznanja, prehod od intuitivnih občutkov do najglobljega spoznanja dejanskosti. Tako je idealna oznaka za objave v pričujoči reviji, ki povezujejo teoretična, znanstvena izhodišča z njihovo uporabno namembnostjo. Študentje, avtorji teh člankov, ste na prehodu od učenja k delu, od teoretičnega h konkretnemu, ki vas bo pripeljalo do kruha, do dela, s katerim boste odigrali svojo vlogo v družbi. Na tem prehodu pa poleg znanja, ki ga ponuja redno izobraževanje, potrebujete tudi izkušnje s konkretnih izzivov in mehke kompetence sodelovanja v ekipah delodajalcev, k čemur vas spodbuja in vam pri tem pomaga revija Dianoia.

V reviji bomo objavljali poljudne in strokovne članke s področja naravoslovja, matematike ali znanosti, ki uporabljajo znanja teh področij. Ciljna publika bralcev so v prvi vrsti delodajalci, ki tovrstna znanja potrebujejo in želijo izvedeti, kaj je kdo zanimivega razmislil na njihovem področju. V drugi vrsti so ciljna publika študentje, ki iščejo zamisli za svojo poklicno pot in lahko v reviji najdejo navdih za lastna raziskovanja in iskanje stikov s trgom dela.

Za kakovost izdelkov bo skrbel uredniški odbor in uredniški svet, v katerih so vrhunski strokovnjaki, povezani s področji, ki jih revija obravnava. Članki bodo anonimno recenzirani, o objavi pa na podlagi recenzije odloča uredniški odbor. Priporočljivo je, da avtorji besedilo spremenijo v skladu s priporočili recenzentov in da popravljeni članek z utemeljitvijo sprejema ali zavrnitve sprememb ponovno pošljejo v pregled. Uredništvo lahko objavo članka zavrne, če vsebinsko ali po merilih kakovosti ne ustreza standardom revije, o čemer avtorje obvestimo v najkrajšem možnem času.

S prispevkom v reviji bodo avtorji spodbujali širjenje znanja s področja naravoslovja in matematike ter tehnike oziroma izobraževanja teh področij in svoje poglede prenašali na trg dela in na prihajajoče generacije.

NAVODILA AVTORJEM

Avtorje prosimo, da pri pripravi članka upoštevajo naslednja navodila.

Če je članek napisan v slovenščini, naj ima angleški prevod naslova, povzetka in ključnih besed. Veseli bomo tudi prispevkov v angleščini, ki pa morajo imeti naslov, razširjen povzetek v obsegu 300 – 400 besed in ključne besede v slovenščini. Ključnih besed naj bo do šest.

Prispevki naj bodo zanimivi za širši krog bralcev. Ključna je intuitivna predstavitev zamisli in rezultatov, podrobnosti pa lahko ostanejo prihranjene za morebitni znanstveni članek, ki bi bil nadgradnja članka, objavljenega v reviji Dianoia.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (avtorjev) in sedež ustanove, kjer avtor(ji) dela(jo). Sledi naj povzetek, z največ 150 besedami, seznam ključnih besed in besedilo, ki ne presega 3000 besed. Besedilo naj bo zapisano v urejevalniku besedil MS Word 2010 oz. kasnejši ali LaTeX in naj uporablja objavljeno predlogo. Slike in tabele morajo biti oštevilčene in imeti natančen opis, da jih lahko razumemo brez preostalega besedila. Slike v elektronski obliki naj bodo visoke kakovosti v formatu PNG ali JPEG.

Prispevek v PDF obliki pošljite na naslov dianoia@um.si z zadevo: »Za revijo Dianoia«. Če bo sprejet v objavo, vas bomo prosili za izvirno obliko prispevka.