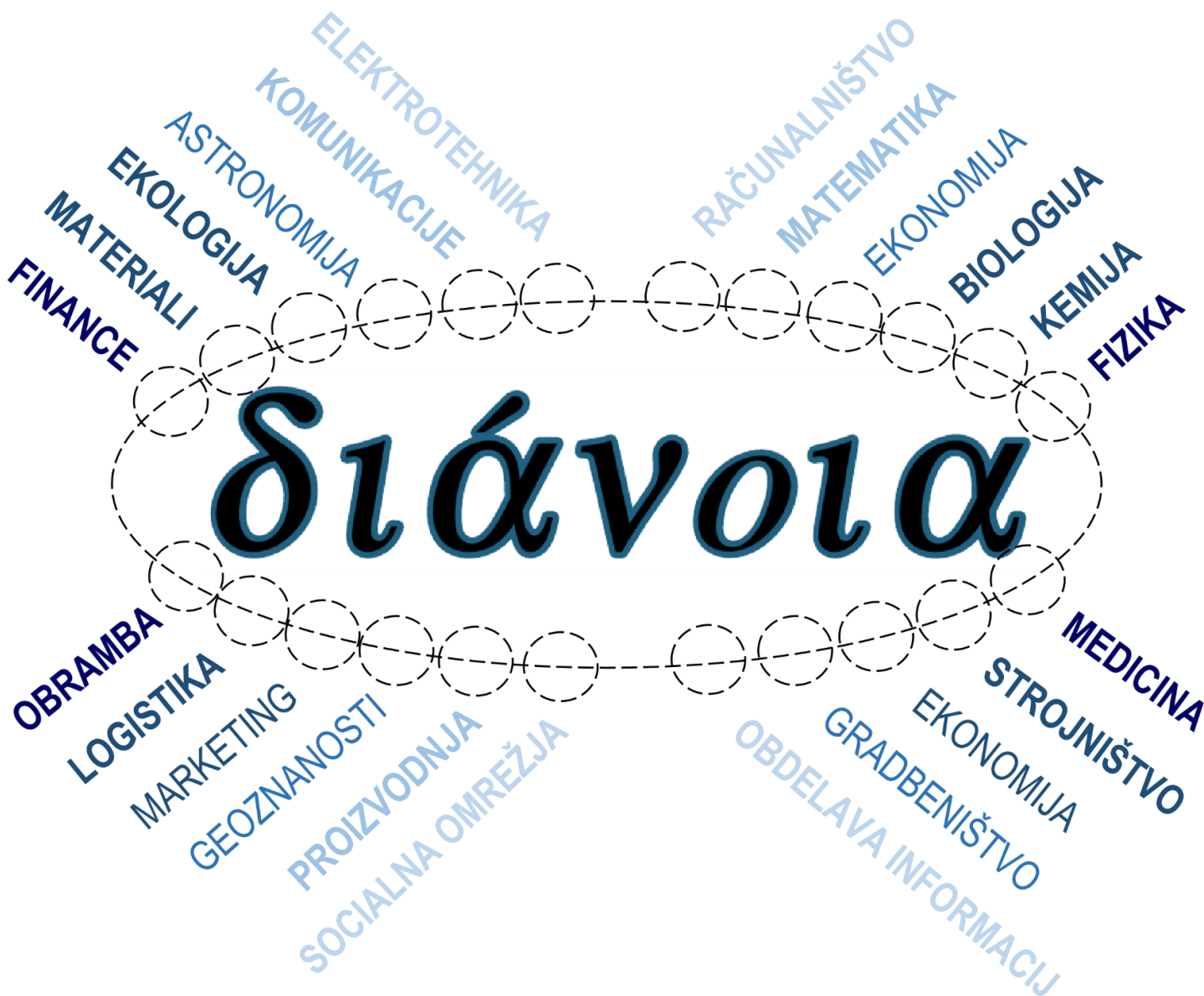




Univerza v Mariboru

Fakulteta za naravoslovje
in matematiko



D I A N O I A

REVIIJA ZA UPORABO NARAVOSLOVNO-MATEMATIČNIH ZNANOSTI

ISSN	2536-3565
Naslov publikacije/Title	DIANOIA , revija za uporabo naravoslovnih in matematičnih znanosti DIANOIA , journal for applications of natural and mathematical sciences
Letnik/Volume	8
Leto/Year	2024 (april)
Številka/Number	1
Založnik in izdajatelj/ Published & Issued by	Univerzitetna založba Univerze v Mariboru, Slomškov trg 15, 2000 Maribor, Slovenija, http://press.um.si/ , zalozba@um.si
Uredništvo/Editorial board	<i>odgovorni urednik/editor in chief</i> Mitja Slavinec <i>glavni urednik/executive editor</i> Drago Bokal <i>izvršna urednica/managing editor</i> Janja Jerebic <i>urednici za področje biologije/editors for biological sciences</i> Nina Šajna, Sonja Škornik <i>urednik za področje didaktike/editor for didactical sciences</i> Samo Repolusk <i>urednika za področje fizike/editors for physical sciences</i> Robert Repnik, Aleš Fajmut <i>urednika za področje matematike/editors for mathematical sciences</i> Igor Pesek, Janja Jerebic <i>urednik za področje tehnike/editor for technical sciences</i> Mateja Ploj Vrtič <i>tehnična urednica/technical editor</i> Špela Kajzer
Mednarodni uredniški svet/ International advisory board	Igor Emri (Fakulteta za strojništvo Univerze v Ljubljani, član SAZU), Matej Brešar (FNM, član SAZU), Sergey Pasechnik (Državna fakulteta v Moskvi), Vlad Popa-Nita (Fakulteta za fiziko Univerze v Bukarešti), Blaž Zmazek (FNM), Samo Kralj (FNM), Franci Janžekovič (FNM), Nataša Vaupotič (FNM), Mitja Kaligarič (FNM), Boris Aberšek (FNM), Andrej Šorgo (FNM), Bojan Mohar (Simon Fraser University, Vancouver), Matjaž Perc (FNM), Ivica Aviani (Naravoslovno matematična fakulteta Split), Fahriye Altınay (Univerza v Nikoziji), Andreas M. Hinz (Univerza Ludwig-Maximilians, München)
Oblikovanje/Design	Amadeja Bratuša
Lektoriranje/Proofreading	Ljudmila Bokal
Sedež uredništva/Address	FNM UM, Koroška cesta 160, 2000 Maribor
e-mail	dianoia@um.si
internet/web	www.fnm.um.si
Tisk/Printed by	FNM UM
Leto izida/Year	2024
Datum natasa/Published	2024
Naklada/Nr. of Copies	100 izvodov

Revija izhaja dvakrat letno, predvidoma aprila in septembra.

Kazalo / Table of Contents

Nekoliko oseben lektorjev pogled <i>Ljudmila Bokal</i>	5
Zeemanov pojav v plamenu z natrijem Zeeman effect in a flame containing sodium <i>Tjaš Esih, Alen Labohar, Jure Šantelj, Mitja Suvajac</i>	9
Zhang-Zhangov polinom in polinom kock The Zhang-Zhang polynomial and the cube polynomial <i>Niko Tratnik</i>	17
Structural design of learning spaces using operations Strukturirano oblikovanje prostorov znanja z uporabo operacij <i>Maša Galun, Drago Bokal</i>	29
Učni primer sočasnega izračuna ogljičnega odtisa, lastne cene in analize življenjskega cikla Educational Example of Simultaneous Calculation of Carbon Footprint, Own Cost, and Life Cycle Analysis <i>Jan Alif, Tit Podhraški, Špela Tertinek, Drago Bokal</i>	41

Nekoliko oseben lektorjev pogled

Ljudmila Bokal

V vsaki številki Dianoie so na zadnji strani v Vabilu avtorjem zapisane okvirne programske smernice, ki naj bi opredeljevale vsebine, namenjene za objavo v reviji. Z nekaterimi izpusti se berejo tako: "Dianoia po Platonu označuje védenje, razmišljanje o modelih stvarnosti, o naravoslovno-matematičnih in tehničnih temah. /.../ Aristotel to védenje naprej razdeli na teoretično in praktično. Dianoia po Platonu torej označuje vmesni nivo človeškega spoznanja, prehod od intuitivnih občutkov do najglobljega spoznanja dejanskosti. Tako je idealna oznaka za objave v pričujoči reviji, ki povezujejo teoretična, znanstvena izhodišča z njihovo uporabno namembnostjo."

Ob tem se priložnostni, a vendar od začetka sodelujoči jezikovni pregledovalec sprašuje, ali je mogoče njegovo delo navezati na zgoraj omenjene silnice. Ali dvoje tako rekoč skrajnih dojemanj obstoječe stvarnosti odseva v njegovem delu?

Odgovor na to vprašanje povezujemo z najbolj prvobitnimi pogledi na jezik. Jezik je konec koncev najprej zbir glasov, ujetih v abecedo določenega jezika, od njihove nadaljnje povezujoče strukturiranosti v zvočne nize s prilagoditvijo realnosti pa je odvisna vsakokratna tematika, ki se ji reče ubeseditvev zastavljenega cilja. Sledeč zgoraj omenjenemu vprašanju, misli zasučemo tako: ali lahko že na tej prvi stopnji v člankih Dianoie najdemo prvinske jezikovne vzgibe, v jezikoslovni terminologiji rečeno: Ali najdemo v njih pravorečne posebnosti, značilne za to matematično vedo, ki so trd oreh za jezikoslovce, za poznavalce pa nič hudega sluteč zadrega nepoznavalcev mine brez pomisleka. Bodimo nazorni: V Dianoii, letnik 7 (2023), številka 2, je na strani 37 naslov članka Matije Kerkoča Policijsko število velikih 2-prekrižno-kritičnih grafov. Se to bere kot število dveh prekrižno-kritičnih grafov? Ali kot število dve-prekrižno-kritičnih grafov? Po ujemalnih rekciji sosednjih izrazov je smiselno prvo, a vendar, kako se pa potem prebere besedna zveza 1-prekrižno-kritični grafi, omenjena na isti strani? Termin je uporabljen v sobesedilu: Take grafe imenujemo 1-prekrižno-kritični grafi. Kakšno slovnično vlogo ima število 2 oziroma 1 v besedni zvezi glede na število členov? Kako se taka hibridna besedna zveza, ki je kombinacija števil in "navadnih" izrazov, imenuje? Vprašanj je veliko, odgovore pa bi mogoče zaman iskali v pravopisnih priročnikih.

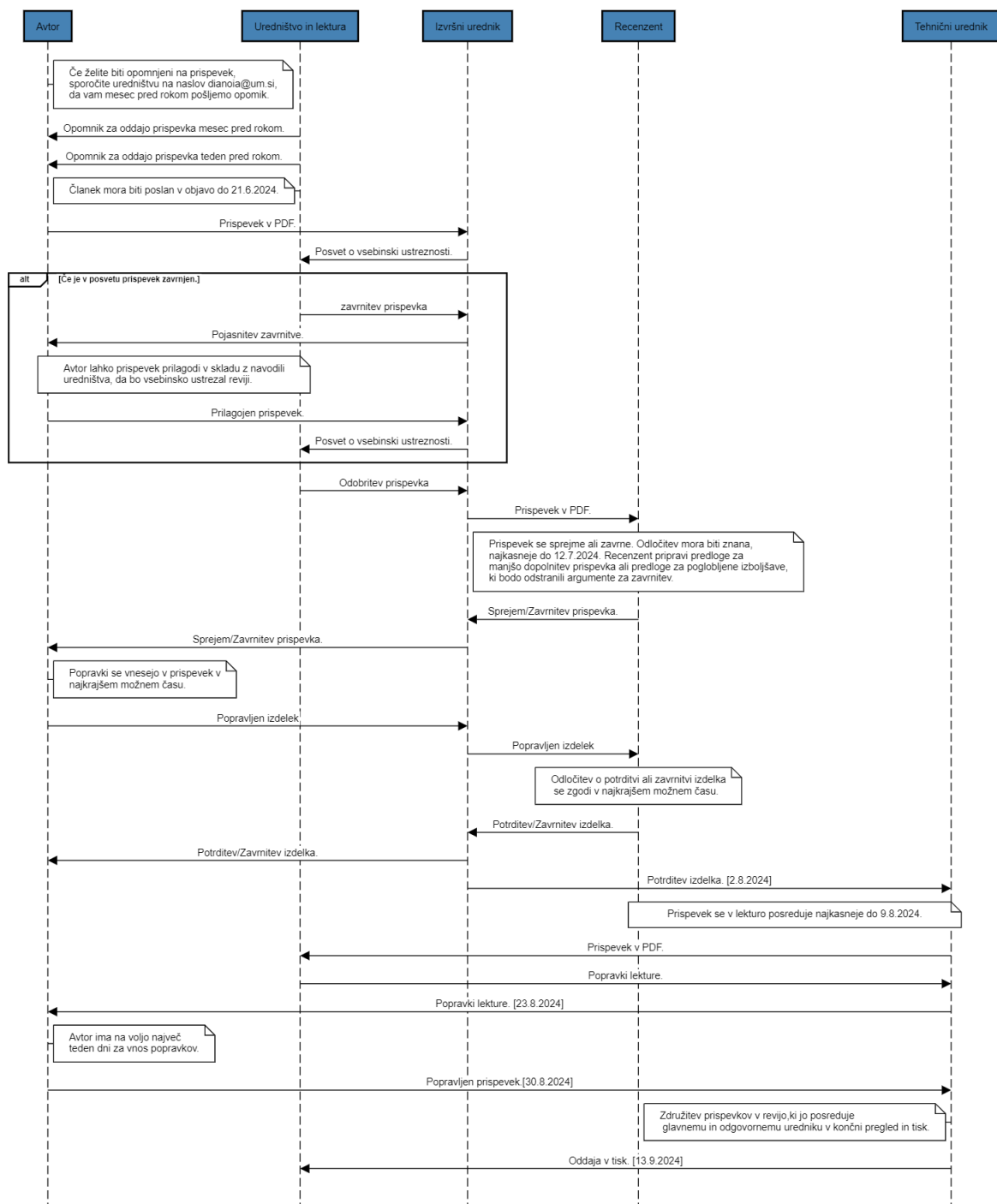
V besedni zvezi *policijsko število velikih 2-prekrižno-kritičnih grafov* vzbuja pozornost izraz policijski. Po SSKJ beseda *policija* pomeni *organ za javno in državno varnost*, izraz izkazuje potemtakem veliko družbeno angažiranost. V nadaljevanju članka izvemo, da je termin vezan na igro policistov in roparja. Glede na navezavo samo na to igro se pojavlja vprašanje, ali je termin *policijsko število* tako splošen, da bi ga lahko navezali tudi na druge

podobne možnosti, morda na druge igre. Če se namreč navezuje zgolj na to igro, bi bilo besedno zvezo mogoče primerneje zastaviti tako, da bi bila ta enkratnost jasneje izražena.

Zastranitev na izrazje ne izključuje nadaljevanja razprave o temeljnih razmislekih, s katerimi se srečuje jezikovni pregledovalec člankov v Dianoii. Od intuitivno pogojenih zadreg v pravorečju (SSKJ: pravorečje /.../ *pravila, ki določajo in predpisujejo glasove in naglas knjižnega jezika*) se usmerimo k pravopisnim vprašanjem. V članku Katje Zemljič, Energija molekulskih grafov (Dianoia, 6, 2022, str. 52) je definiran topološki termin *pot*. Tako: "Zaporedje povezav med vozliščema v_1 in v_n v grafu G oblike $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_{n-1}v_n$, pri čemer so vozlišča v_1, \dots, v_n paroma različna, imenujemo *pot*." Pregledovalec se sprašuje, ali bi morali biti med posameznimi grafičnimi enotami, potemtakem med v_1v_2 in v_2v_3 ter v_3v_4 za vejicami presledki. V leksikologiji velja okvirno pravilo o vmesnem vrivanju členov. Če med dve besedi lahko vrinemo tretjo, zveza ni popolna in sta to dve samostojni enoti. Ob pregledovanju pogosto ni časa za posvet, kakšna pravila veljajo v pisanju topoloških izrazov. Lahko le zaupamo avtorjem, da so zapleteni topološki izrazi pravopisno urejeni po ustaljenih pravilih stroke, kot je, recimo, primer naslednji topološki izraz: Graf H je podgraf grafa G , če velja $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$. Podgraf H je vpeti podgraf grafa G , če je $V(H) = V(G)$. (Dianoia, 6, 2022, str. 53.)

Od pravopisnih zadreg, o katerih pregledovalec razmišlja, ali bi našel odgovore v obstoječih in pripravljajočih se jezikovnih in pravopisnih priročnikih, pozornost posvetimo še pomenski, to je besedni jezikovni ravnini. Če usmerjevalno pojasnilo v Slovenskem pravopisu 2001 razumemo pravilno (SP 2001: topologija /.../ —geometrija lege, položaja—) laično sklepamo, da bo topološko izrazje v svojem metajeziku vsebovalo termine, ki bodo opredeljevali možnosti, s katerimi se opisujejo razdalje, linije, razsežnosti, črte, povezave med njimi. Tako jezikovno ozaveščen bralec med take pojme po predvidevanju okvirno zajame (prav ali neprav, to je zdaj vprašanje) topološke izraze *pot*, *drevo*, *zanka*. K izrazu *pot* se po nekem logičnem sklepanju poda izraz *sprehod v grafu*, drevo ima vrstno določilo *vpeto drevo*, stopnjevanje tega ali še natančnejše definiranje je *evklidsko vpeto drevo*, *relativno vpeto drevo*. Vse pridevniške zveze kažejo na nadgradnjo osnovnega termina oziroma natančnost definiranja, kar je zahteva sleherne terminologije. Laik kljub nepoznavanju opazi, da je terminološka teorija v tej pojmovni skupini zelo nazorna, da si pri oblikovanju terminov "pomaga" z "običajnimi" danostmi. Sem sodi tudi izraz *terminal* pa *tlakovec*, pri čemer se zdi, da je pri zadnjem izrazu nekoliko zanemarjena oblika, tlakovci so namreč različnih oblik. Ali pa je to termin, ki vključuje več variant, več možnosti oblike. Ampak, ali je potem še termin? V ta sklop nazornih terminov, nabrani so iz članka Magdalene Sovič Steinerjev problem s praktičnim primerom (Dianoia 2 (2018), str. 39–50), dodajmo še termin *utež* z glagolom *utežiti* (oziroma z deležnikom na -n: *uteženi* grafi), ki ga na sicer z besedjem bogatem slovaropisnem portalu Fran.si najdemo samo v etimološkem slovarju, a še tam le s kazalko na utež. Prejkone na portalu pogrešamo tudi izraz *sosednost* (*sosednost terminalov*), ki je regularna izpeljanka iz pridevnika *sosedni* in je mogoč tudi v neterminološkem jeziku.

Z omenjenimi izrazi sestavek, ki naj bi segal od kali jezikovnega dojemanja do praktičnih uporabnostnih zadreg, sporoča, kako bogato je topološko izrazje, kako metaforična pomenotvorna podlaga sili v nazornost, z na začetku omenjenimi pravorečnimi in pravopisnimi pripombami pa razkriva, v kakšnih zadregah se včasih zaloti jezikovni pregledovalec, a žal pogosto nima konzultantov. V takem primeru velja zaupanje, da ima stroka svoja pravila, da jih obvlada in z neko nenapisano tradicijo potrjuje v vsakdanji praksi, kar ji daje merodajnost in tudi potrjeno jezikovno strokovnost.



Slika 1: Proces izdaje naslednje številke revije Dianoia. Vir: lasten.

Zeemanov pojav v plamenu z natrijem

Zeeman effect in a flame containing sodium

Tjaš Esih¹, Alen Labohar¹, Jure Šantej¹, Mitja Suvajac²

1. Gimnazija Celje-Center

2. Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Univerza v Mariboru

Povzetek

V prispevku teoretično obravnavamo problem, ki je podan kot problem št. 17 na Turnirju mladih fizikov 2024 (YPT). Pojasnimo, zakaj senca za plamenom kuhinjske soli, ki ga osvetljujemo z natrijevo sijalko, zbledi, če je plamen v zunanjem magnetnem polju. V članku je predstavljena teoretična obravnava problema: atom v magnetnem polju, sklopitev spin – obhod in Zeemanov pojav.

Ključne besede: YPT, sklopitev spin-obhod, atom v magnetnem polju, Zeemanov pojav, natrijeve spektralne črte

Abstract

In this article we examine a problem published as Problem No. 17 for the Young Physicists' Tournament 2024 (YPT). Our goal is to explain why a shadow, cast by the flame of a burning table salt in front of a sodium lamp becomes lighter in the presence of a strong external field. In this article we explain our theoretical approach: an atom in a magnetic field, spin-orbit coupling and the Zeeman effect.

Key words: YPT, spin-orbit coupling, atom in a magnetic field, Zeeman effect, sodium spectral lines

1 UVOD

Turnir mladih fizikov (angl. Young Physicists' Tournament - YPT) je tekmovanje, na katerem srednješolci celostno obravnavamo 17 vnaprej razpisanih odprtih problemov. Tekmovanja se vsako leto udeležimo, saj se s tem, da zahteva tako natančno teoretično obravnavo in tudi eksperimentalne rezultate ter povezavo med njimi, kar se da približa »pravi« raziskovalni fiziki [1]. Problemi zajemajo širok spekter področij fizike, od mehanike, hidrodinamike, elektromagnetizma, optike in akustike do kvantne mehanike. V posameznem problemu se področja povezujejo v sisteme, ki so kompleksnejši za obravnavo in pogosto presegajo srednješolsko raven.

V tem članku bomo podrobneje obravnavali pristop k teoretični obravnavi problema št. 17 za leto 2024. Problem se glasi [2]:

»Če postavimo plamen s kuhinjsko soljo pred natrijevo plinsko sijalko, se na zaslonu pojavi senca. Senca postane svetlejša, če plamen postavimo v močno zunanje magnetno polje. Raziščite in razložite ta pojav.«

Problem je pritegnil našo pozornost, ker je s področja kvantne fizike, s katerim se do sedaj še nismo soočili.

2 KVALITATIVNA RAZLAGA PROBLEMA

Nizkotlačna natrijeva plinska sijalka vsebuje trden natrij, ki ga segreje in spremeni v natrijevo paro. Vzbujeni natrijevi atomi izsevajo svetlobo dveh značilnih valovnih dolžin – natrijev dublet – 589,0 nm in 589,6 nm [3]. Med svetilko in zaslon postavimo plamen, v katerega posujemo natrijevo sol. Plamen zato vsebuje natrijeve atome, ki absorbirajo svetlobo enakih valovnih dolžin, kot jo izseva natrijeva svetilka, zato na zaslonu vidimo senco plamena. Ko plamen postavimo v zunanje magnetno polje, senca postane svetlejša. Da bi pojav razumeli,

moramo raziskati, kaj se dogaja z natrijevim valenčnim elektronom, ki prehaja iz enega od dveh vzbujenih stanj $3P$ v osnovno stanje $3S$, pri čemer se izseva foton [4].

3 ATOM V ZUNANJEM MAGNETNEM POLJU

Začeli bomo s klasično analogijo. Pogledali bomo, kaj se dogaja z elektronom z maso m in nabojem e_0 , ki z obodno hitrostjo v kroži po krožnici s polmerom r . Tak elektron predstavlja tokovno zanko, po kateri teče tok $I = e_0v/2\pi r$. Magnetni moment (p_m) tokovne zanke s ploščino S je $p_m = IS$. Ob upoštevanju $S = \pi r^2$ za elektron tako dobimo $p_m = e_0vr/2$. Elektronu lahko pripišemo tudi vrtilno količino $\Gamma = mvr$. Tako magnetni moment kot vrtilna količina sta vektorja. Smer magnetnega momenta je določena s smerjo toka, ki je definiran s smerjo gibanja pozitivnih nabojev, smer vrtilne količine pa je določena s smerjo hitrosti elektrona, zato je končna zveza

$$\vec{p}_m = -\frac{e_0}{2m}\vec{\Gamma}. \quad (1)$$

Energija magnetnega dipola (W_m) v zunanem magnetnem polju z gostoto \vec{B} v smeri z je

$$W_m = -\vec{p}_m \cdot \vec{B} = -p_{m,z}B, \quad (2)$$

kjer je $p_{m,z}$ komponenta magnetnega momenta v smeri zunanjega magnetnega polja. Magnetno polje na magnetni dipol deluje z navorom (\vec{M})

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B} \quad (3)$$

in izzove precesijo vrtilne količine v ravnini, ki je pravokotna na magnetno polje.

Pri prehodu v kvantnomehansko obravnavo moramo vektor vrtilne količine $\vec{\Gamma}$ nadomestiti z operatorjem obhodne vrtilne količine \hat{L} , vektor magnetnega momenta pa nadomestimo z operatorjem obhodnega magnetnega momenta $\hat{\mu}_L$

$$\hat{\mu}_L = -\frac{e_0}{2m}\hat{L}. \quad (4)$$

Operator $\hat{\mu}_L$ je sorazmeren z operatorjem \hat{L} , torej so tudi njune lastne vrednosti sorazmerne in se razlikujejo le za koeficient $-e_0/2m$. Lastne vrednosti operatorja velikosti obhodne vrtilne količine so $L = \hbar\sqrt{l(l+1)}$, kjer je l obhodno kvantno število, \hbar pa reducirana Planckova konstanta. Torej bodo lastne vrednosti velikosti operatorja $\hat{\mu}_L$

$$\mu_L = -\mu_B\sqrt{l(l+1)}, \quad (5)$$

kjer je $\mu_B = \frac{e_0\hbar}{2m} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{Am}^2$ konstanta, imenovana Bohrov magneton.

Iz enačbe (2) ugotovimo, da potrebujemo lastne vrednosti operatorja magnetnega momenta le v smeri magnetnega polja (smer z) $\hat{\mu}_{L,z} = -\frac{e_0}{2m}\hat{L}_z$. Lastne vrednosti \hat{L}_z so $L_z = \hbar m_l$, kjer je m_l obhodno magnetno kvantno število. Torej bodo lastne vrednosti operatorja $\hat{\mu}_{L,z}$

$$\mu_{L,z} = -\mu_B m_l. \quad (6)$$

3.1 Spin in seštevanje vrtilnih količin

V prejšnjem odstavku smo govorili le o obhodni vrtilni količini, ki jo bomo v nadaljevanju označevali z $\vec{\Gamma}_0$, elektron pa ima poleg te še spinsko vrtilno količino $\vec{\Gamma}^*$ (ta sicer nima klasične analogije), ki tudi prispeva k magnetnemu momentu. Vektorsko ju seštejemo v polno vrtilno količino $\vec{\Gamma}$. V kvantnomehanski obravnavi imamo operator obhodne vrtilne količine \hat{L} in operator spina \hat{S} , ki ju seštejemo v operator polne vrtilne količine \hat{J} .

Polni magnetni moment je vsota magnetnega momenta zaradi obhodne vrtilne količine in magnetnega momenta zaradi spinske vrtilne količine. Priredimo jima operatorje v kvantni mehaniki, in sicer $\hat{\mu}_L$ za obhodni magnetni moment, ter $\hat{\mu}_S$ za spinskega. Operator polnega magnetnega momenta je $\hat{\mu} = \hat{\mu}_L + \hat{\mu}_S$. Vendar spinski magnetni moment ni sorazmeren s spinom na enak način kot obhodni z obhodno vrtilno količino. Spinsko magnetno kvantno število m_s ima le dve vrednosti $m_s = \pm 1/2$. Po enačbi (6) bi pričakovali torej lastni vrednosti z -komponente spinskega magnetnega momenta $\pm \frac{1}{2}\mu_B$, v resnici pa sta enaki $\pm \mu_B$. Pri spinu imamo torej dodaten faktor 2

$$\mu_{S,z} = -2\mu_B m_s. \quad (7)$$

Operator za spinski in obhodni magnetni moment lahko napišemo na enak način, če vpeljemo giromagnetno razmerje g , ki ima vrednosti $g_L = 1$ ter $g_S = 2$. Torej sta $\hat{\mu}_L$ in $\hat{\mu}_S$

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_L &= -g_L \frac{e_0}{2m} \hat{L}, \\ \hat{\mu}_S &= -g_S \frac{e_0}{2m} \hat{S}, \end{aligned}$$

skupni magnetni moment $\hat{\mu}$ pa potem zapišemo kot

$$\hat{\mu} = -\frac{e_0}{2m} (g_L \hat{L} + g_S \hat{S}) = -\frac{e_0}{2m} (\hat{L} + 2\hat{S}) = -\frac{e_0}{2m} (\hat{J} + \hat{S}). \quad (8)$$

3.2 Sklopitev spin-obhod

Vrnimo se h klasični analogiji. Najprej obravnavajmo primer brez zunanega magnetnega polja. Ker na elektron ne deluje noben zunanji navor, je njegov vektor polne vrtilne količine konstanten. Ker pa elektron kroži v električnem polju protona, ustvarja notranje magnetno polje, ki povzroča navor na spinski magnetni moment in ga sili v precesijo okoli polne vrtilne količine. Sklopitev spin-obhod povezuje obhodno in spinsko vrtilno količino, da skupaj precesirata okoli polne vrtilne količine z isto kotno hitrostjo. Njuni velikosti ostajata konstantni, njuni smeri pa se spreminjata, zato si predstavljamo, da sta togo povezani.

Prav tako polni magnetni moment

$$\vec{p}_m = -\frac{e_0}{2m}(\vec{\Gamma}_0 + 2\vec{\Gamma}^*) = -\frac{e_0}{2m}(\vec{\Gamma} + \vec{\Gamma}^*) \quad (9)$$

precedira okoli osi polne vrtilne količine z isto kotno hitrostjo, saj z njo zaradi različnih giromagnetnih razmerij ni vzporeden. Zato ni konstanten vektor, konstantna pa je velikost njegove komponente v smeri osi polne vrtilne količine

$$\vec{p}_m \cdot \frac{\vec{\Gamma}}{\Gamma} = -\frac{e_0}{2m}(\vec{\Gamma} + \vec{\Gamma}^*) \cdot \frac{\vec{\Gamma}}{\Gamma} \quad (10)$$

Zdaj moramo vključiti še zunanje magnetno polje. V zunanjem magnetnem polju precedira tudi polna vrtilna količina, in sicer okoli smeri magnetnega polja (smer z). Tukaj se spreminja smer vektorja polne vrtilne količine, njegova velikost in z -komponenta pa sta konstantni. V nasprotju s primerom, kjer je zunanje magnetno polje enako nič, pa sedaj z -komponenta vektorja polnega magnetnega momenta zaradi dvojne precesije ni več konstantna in moramo izračunati njeno efektivno vrednost ($p_{m,z,ef}$). V ta namen vektor polnega magnetnega momenta najprej projiciramo na os polne vrtilne količine (enačba (10)), nato pa še na z -os (smer magnetnega polja). Pri tem mora biti izpolnjen pogoj, da je kotna hitrost precesije vektorja polnega magnetnega momenta okoli osi polne vrtilne količine, ki je sorazmerna z gostoto notranjega magnetnega polja, precej manjša od kotne hitrosti precesije vektorja polne vrtilne količine okoli z -osi, ki pa je sorazmerna z gostoto zunanjega magnetnega polja. To pomeni, da je postopek veljaven, če je notranje magnetno polje precej večje od zunanjega. Gostota notranjega magnetnega polja v natrijevem atomu, ki ga za naš eksperiment obravnavamo, je približno 18 T [5]. Takšnih gostot pri poskusu ne bomo dosegli, zato je naš postopek ustrezen. Enačbo (10) moramo torej pomnožiti s kosinusom kota (θ) med vektorjem polne vrtilne količine in smerjo magnetnega polja $\cos(\theta) = \Gamma_z/\Gamma$:

$$p_{m,z,ef} = \left(\vec{p}_m \cdot \frac{\vec{\Gamma}}{\Gamma}\right) \frac{\Gamma_z}{\Gamma} = -\frac{e_0}{2m} \frac{\Gamma_z \vec{\Gamma} \cdot (\vec{\Gamma} + \vec{\Gamma}^*)}{\Gamma^2} = -\frac{e_0}{2m} \frac{\Gamma_z (\vec{\Gamma}^2 + \vec{\Gamma} \cdot \vec{\Gamma}^*)}{\Gamma^2} \quad (11)$$

Pri prehodu v kvantnomehanski zapis ugotovimo, da potrebujemo operator, ki pripada skalarnemu produktu vektorjev polne in spinske vrtilne količine. Kvadriramo zvezo $\hat{L} = \hat{J} - \hat{S}$ in dobimo $\hat{J} \cdot \hat{S} = \frac{1}{2}(\hat{J}^2 - \hat{L}^2 + \hat{S}^2)$. Zdaj imamo vse potrebno, da napišemo operator efektivnega polnega magnetnega momenta v smeri magnetnega polja:

$$\hat{\mu}_{z,ef} = -\frac{e_0}{2m} \frac{\hat{J}_z \left(\hat{J}^2 + \frac{1}{2}(\hat{J}^2 - \hat{L}^2 + \hat{S}^2) \right)}{\hat{J}^2} = -\frac{e_0}{2m} \frac{\hat{J}_z (3\hat{J}^2 - \hat{L}^2 + \hat{S}^2)}{2\hat{J}^2} \quad (12)$$

Lastne vrednosti velikosti operatorja polne vrtilne količine so $J = \hbar\sqrt{j(j+1)}$, operatorja \hat{J}_z pa $J_z = \hbar m_j$. Pri tem je j kvantno število polne vrtilne količine in m_j magnetno kvantno število polne vrtilne količine. Vrednosti j so omejene z velikostmi obhodnega in spinskega kvantnega števila na $l - s \leq j \leq l + s$.

Lastne vrednosti obhodne, spinske in polne vrtilne količine vstavimo v enačbo (12) in dobimo laste vrednosti operatorja $\hat{\mu}_{z,ef}$

$$\mu_{z,ef} = -\frac{e_0}{2m} m_j \hbar \frac{3j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)} = -\mu_B m_j g_{lj}, \quad (13)$$

kjer je g_{lj} Landéjevo giromagnetno razmerje, ki pri vrednosti $s = 1/2$ znaša

$$g_{lj s=\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} - \frac{l(l+1)-3/4}{2j(j+1)}.$$

Magnetna energija atoma v šibkem zunanjem magnetnem polju je torej

$$W_m = -\mu_{z,ef}B = \mu_B m_j g_{lj} B. \quad (14)$$

Če ni zunanjega magnetnega polja, so atomi natrija v plamenu vzbujeni v stanjih $3P_{3/2}$ in $3P_{1/2}$, kjer številka 3 pomeni glavno kvatno število, P je orbitala z $l = 1, 3/2$ in $1/2$ pa predstavljata vrednosti j . Zaradi notranjega polja in sklopitve spin–obhod se energija stanj $3P_{3/2}$ in $3P_{1/2}$ nekoliko razlikuje, zato se pri prehodu v osnovno stanje $3S_{1/2}$ izseva valovanje dveh različnih valovnih dolžin – natrijev dublet. Če so vzbujeni atomi natrija v magnetnem polju, pa se tako vzbujeni stanji kot osnovno stanje razcepijo na več stanj, energijsko razliko glede na nerazcepljena stanja podaja enačba (14), kar imenujemo Zeemanov pojav, ki ga podrobneje obravnavamo v nadaljevanju.

3.3 Zeemanov pojav

V zgornjem odstavku smo pojasnili, zakaj se v zunanjem magnetnem polju stanja, ki so brez magnetnega polja degenerirana (imajo enako energijo), razcepijo na več stanj, kar je vzrok za več možnih prehodov v osnovno stanje. Pri tem pa se izseva svetloba drugačnih valovnih dolžin, kot če magnetnega polja ne bi bilo.

Frekvenca izsevane svetlobe pri prehodu med dvema energijskima nivojema je $\nu = (W - W')/h$, kjer je W energija višjega, W' pa energija nižjega energijskega nivoja. Če energijo zapišemo kot kombinacijo energije nivoja brez magnetnega polja (W_0) in prispevka magnetnega polja (W_m) ter upoštevamo enačbo (14), dobimo

$$\nu = \nu_0 + (m_j g_{lj} - m'_j g'_{lj}) \nu_B, \quad (15)$$

kjer je $\nu_0 = (W_0 - W'_0)/h$ frekvenca izsevane svetlobe brez zunanjega magnetnega polja, $\nu_B = \mu_B B/h$ pa referenčna frekvenca, ki smo jo definirali za preglednejši zapis. Vsa možna stanja $3P$ in $3S$ so podana v preglednici 1.

Preglednica 1: Vsa $3P$ in $3S$ stanja; n je glavno in l obhodno tirno kvantno število, j je kvantno število polne vrtilne količine in m_j magnetno kvantno število polne vrtilne količine.

3	1 (P)	3/2	3/2
			1/2
			-1/2
			-3/2
	1/2	1/2	
		-1/2	
	0 (S)	1/2	1/2
-1/2			

n	l	j	m_j
-----	-----	-----	-------

Pri nadaljnji obravnavi prehodov moramo upoštevati izbirna pravila. Možni so samo prehodi, pri katerih velja

$$\begin{aligned} l - l' &= \pm 1 \\ j - j' &= \pm 1, 0 \\ m_j - m_j' &= \pm 1, 0. \end{aligned}$$

Torej so mogoči sledeči prehodi s pripadajočimi frekvencami izsevane svetlobe:

$$\begin{aligned} 3P_{3/2}m_j = \mp \frac{1}{2} &\rightarrow 3S_{1/2}m_j = \mp \frac{1}{2} & \nu &= \nu_1 \pm \frac{1}{3}\nu_B, \\ 3P_{3/2}m_j = \pm \frac{3}{2} &\rightarrow 3S_{1/2}m_j = \pm \frac{1}{2} & \nu &= \nu_1 \pm \nu_B, \\ 3P_{3/2}m_j = \pm \frac{1}{2} &\rightarrow 3S_{1/2}m_j = \mp \frac{1}{2} & \nu &= \nu_1 \pm \frac{5}{3}\nu_B, \\ 3P_{1/2}m_j = \mp \frac{1}{2} &\rightarrow 3S_{1/2}m_j = \mp \frac{1}{2} & \nu &= \nu_2 \pm \frac{2}{3}\nu_B, \\ 3P_{1/2}m_j = \pm \frac{1}{2} &\rightarrow 3S_{1/2}m_j = \mp \frac{1}{2} & \nu &= \nu_2 \pm \frac{4}{3}\nu_B, \end{aligned} \quad (16)$$

kjer sta $\nu_1 = 509,0$ THz in $\nu_2 = 508,5$ THz frekvenci svetlobe natrijevega dubleta, ki se izseva, ko atom ni v zunanem magnetnem polju. Vidimo, da se dve spektralni črti razcepita na deset spektralnih črt.

4 POVEZAVA TEORIJE S PROBLEMOM

Vrnimo se nazaj na obravnavani problem. Najprej pojasnimo, zakaj na zaslonu opazimo senco plamena, če plamen, ki ga posujemo s kuhinjsko soljo, postavimo med natrijevo plinsko sijalko in zaslon. Natrijeva svetilka izseva svetlobo z značilnima frekvencama ν_1 in ν_2 , natrijevi atomi v plamenu pa jo absorbirajo in nato izsevajo v vse smeri. Torej v primerjavi s stanjem, ko je zaslon osvetljen zgolj z natrijevo svetilko, na zaslon vpade manj svetlobe, zato na zaslonu vidimo senco plamena.

Če plamen postavimo v zunanje magnetno polje, pa senca postane svetlejša, saj natrijeva svetilka še vedno izseva svetlobo enakih valovnih dolžin, natrijevi atomi v plamenu pa je ne bodo več absorbirali, saj so se njihova energijska stanja razcepila. Iz sklopa enačb (16) je razvidno, da nobena izmed frekvenc ν ni več enaka ν_1 ali ν_2 , ampak se vse spremenijo za nek delež frekvence ν_B , katere velikost je odvisna od gostote magnetnega polja.

Zavedati se moramo tudi, da imajo spektralne črte končno frekvenčno širino (izsevana svetloba ni monokromatska). V vročih plinih zaradi visokih hitrosti atomov prevladuje Dopplerjeva širitev spektralnih črt, ki je posledica Dopplerjevega premika frekvenc zaradi gibanja atomov. Polna širina natrijevih spektralnih črt, merjena pri frekvenci, kjer je intenziteta izsevane svetlobe za polovico manjša kot pri centralni frekvenci ($\nu_{1/2}$), je [6]

$$\nu_{1/2} = 9,8 \text{ MHz} \approx 10^7 \text{ Hz.}$$

Velikost frekvenčnega premika je nekaj $\frac{1}{3} \nu_B$ (glej enačbo (16)) in je pri magnetnem polju z gostoto 10 mT

$$\frac{1}{3} \nu_B = 140 \text{ MHz} \approx 10^8 \text{ Hz.}$$

Vidimo, da je frekvenčni premik spektralne črte v relativno šibkem magnetnem polju z gostoto 10 mT za en velikostni red večji od frekvenčne širine posamezne črte. V opisu danega problema je navedeno, da se osredotočamo predvsem na močnejša magnetna polja, v laboratoriju pa lahko s tuljavo ustvarimo magnetno polje z gostoto do približno 1 T, kar pomeni, da bo premik za tri velikostne rede večji od širine, torej se nam ni treba ukvarjati s prekrivanjem črt, saj bodo dovolj daleč narazen. Povemo pa lahko, da bomo pojav opazili le, če bo gostota magnetnega polja večja od približno 1 mT, saj drugače še vedno pride do delne absorpcije svetlobe iz natrijeve svetilke, ker se razcepljeni nivoji še delno prekrivajo z nerazcepljenimi.

Kot zanimivost še pogledjmo, kolikšne so širine spektralnih vrhov v enotah valovne dolžine. Diferenciramo zvezo med valovno dolžino in frekvenco valovanja $\lambda = c/\nu$, kjer je c hitrost svetlobe, in dobimo

$$d\lambda = -\frac{c}{\nu^2} d\nu = -\frac{\lambda^2}{c} d\nu, \quad (17)$$

od koder sledi

$$\lambda_{1/2} = \frac{\lambda^2}{c} \nu_{1/2} = 11,4 \text{ fm,}$$

kjer je vseeno, katero vrednost $\lambda = 589,0 \text{ nm}$ ali $\lambda = 589,6 \text{ nm}$ vstavimo za valovno dolžino. Uporabimo enačbo (17) še za izračun karakteristične razlike valovnih dolžin pri razcepu v magnetnem polju in dobimo:

$$\frac{1}{3} \lambda_B = 16,3 \text{ pm.}$$

Vidimo, da torej z relativno preprostim poskusom lahko pokažemo spremembe, ki se dogodijo zaradi sprememb valovnih dolžin svetlobe, ki so manjše od dimenzije atoma.

5 ZAKLJUČEK

Teoretično smo razložili, zakaj senca plamena, ki ga posujemo s kuhinjsko soljo, zbledi, če plamen postavimo v magnetno polje, osvetljujemo pa ga s svetlobo, ki jo izseva natrijeva sijalka. Vzrok tiči v razcepu energijskih stanj natrija v zunanjem magnetnem polju, zato natrijevi atomi v plamenu več ne absorbirajo svetlobe iz natrijeve sijalke. Pojav opazimo že v šibkem magnetnem polju, ki pa mora biti dovolj veliko, da je razcep večji od spektralne širine črt. Prav tako smo teoretično pojasnili, zakaj se svetlost sence z večanjem gostote magnetnega polja ne spreminja, saj je pomembno le, da se spektralne črte plamena in natrijeve svetilke ne prekrivajo več. Pri eksperimentu bo morda še vedno opazna manjša senca zaradi prisotnosti drugih plinov, česar pa v tem prispevku nismo obravnavali.

Zahvala

Iskrena zahvala prof. Borutu Namestniku in prof. dr. Nataši Vaupotič za vso podporo, razlago in pomoč pri pripravi na tekmovanje.

Literatura

- [1] Faletič, S. (2018). Kaj pa en YPT v razredu?. *Fizika v šoli*, 23(1), 2-9; Pridobljeno: 28. 2. 2024;
- [2] [<https://www.iypt.org/problems/problems-iypt-2024/>], 28. 2. 2024;
- [3] [https://sl.wikipedia.org/wiki/Natrijeva_svetilka], 10. 3. 2024;
- [4] Strnad (2005). *Fizika. Del 3, Posebna teorija relativnosti, kvantna fizika, atomi – atom v magnetnem polju* (str. 199-224). Ljubljana: DMFA – založništvo;
- [5] <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/quantum/sodzee.html>, 18. 3. 2024;
- [6] Daniel A. Steck, Sodium D Line Data, available online at <http://steck.us/alkalidata> (revision 2.3.2, 10 September 2023).

Zhang-Zhangov polinom in polinom kock

The Zhang-Zhang polynomial and the cube polynomial

Niko Tratnik

Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Koroška cesta 160, Maribor, Slovenija
Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko, Jadranska ulica 19, Ljubljana, Slovenija

Povzetek

Zhang-Zhangov polinom benzenoidnega grafa je namenjen štetju Clarovih pokritij, ki so vpeti podgrafi, sestavljeni samo iz šestkotnikov (ki predstavljajo aromatske sextete) in povezav. Po drugi strani polinom kock nekega grafa G šteje hiperkocke, ki so inducirani podgrafi v G . Nadalje, resonančni graf modelira interakcije med različnimi Kekuléjevimi strukturami danega benzenoidnega grafa. V tem članku predstavimo vse zgoraj omenjene koncepte in razložimo povezavo med Zhang-Zhangovim polinomom benzenoidnega grafa G in med polinomom kock resonančnega grafa od G .

Ključne besede: benzenoidni graf, Clarovo pokritje, Zhang-Zhangov polinom, resonančni graf, polinom kock.

Abstract

The Zhang-Zhang polynomial of a benzenoid graph is a polynomial used to count Clar covers, which are spanning subgraphs composed of hexagons (representing aromatic sextets) and edges. On the other hand, the cube polynomial of any graph G counts hypercubes that are induced subgraphs of G . Moreover, the resonance graph models interactions between different Kekulé structures in a given benzenoid graph. In this paper, we introduce the above mentioned concepts and explain the relation between the Zhang-Zhang polynomial of a benzenoid graph G and the cube polynomial of the resonance graph of G .

Key words: benzenoid graph, Clar cover, Zhang-Zhang polynomial, resonance graph, cube polynomial.

1 Uvod

Teorija grafov je področje matematike, ki ima številne aplikacije v kemiji, družboslovnih vedah, fiziki, prometu, ekonomiji, računalništvu, itd. V tem članku bomo obravnavali uporabo teorije grafov v kemiji. Področje matematike, ki se ukvarja s takšnimi temami, se imenuje *kemijska teorija grafov* [7, 14].

V naslednjem poglavju je podanih nekaj osnovnih definicij iz teorije grafov, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju. V poglavju 3 predstavimo benzenoidne ogljikovodike ter njihove molekularne grafe, ki jih imenujemo benzenoidni grafi. V poglavju 4 nato obravnavamo Kekuléjeve strukture, ki predstavljajo različne postavitve dvojnih vezi v molekuli in s tem nudijo določen vpogled v razporeditev π -elektronov. Pojasnimo tudi, da vsaka Kekuléjeva struktura molekule ustreza enemu popolnemu prirejanju molekularnega grafa. V poglavju 5 opišemo Clarova pokritja in definiramo Zhang-Zhangov polinom, ki je namenjen štetju teh pokritij. Resonančne grafe benzenoidnih grafov nato vpeljemo v poglavju 6. Poglavje 7 je namenjeno hiperkockam in polinomu kock, ki šteje inducirane hiperkocke v

nekem poljubnem grafu. V zadnjem poglavju pokažemo, da je za poljuben benzenoidni graf, ki ima popolno prirejanje, njegov Zhang-Zhangov polinom enak polinomu kock resonančnega grafa danega benzenoidnega grafa. Pri tem se osredotočimo na osnovno idejo dokaza, saj celoten dokaz vsebuje veliko dodatnih podrobnosti. Omeniti je treba, da je bil ta rezultat prvič dokazan v članku [17], njegove posplošitve na druge družine kemijskih grafov pa so bile obravnavane tudi v člankih [1, 13] in v magistrskem delu [11].

2 Osnovni pojmi teorije grafov

V tem poglavju bomo predstavili nekaj osnovnih definicij iz teorije grafov, več informacij pa lahko najdemo v knjigi [15].

Graf $G = (V(G), E(G))$ je urejen par množice *vozlišč* $V(G)$ in množice *povezav* $E(G)$. Množica vozlišč je lahko poljubna neprazna končna množica, množica povezav pa je sestavljena iz neurejenih parov vozlišč (vsak neurejen par je sestavljen iz dveh različnih vozlišč). Povezave običajno označujemo kot $e = uv$, kjer sta $u, v \in V(G)$ vozlišči grafa. V takem primeru pravimo, da sta vozlišči u in v *sosednji* ter ju imenujemo *krajišči* povezave e . Rečemo tudi, da je vozlišče u *sosed* od vozlišča v (in obratno). Opomnimo, da vozlišča rišemo kot točke, povezave pa kot črte med vozlišči.

Naj bosta G in H grafa. Če velja $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$, pravimo, da je graf H *podgraf* grafa G .

Naj bo G graf in H njegov podgraf. Če je $V(H) = V(G)$, pravimo, da je H *vpeti podgraf* grafa G . Po drugi strani je graf H *inducirani podgraf* grafa G , če za poljubni vozlišči $u, v \in V(H)$ velja naslednja implikacija: če je $uv \in E(G)$, potem je $uv \in E(H)$.

Pot v grafu G med vozliščema v_1 in v_n je zaporedje povezav $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_{n-1}v_n$, pri čemer so vozlišča v_1, \dots, v_n paroma različna.

Graf G je *povezan*, če za poljubni vozlišči u in v obstaja pot med u in v . Če graf ni povezan, je *nepovezan*. Vsak maksimalni povezan podgraf grafa G imenujemo *povezana komponenta* grafa G .

Naj bo $n \geq 3$. *Cikel* dolžine n , ki ga označimo s C_n , je graf, podan z množico vozlišč $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ in množico povezav $E(C_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$, pri čemer so vozlišča v_1, \dots, v_n paroma različna. Nadalje, za $n \geq 1$ bomo s K_n označevali *polni graf* na n vozliščih, to je graf, v katerem sta vsaki dve različni vozlišči tudi sosednji.

Graf G je *ravninski*, če ga lahko narišemo v ravnini tako, da se nobeni dve povezavi ne sekata (razen v ustreznih vozliščih). Taka slika se imenuje *ravninska vložitev* grafa G . Ravninska vložitev grafa G razdeli ravnino na območja, ki jih imenujemo *lica* grafa G . Eno od lic je neomejeno in ga imenujemo *zunanje lice*, ostala lica so *notranja*.

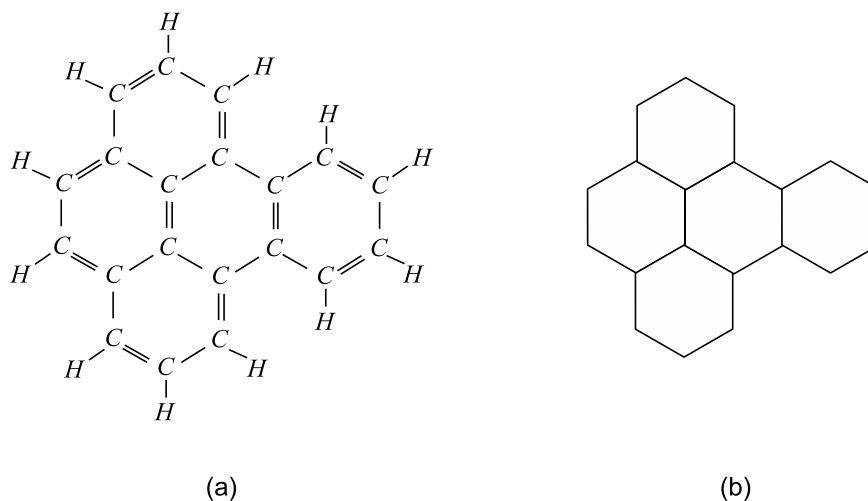
Naj bosta G in H grafa. Preslikava $f : V(G) \rightarrow V(H)$ je *izomorfizem* grafov G in H , če je f bijekcija in za vsak par vozlišč $u, v \in V(G)$ velja, da je $uv \in E(G)$ natanko tedaj, ko je $f(u)f(v) \in E(H)$. Tedaj pravimo, da sta grafa G in H *izomorfna*. Preprosto povedano bi lahko rekli, da imata izomorfna grafa enako strukturo (vozlišča enega grafa lahko preslikamo na vozlišča drugega grafa tako, da se povezave ohranijo).

3 Benzenoidni ogljikovodiki in benzenoidni grafi

Kot smo že nakazali, kemijska teorija grafov običajno obravnava grafe, ki predstavljajo neke molekule. Na takšnih grafih lahko nato proučujemo razne matematične koncepte, ki so uporabni v kemiji. Na podlagi dane molekule namreč lahko tvorimo graf na naslednji način: vozlišča grafa so (nekateri) atomi dane molekule, pri tem je med dvema vozliščema

v grafu povezava natanko takrat, ko med ustreznima atomoma obstaja vez. Tako dobljen graf se imenuje *kemijski graf* ali tudi *molekularni graf*.

V članku se bomo osredotočili na kemijske grafe benzenoidnih ogljikovodikov, ki so policiklični ogljikovodiki, sestavljeni samo iz benzenovih obročev. Osnovna komponenta teh molekul je torej benzen C_6H_6 , molekule pa vsebujejo enega ali več takih obročev, ki so povezani med seboj. Če iz molekule benzenoidnega ogljikovodika tvorimo molekularni graf in pri tem zanemarimo vodikove atome, dobimo tako imenovani benzenoidni graf. Slika 1 prikazuje benzenoidni ogljikovodik benzo[e]piren in njegov benzenoidni graf. Opomnimo, da za benzenoidni graf velikokrat uporabljamo kar enako ime kot za ustrezno molekulo. Dogovorimo se tudi, da pri benzenoidnih grafih vozlišč ne bomo označevali z debelimi pikami (kot je to običajno), saj so vozlišča vedno oglišča pravih šestkotnikov, s pomočjo katerih rišemo te grafe. Več informacij o benzenoidnih grafih lahko najdemo v knjigi [7], obravnavani pa so bili že v člankih [10, 12].



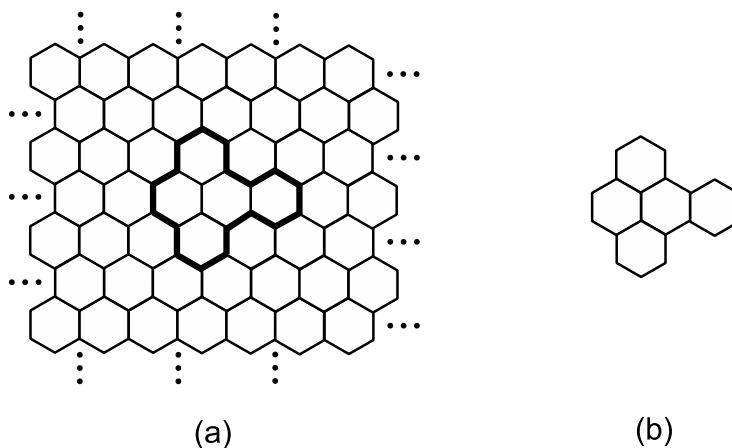
Slika 1: (a) Strukturna formula benzo[e]pirena in (b) njegov molekularni graf.

V matematiki omenjene grafe formalno definiramo tako, da v neskončni in pravilni šestkotni mreži najprej izberemo poljuben cikel C . *Benzenoidni graf* je nato določen z vsemi vozlišči in povezavami, ki ležijo na ciklu C ali v njegovi notranjosti, glej sliko 2. Poljubnemu notranjemu licu benzenoidnega grafa bomo preprosto rekli kar *šestkotnik*.

4 Popolna prirejanja in Kekuléjeve strukture

Podmnožica povezav M grafa G je *prirejanje*, če nobeni dve različni povezavi iz M nimata skupnega krajišča. Prirejanje M grafa G se imenuje *popolno prirejanje*, če je vsako vozlišče grafa G tudi krajišče kake povezave iz M .

Popolno prirejanje je torej takšna množica povezav, ki pokrije vsa vozlišča grafa, pri tem pa nobeni dve povezavi ne smeta imeti skupnega krajišča. Popolna prirejanja molekularnega grafa imajo poseben pomen v kemiji, saj predstavljajo Kekuléjeve strukture, ki modelirajo različne postavitve dvojnih vezi v molekuli. Pri tem moramo opomniti, da razporeditev π -elektronov v benzenoidnem ogljikovodiku ni pravilno prikazana z nobeno konkretno razporeditvijo dvojnih vezi oziroma Kekuléjevo strukturo. Vseeno pa nam Kekuléjeve strukture ponudijo direkten vpogled v elektronsko strukturo benzenoidnih ogli-



Slika 2: (a) Šestkotna mreža s ciklom C in (b) ustrezní benzenoidni graf.

kovodikov [7].

Naj bo G benzenoidni graf benzo[e]pirena, ki je prikazan na slikah 1(b) in 2(b). Slika 3 prikazuje vsa popolna prirejanja (oziroma Kekuléjeve strukture) grafa G . Povezave, ki so v popolnem prirejanju, so označene z dvojno povezavo.

Opazimo torej, da lahko ima nek graf več popolnih prirejanj. Po drugi strani pa obstajajo grafi, ki sploh nimajo popolnega prirejanja. Takšni so na primer grafi z lihým številom vozlišč, za katere popolno prirejanje očitno ne more obstajati.

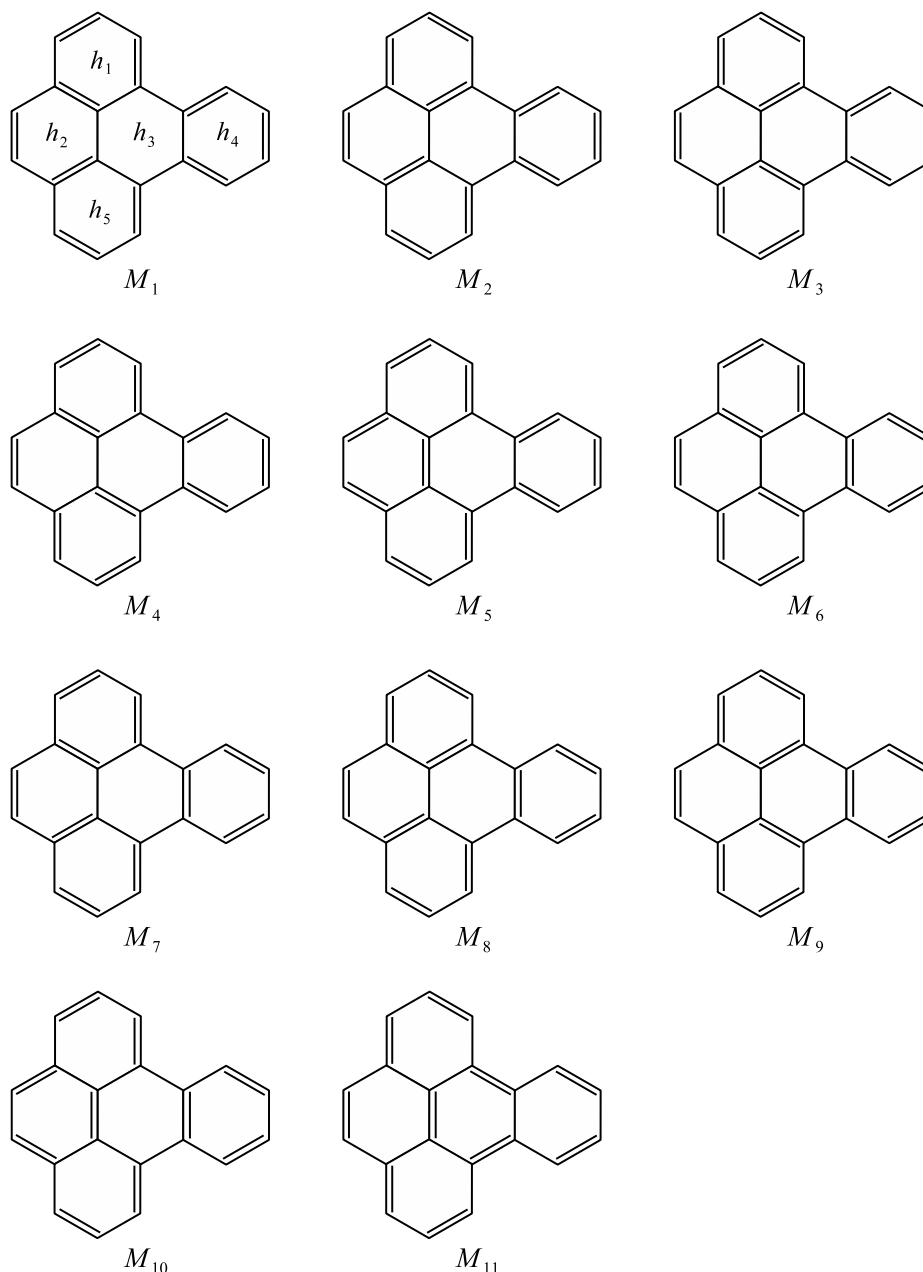
5 Clarova pokritja in Zhang-Zhangov polinom

Clarova teorija aromatskih šestetov [3] je v kemiji teorija, ki je tesno povezana s konceptom Kekuléjevih struktur. Kadar se znotraj istega šestkotnika nahajajo tri dvojne povezave Kekuléjeve strukture, lahko namesto teh treh dvojnih povezav v pokritje vzamemo celoten šestkotnik (tako imenovani aromatski šestet, ki ga ponazorimo s krogom znotraj šestkotnika). V skladu s Clarovo teorijo sta kitajska matematika H. Zhang in F. Zhang leta 1996 predstavila koncept Clarovih pokritij [18]. Oglejmo si definicijo.

Definicija 5.1. Naj bo G benzenoidni graf. Vpeti podgraf C grafa G se imenuje *Clarovo pokritje*, če je vsaka povezana komponenta od C bodisi cikel C_6 bodisi polni graf K_2 .

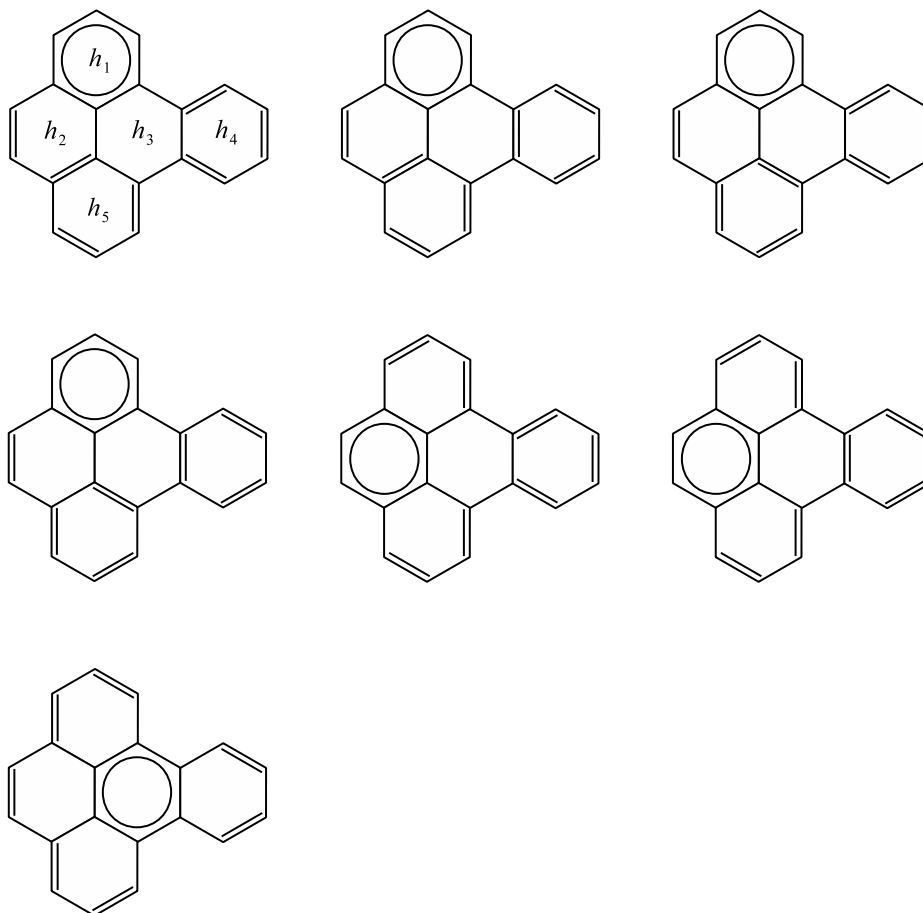
Opazimo, da vsaka povezana komponenta Clarovega pokritja, ki je cikel C_6 , predstavlja natanko en šestkotnik (oziroma aromatski šestet) benzenoidnega grafa. Po drugi strani pa vsaka komponenta K_2 predstavlja neko povezavo benzenoidnega grafa. V nadaljevanju bomo zato rekli, da je Clarovo pokritje sestavljeno iz šestkotnikov in povezav. Ugotovimo tudi, da vsako vozlišče grafa pripada bodisi natanko enemu šestkotniku bodisi natanko eni povezavi nekega Clarovega pokritja. Posledično sledi, da Clarovo pokritje brez šestkotnikov ustreza natanko enemu popolnemu prirejanju danega benzenoidnega grafa, zato so Clarova pokritja na nek način posplošitev popolnih prirejanj. Očitno velja tudi, da šestkotniki v Clarovem pokritju nimajo nobenih skupnih vozlišč.

Opomnimo še, da bomo na slikah Clarova pokritja risali na naslednji način: v šestkotnikih, ki pripadajo Clarovemu pokritju, bomo narisali krog, povezave Clarovega pokritja pa bomo označili z dvojnimi povezavami.

Slika 3: Vsa popolna prirejanja benzenoidnega grafa G .

Naj G ponovno predstavlja benzenoidni graf benzo[*e*]pirena. Kot smo omenili zgoraj, Clarova pokritja brez šestkotnikov sovpadajo s popolnimi prirejanji, zato slika 3 prikazuje tudi vseh 11 Clarovih pokritij grafa G , ki ne vsebujejo šestkotnikov. Po drugi strani na sliki 4 vidimo nekatera Clarova pokritja grafa G , ki vsebujejo natanko en šestkotnik. Natančneje, prikazana so vsa štiri Clarova pokritja z enim šestkotnikom, ki vsebujejo šestkotnik h_1 , obe Clarovi pokritji z enim šestkotnikom, ki vsebujeta šestkotnik h_2 , in edino Clarovo pokritje z enim šestkotnikom, ki vsebuje šestkotnik h_3 . Vsak se lahko sam prepriča, da obstajajo še štiri Clarova pokritja z enim šestkotnikom, ki vsebujejo šestkotnik h_5 , in pet Clarovih pokritij z enim šestkotnikom, ki vsebujejo šestkotnik h_4 .

Nadalje, slika 5 prikazuje vseh sedem Clarovih pokritij benzenoidnega grafa G z na-



Slika 4: Nekatera Clarova pokritja benzenoidnega grafa G z enim šestkotnikom.

tanko dvema šestkotnikoma in edino Clarovo pokritje s tremi šestkotniki. Zlahka vidimo, da ne obstajajo Clarova pokritja grafa G , ki bi vsebovala več kot tri šestkotnike.

Kot zanimivost povejmo še, da se največje možno število šestkotnikov v Clarovem pokritju benzenoidnega grafa G (glede na vsa Clarova pokritja tega grafa) imenuje *Clarovo število* grafa G [9]. Po Clarovi teoriji so najpomembnejše tiste Clarove strukture (oziroma ustrezne Kekuléjeve strukture), v katerih je število aromatskih sekstetov enako Clarovemu številu. Opazimo, da ima graf G iz našega primera Clarovo število 3.

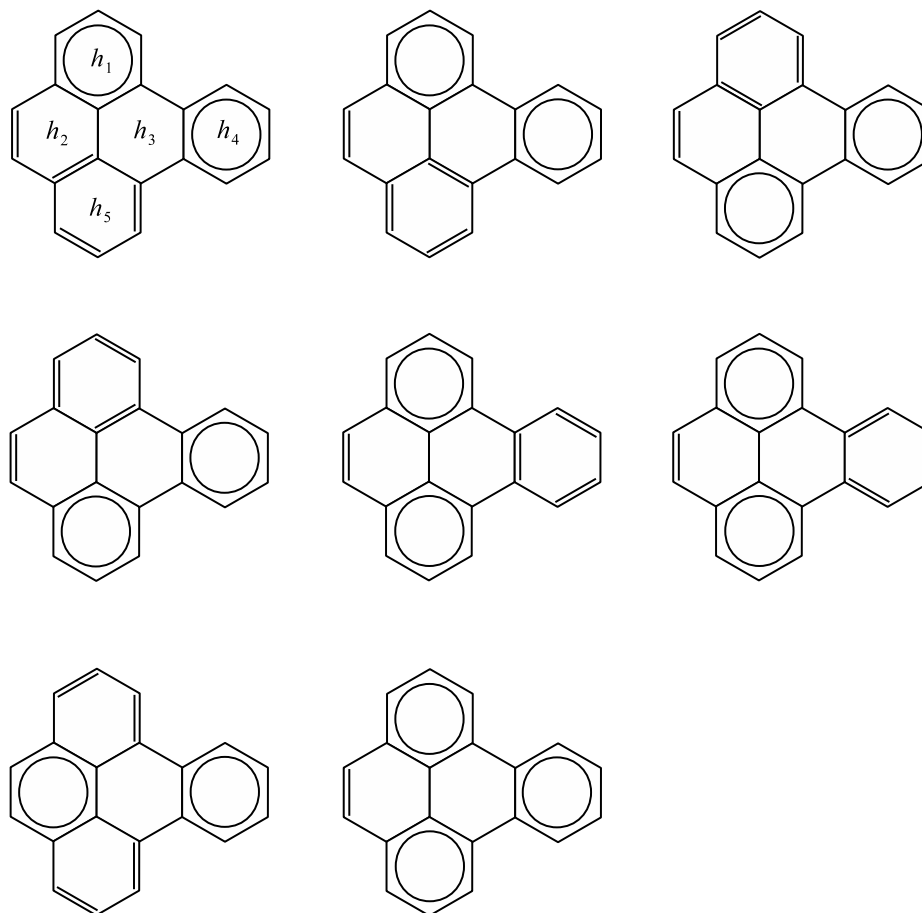
Na koncu poglavja predstavimo še Zhang-Zhangov polinom benzenoidnega grafa, ki je bil prav tako kot Clarova pokritja vpeljan leta 1996 v članku [18]. Zhang-Zhangov polinom, ki je sicer znan tudi kot *polinom Clarovih pokritij*, je namenjen štetju Clarovih pokritij benzenoidnega grafa. Zapišimo definicijo.

Definicija 5.2. Zhang-Zhangov polinom benzenoidnega grafa G , ki ga bomo označevali z $ZZ(G; x)$, je definiran na naslednji način:

$$ZZ(G; x) = \sum_{n \geq 0} z(G, n) x^n,$$

kjer $z(G, n)$ označuje število Clarovih pokritij grafa G z natanko n šestkotniki.

Vsoto v zgornji definiciji smo sicer zapisali po vseh nenegativnih celih številih n , vendar opazimo, da so od nekod naprej vsa števila $z(G, n)$ enaka 0, kar pomeni, da je vsota



Slika 5: Vsa Clarova pokritja benzenoidnega grafa G z dvema ali tremi šestkotniki.

vedno končna. Natančneje, zapisali bi lahko tudi

$$ZZ(G; x) = \sum_{n=0}^{Cl(G)} z(G, n)x^n,$$

kjer $Cl(G)$ označuje Clarovo število grafa G . Opazimo, da je stopnja Zhang-Zhangovega polinoma kar enaka Clarovemu številu.

Prav tako je očitno, da je prosti člen $z(G, 0)$, ki predstavlja število Clarovih pokritij brez šestkotnikov, enak številu popolnih prirejanj grafa G . Kot zanimivost omenimo, da število $z(G, 1)$ imenujemo *prvo Herndonovo število* grafa G . Posledično lahko torej iz Zhang-Zhangovega polinoma hitro razberemo nekaj pomembnih števil danega benzenoidnega grafa. Dodajmo še, da so v članku [5] pokazali povezavo med Zhang-Zhangovim polinomom in topološko resonančno energijo. V številnih člankih so obravnavali tudi matematične lastnosti tega polinoma, glej na primer [8].

Naj sedaj G ponovno označuje benzenoidni graf benzo[e]pirena. Kot smo ugotovili že prej, ima G skupno 11 popolnih prirejanj, 16 Clarovih pokritij z enim šestkotnikom, 7 Clarovih pokritij z dvema šestkotnikoma in 1 Clarovo pokritje s tremi šestkotniki. Zhang-Zhangov polinom grafa G je torej

$$ZZ(G; x) = 11 + 16x + 7x^2 + x^3.$$

6 Resonančni grafi

Motivacija za vpeljavo resonančnega grafa benzenoidnega grafa izhaja iz kemije. Osnovna ideja je naslednja: v primeru, da se dve Kekuléjevi strukturi benzenoidnega ogljikovodika razlikujeta v dvojnih vezeh natanko enega obroča, potem med njima nastopi določena interakcija. To želimo opisati s pomočjo grafa, v katerem so vozlišča ravno Kekuléjeve strukture oziroma popolna prirejanja. Resonančni graf so za benzenoidne grafe neodvisno vpeljali tako kemiki (W. Gründler [6], S. El-Basil [4]) kot tudi matematiki F. Zhang, X. Guo in R. Chen [16] (pod imenom *Z-transformirani graf*).

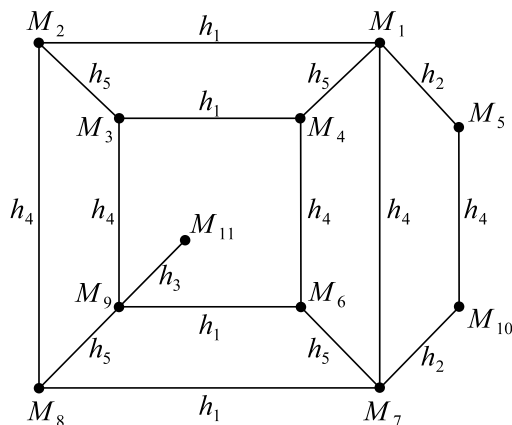
Potrebovali bomo še naslednji pojem: *simetrična razlika* množic A in B je definirana kot množica $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Sedaj lahko zapišemo formalno definicijo resonančnega grafa.

Definicija 6.1. Naj bo G benzenoidni graf, ki ima vsaj eno popolno prirejanje. *Resonančni graf* $R(G)$ benzenoidnega grafa G je graf, za katerega je množica vozlišč enaka množici vseh popolnih prirejanj grafa G , dve vozlišči (oziroma dve popolni prirejanji) M_1 in M_2 pa sta sosednji natanko tedaj, ko so v njihuni simetrični razliki $M_1 \oplus M_2$ povezave natanko enega šestkotnika benzenoidnega grafa G .

Drugače povedano, dve popolni prirejanji sta sosednji v resonančnem grafu, ko lahko eno popolno prirejanje dobimo iz drugega tako, da zavrtimo tri povezave (torej tiste iz popolnega prirejanja) v natanko enem šestkotniku.

Slika 6 prikazuje resonančni graf $R(G)$ benzo[e]pirena G . Vozlišča resonančnega grafa so popolna prirejanja, ki so prikazana na sliki 3. Oznake na povezavah resonančnega grafa nam povedo, v katerem šestkotniku moramo vrteti tri povezave, da iz enega popolnega prirejanja dobimo drugo popolno prirejanje. Na primer, če v popolnem prirejanju M_1 zavrtimo tri povezave šestkotnika h_1 , dobimo ravno popolno prirejanje M_2 . To posledično pomeni, da sta M_1 in M_2 sosednji vozlišči v resonančnem grafu $R(G)$, ustrezná povezava pa ima oznako h_1 .



Slika 6: Resonančni graf benzo[e]pirena.

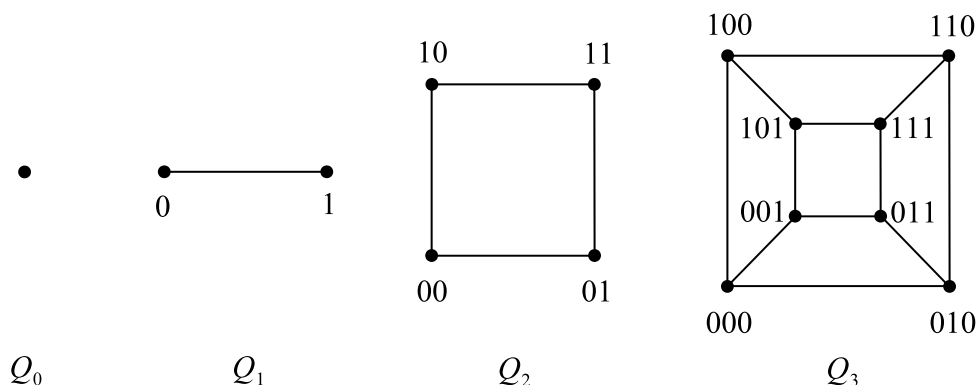
7 Hiperkocke in polinom kock

V tem poglavju bomo najprej spoznali hiperkocke, ki predstavljajo pomembno družino grafov.

Naj bo $n \in \mathbb{N}$. *Hiperkocka dimenzije n* je graf, ki ga bomo označevali z Q_n . Definiran je na množici vozlišč, ki jo sestavljajo vsi binarni nizi (vektorji) dolžine n ,

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n),$$

kjer je $u_i \in \{0, 1\}$ za vsak $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Vozlišča velikokrat zapisujemo kar kot $u_1 u_2 \dots u_n$. Dve vozlišči u in v grafa Q_n sta sosednji natanko tedaj, ko se razlikujeta v natanko eni komponenti (torej če obstaja $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, da velja $u_j \neq v_j$ in $u_i = v_i$ za vsak $i \neq j$). Hiperkocko Q_0 definiramo kot graf z enim samim vozliščem. Slika 7 prikazuje hiperkocke dimenzije 0, 1, 2 in 3.



Slika 7: Hiperkocke Q_0 , Q_1 , Q_2 in Q_3 .

Sedaj vpeljimo še polinom kock, ki je namenjen štetju induciranih hiperkock v poljubnem grafu. Vpeljali so ga B. Brešar, S. Klavžar in R. Škrekovski v članku [2].

Definicija 7.1. *Polinom kock* grafa G , ki ga bomo označevali s $C(G; x)$, je definiran na naslednji način:

$$C(G; x) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n(G) x^n,$$

kjer $\alpha_n(G)$ označuje število induciranih podgrafov grafa G , ki so izomorfni hiperkocki dimenzije n .

Zlahka opazimo, da je $\alpha_0(G)$ ravno število vozlišč grafa G , $\alpha_1(G)$ je število povezav grafa G , $\alpha_2(G)$ pa število ciklov dolžine 4 v grafu G , ki so tudi inducirani podgrafi.

Naj bo G benzenoidni graf benzo[e]pirena in naj bo $R(G)$ njegov resonančni graf, ki je prikazan na sliki 6. Izračunajmo polinom kock grafa $R(G)$. Opazimo, da ta graf vsebuje 11 vozlišč, 16 povezav, 7 ciklov dolžine 4 (ki so vsi inducirani podgrafi) in 1 hiperkocko dimenzije 3 (ki je tudi inducirani podgraf). Posledično je njegov polinom kock enak

$$C(R(G); x) = 11 + 16x + 7x^2 + x^3.$$

Takoj opazimo, da je polinom kock resonančnega grafa $R(G)$ v tem primeru enak Zhang-Zhangovemu polinomu grafa G , ki smo ga izračunali v poglavju 5. V naslednjem poglavju bomo videli, da to ni naključje, pač pa ta enakost velja v splošnem.

8 Enakost Zhang-Zhangovega polinoma in polinoma kock

V zadnjem poglavju bomo predstavili glavni rezultat iz članka [17], ki pove, da je Zhang-Zhangov polinom benzenoidnega grafa enak polinomu kock njegovega resonančnega grafa.

Izrek 8.1. Naj bo G benzenoidni graf, ki ima popolno prirejanje, in naj bo $R(G)$ njegov resonančni graf. Potem velja enakost

$$ZZ(G; x) = C(R(G); x).$$

Skica dokaza. V preostanku poglavja bomo opisali osnovno idejo dokaza zgornjega izreka. Zainteresiran bralec si lahko vse dodatne podrobnosti prebere v članku [17] ali v magistrskem delu [11].

Najprej vpeljimo nekaj dodatnih oznak. Naj bo G benzenoidni graf in n nenegativno celo število. Spomnimo, da $z(G, n)$ predstavlja število Clarovih pokritij z natanko n šestkotniki. Oznaka $\mathbb{Z}(G, n)$ pa bo pomenila množico vseh Clarovih pokritij grafa G z natanko n šestkotniki. Opazimo, da je moč množice $\mathbb{Z}(G, n)$ (oziroma število elementov v tej množici) enaka številu $z(G, n)$, torej $z(G, n) = |\mathbb{Z}(G, n)|$.

Prav tako bomo za graf G in nenegativno celo število n z oznako $\mathbb{Q}_n(G)$ označili množico vseh induciranih podgrafov grafa G , ki so izomorfnih hiperkocki dimenzije n . Velja torej $\alpha_n(G) = |\mathbb{Q}_n(G)|$, kjer je $\alpha_n(G)$ oznaka iz poglavja 7.

Naj bo sedaj G poljuben benzenoidni graf, ki ima popolno prirejanje, in naj bo $R(G)$ ustreznemu resonančni graf. Da dokažemo enakost polinomov, ki je zapisana v izreku 8.1, moramo dokazati, da se polinoma ujemata v vseh istoležnih koeficientih. To torej pomeni, da dokazujemo enakost

$$z(G, n) = \alpha_n(R(G))$$

za vsako nenegativno celo število n . Ker število $z(G, n)$ predstavlja moč množice $\mathbb{Z}(G, n)$, število $\alpha_n(R(G))$ pa predstavlja moč množice $\mathbb{Q}_n(R(G))$, moramo poiskati bijekcijo med množicama $\mathbb{Z}(G, n)$ in $\mathbb{Q}_n(R(G))$.

Naj bo torej n poljubno nenegativno celo število. Definirajmo preslikavo

$$f : \mathbb{Z}(G, n) \longrightarrow \mathbb{Q}_n(R(G))$$

na naslednji način: za vsako Clarovo pokritje $C \in \mathbb{Z}(G, n)$ naj bodo M_1, M_2, \dots, M_r vsa takšna popolna prirejanja grafa G , ki jih dobimo iz Clarovega pokritja C tako, da izoliranim povezavam iz C dodamo eno izmed dveh možnih popolnih prirejanj vsakega izmed šestkotnikov iz C . Naj bo $f(C)$ inducirani podgraf v grafu $R(G)$, ki vsebuje vozlišča M_1, M_2, \dots, M_r .

Kot smo že omenili, ima vsak šestkotnik iz Clarovega pokritja C dve možni popolni prirejanji, zato bomo v nadaljevanju eno izmed njiju imenovali *možnost 0*, drugo pa *možnost 1*. Ker je vseh šestkotnikov n , pri vsakem pa imamo dve možnosti za popolno prirejanje, dobimo torej skupaj 2^n možnih popolnih prirejanj. To pomeni, da je število vozlišč grafa $f(C)$ enako 2^n , kar je seveda tudi število vozlišč hiperkocke dimenzije n .

Oglejmo si zapisano definicijo na našem standardnem zgledu. Naj bo C Clarovo pokritje benzo[e]pirena, ki je prvo prikazano na sliki 5. Iz tega Clarovega pokritja dobimo štiri popolna prirejanja, ki imajo na sliki 3 oznake M_1, M_2, M_7 in M_8 . Ta popolna prirejanja seveda tvorijo hiperkocko dimenzije 2 v resonančnem grafu $R(G)$, glej sliko 6.

Tako kot v dokazu leme 4.20 iz dela [11] pokažimo, da je zgoraj definirana preslikava dobro definirana (glej tudi [1, 17]). Naj bo C neko Clarovo pokritje benzenoidnega grafa

G z n šestkotniki. Dokažimo, da je graf $f(C)$ izomorfen n -dimenzionalni hiperkocki Q_n . Če je $n = 0$, iz Clarovega pokritja C dobimo eno samo popolno prirejanje, zato je $f(C)$ neko vozlišče resonančnega grafa in s tem tudi hiperkocka dimenzije 0.

Naj bo zato $n \geq 1$ in naj bodo h_1, h_2, \dots, h_n šestkotniki Clarovega pokritja C . Izbavimo poljubno vozlišče M grafa $f(C)$. Kot smo že omenili, popolno prirejanje M dobimo tako, da izoliranim povezavam iz C dodamo eno izmed dveh možnih popolnih prirejanj vsakega izmed šestkotnikov iz C . Definirajmo binarni niz $b(M) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ tako, da za vsak $i \in \{1, \dots, n\}$ velja: $b_i = 0$, če smo za šestkotnik h_i izbrali možnost 0, in $b_i = 1$, če smo za šestkotnik h_i izbrali možnost 1. Očitno je b bijektivna preslikava iz množice vozlišč grafa $f(C)$ v množico vozlišč hiperkocke Q_n . Če želimo pokazati, da je graf $f(C)$ res izomorfen hiperkocki Q_n , moramo preveriti tudi, da za poljubni popolni prirejanji $M, M' \in V(f(C))$ velja: M in M' sta sosednji v $f(C)$ natanko tedaj, ko sta $b(M)$ in $b(M')$ sosednji v Q_n .

Najprej predpostavimo, da sta M in M' sosednji v $f(C)$. Naj bo $b(M) = (b_1, \dots, b_n)$ in $b(M') = (b'_1, \dots, b'_n)$. Ker vemo, da sta M in M' sosednji v $f(C)$, morata biti M in M' sosednji tudi v $R(G)$. Torej lahko M dobimo iz M' tako, da zavrtimo tri povezave enega šestkotnika (torej zavrtimo tiste povezave tega šestkotnika, ki so v M'). Ker vemo tudi, da smo M in M' obe dobili iz istega Clarovega pokritja, se morata ti dve popolni prirejanji razlikovati samo v povezavah nekega šestkotnika h_i , kjer je $i \in \{1, \dots, n\}$. Po definiciji binarnih kod se zato n -terici (b_1, \dots, b_n) in (b'_1, \dots, b'_n) razlikujeta samo na mestu i in posledično sta $b(M)$ in $b(M')$ sosednji v hiperkocki Q_n .

Za obratno smer predpostavimo, da sta $b(M) = (b_1, \dots, b_n)$ in $b(M') = (b'_1, \dots, b'_n)$ sosednji v hiperkocki Q_n , zato se ti dve binarni kodi razlikujeta na natanko enem mestu. Recimo, da se razlikujeta na mestu i , kjer je $i \in \{1, \dots, n\}$. To pomeni, da se M in M' razlikujeta samo v povezavah šestkotnika h_i in posledično sta M in M' sosednji v $R(G)$. Ker je graf $f(C)$ po definiciji induciran podgraf v $R(G)$, morata biti M in M' sosednji tudi v $f(C)$. Pokazali smo torej, da je b res izomorfizem in zato sta grafa $f(C)$ in Q_n izomorfna. To pomeni, da je $f(C)$ induciran podgraf v $R(G)$, ki je izomorfen hiperkocki Q_n . Posledično $f(C)$ pripada množici $\mathbb{Q}_n(R(G))$, zato je preslikava f dobro definirana.

V nadaljevanju bi bilo treba preveriti še, da je preslikava f injektivna in surjektivna. Dokaz injektivnosti je bolj ali manj rutinski: pokazati je treba, da se poljubni dve različni Clarovi pokritji z n šestkotniki preslikata v različna podgrafo resonančnega grafa. Po drugi strani je pri dokazu surjektivnosti treba najprej izbrati nek poljuben induciran podgraf H grafa $R(G)$, ki je izomorfen hiperkocki Q_n : s tem izberemo poljuben element $H \in \mathbb{Q}_n(R(G))$. Če izberemo še neko poljubno vozlišče M iz grafa H , potem vemo, da mora to vozlišče imeti natanko n sosedov v H (ker je H izomorfen hiperkocki dimenzije n). V primeru $n \geq 1$ je vsaka izmed n povezav v grafu H , ki ima za eno krajišče M , seveda tudi povezava resonančnega grafa $R(G)$ in zato določa nek šestkotnik benzenoidnega grafa G , v katerem pri prehodu iz M v sosednje vozlišče vrtimo tri povezave. Na ta način lahko dobimo n šestkotnikov, ki skupaj s preostalimi povezavami iz M določajo Clarovo pokritje C grafa G z natanko n šestkotniki. Preverimo lahko, da velja $f(C) = H$, kar zaključuje dokaz surjektivnosti. Natančna dokaza injektivnosti in surjektivnosti vključujeta še več podrobnosti, ki jih bomo na tem mestu izpustili, saj smo želeli predstaviti le intuitivno idejo dokaza. Ponovno poudarimo, da lahko podrobna dokaza najdemo v [17] in [11].

Literatura

- [1] M. Berlič, N. Tratnik, P. Žigert Pleteršek, Equivalence of Zhang-Zhang polynomial and cube polynomial for spherical benzenoid systems, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **73** (2015), 443–456.
- [2] B. Brešar, S. Klavžar, R. Škrekovski, The cube polynomial and its derivatives: the case of median graphs, *Electron. J. Combin.* **10** (2003), #R3.
- [3] E. Clar, *The Aromatic Sextet*, John Wiley & Sons, London, 1972.
- [4] S. El-Basil, Kekulé structures as graph generators, *J. Math. Chem.* **14** (1993), 305–318.
- [5] S. Gojak, I. Gutman, S. Radenković, A. Vodopivec, Relating resonance energy with Zhang-Zhang polynomial, *J. Serb. Chem. Soc.* **72** (2007), 673–679.
- [6] W. Gründler, Signifikante Elektronenstrukturen für benzenoide Kohlenwasserstoffe, *Wiss. Z. Univ. Halle* **31** (1982), 97–116.
- [7] I. Gutman, S. J. Cyvin, *Introduction to the Theory of Benzenoid Hydrocarbons*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [8] B.-H. He, H. A. Witek, Enumeration of Clar covers of parallelogram chains, *Discrete Appl. Math.* **302** (2021), 221–233.
- [9] S. Klavžar, P. Žigert, I. Gutman, Clar number of catacondensed benzenoid hydrocarbons, *J. Mol. Struct. (Theochem)* **586** (2002), 235–240.
- [10] N. Tratnik, Molekularni deskriptorji in metoda prerezov, *Dianoia* **6** (2022), 27–38.
- [11] N. Tratnik, P. Žigert Pleteršek (mentorica), *Celotni benzenoidni sistemi ter povezava med Zhang-Zhang-ovim polinomom in polinomom kock, magistrsko delo*, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Maribor, 2014.
- [12] N. Tratnik, P. Žigert Pleteršek, Kemijska teorija grafov in resonančni grafi, *Dianoia* **2** (2018), 12–34.
- [13] N. Tratnik, P. Žigert Pleteršek, Resonance graphs of fullerenes, *Ars Math. Contemp.* **11** (2016), 425–435.
- [14] S. Wagner, H. Wang, *Introduction to Chemical Graph Theory*, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2019.
- [15] R. J. Wilson, J. J. Watkins (prevod: Janez Žerovnik), *Uvod v teorijo grafov*, DMFA, Ljubljana, 1997.
- [16] F. Zhang, X. Guo, R. Chen, Z -transformation graph of perfect matching of hexagonal systems, *Discrete Math.* **72** (1988), 405–415.
- [17] H. Zhang, W. C. Shiu, P. K. Sun, A relation between Clar covering polynomial and cube polynomial, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **70** (2013), 477–492.
- [18] H. Zhang, F. Zhang, The Clar covering polynomial of hexagonal systems I, *Discrete Appl. Math.* **69** (1996), 147–167.

Structural design of learning spaces using operations

Strukturirano oblikovanje prostorov znanja z uporabo operacij

Maša Galun, Drago Bokal

Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Koroška cesta 160, 2000 Maribor

Povzetek

Učni prostor je matematična struktura, ki prikaže dinamiko učnega procesa in povezave med različnimi stanji znanja. V tem članku uvedemo operacije med učnimi prostori, s pomočjo katerih lahko konstruiramo nove učne prostore. Definiramo pet učnih prostorov, ki jih porodimo iz že obstoječih. To so: polni učni prostor, spodnji učni prostor, zgornji učni prostor, vsota učnih prostorov in produkt učnih prostorov. Polni učni prostor modelira vse možne kombinacije elementov znanja, kar je uporabno v primerih, ko lahko te elemente znanja neodvisno pridobimo. Spodnji učni prostor prikaže vpliv omejenega doseganja znanja, ki je potrebno za usvojitev enega od stanj znanja. Zgornji učni prostor predstavi poenostavljeno situacijo, ko lahko predpostavmo, da prejemniki znanja določene informacije že v celoti obvladajo. Vsota učnih prostorov in produkt učnih prostorov nudita vpogled v strukturirano nadgrajevanje znanja ali z zaporednim učenjem ali z neodvisnim pridobivanjem. Tako z vpeljavo strukturiranega kombiniranja učnih prostorov poglobimo naše razumevanje modeliranja učnega procesa.

Ključne besede: učni prostori, operacije v učnih prostorih, združevanje učnih prostorov, strukture znanja

Abstract

Learning spaces are mathematical structures that capture the dynamics of a learning process and the relationships between different knowledge states. In this article, we introduce operations among knowledge structures that can be used to construct new knowledge structures. We define five learning spaces derived from existing ones: the complete learning space, lower learning space, upper learning space, sum of learning spaces and product of learning spaces. The complete learning space is used to model independent learning of a set of knowledge items. The lower learning space models learning a subset of items required to achieve a selected knowledge state. The upper learning space models the situations in which we can assume that all learners already have certain preexisting knowledge. The sum of learning spaces and the product of learning spaces provide insights into either consecutive or independent learning of knowledge from two knowledge structures. Through the introduction of these new learning spaces, we enable construction of learning spaces that models designed learning, such as in curricula, textbooks or presentations.

Key words: learning spaces, operations in learning spaces, merging learning spaces, knowledge structures

1 Introduction

Learning space is a mathematical structure that allows us to explore the dynamics of learning and the relationships between different states of knowledge. In this article, we focus on expanding the landscape of learning spaces by introducing new learning spaces through the definition of new operations.

We define five new operations on learning spaces that yield new learning spaces from existing ones. We begin by defining *the complete learning space*, denoted as $\mathbb{K}(Q)$, which

models independent learning of a set of knowledge items. It could be interpreted as a constant operation, similarly as \top and \perp are constant boolean operators. This learning space, whose knowledge states are the power set of Q , allows the learner to be in any combination of items of information from a set Q .

Next, we introduce *the lower learning space*, denoted as $\mathbb{K} \setminus S$, which is obtained by giving up specific items of information from the set S from a learning space $\mathbb{K}(Q, \mathcal{K})$. By removing the items in S from all states in \mathcal{K} , we examine how the absence of certain information impacts the overall learning space.

We further expand the repertoire of learning spaces by introducing *the upper learning space*, denoted as \mathbb{K}/S . This learning space is obtained by removing the origin, denoted as $M(\mathcal{K} \setminus S)$, from all states in \mathcal{K} . The upper learning space models situations in which we may assume that all the learners already master a subset of topics, included in $M(\mathcal{K} \setminus S)$. Note that both upper and lower learning space are unary operation on the set of learning spaces containing S , or they are binary operations whose first operand is a knowledge space and the second operand is a subset of knowledge items from that knowledge space.

Additionally, we introduce two binary operations on learning spaces: *the sum of learning spaces*, denoted as $\mathbb{K} + \mathbb{H}$, and *the product of learning spaces*, denoted as $\mathbb{K} \times \mathbb{H}$. These operations model either consecutive (sum) or independent (product) learning of knowledge items in the two original learning spaces.

By defining these new learning spaces, we expand the theoretical foundation of learning theory. Each operation offers an insight into the process of learning new concepts. By examining their properties, relationships, and applications, we aim to enhance our understanding of the learning process and its implications across various domains, such as artificial intelligence and education.

An example of the applications of the operations from our paper is [2], where the operations were used to produce learning spaces of several primary school curricula.

2 About learning spaces

Definition 1. [3]

A *knowledge structure* (Q, \mathcal{K}) is an ordered pair of a set Q and a family \mathcal{K} of subsets of a set Q , where every element of a set Q is an item of information and every set from \mathcal{K} is a learning state, composed of items of information from Q . Therefore: $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(Q)$. We further require that $\emptyset \in \mathcal{K}$.

Definition 2. [3]

A *learning space* (Q, \mathcal{K}) is a knowledge structure, that satisfies:

1. ACCESSIBILITY. $\forall K \in \mathcal{K} : K \neq \emptyset \Rightarrow \exists q \in K : K \setminus \{q\} \in \mathcal{K}$
A state K is reached, when we learn an item q from a state $K \setminus \{q\}$.
2. LEARNING CONSISTENCY. $\forall K \in \mathcal{K}, \forall q, r \in Q : K \cup \{q\} \in \mathcal{K} \wedge K \cup \{r\} \in \mathcal{K} \Rightarrow K \cup \{q, r\} \in \mathcal{K}$.
If the state K allows learning of both item q and item r separately, then we can learn both items from the state K . In other words, learning more does not prevent us from learning something new.

Theorem 2.1. [4] *If $K \subset L$ are two states in a learning space (Q, \mathcal{K}) , with $|L \setminus K| = n$, then there is a chain of states*

$$K_0 = K \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n = L \quad (2.1)$$

such that $K_i = K_{i-1} + \{q_i\}$ with $q_i \in Q$ for $q \leq i \leq n$.

Proof. It's obvious that the theorem holds for $K = \emptyset$ and $L = \{r\}$ for some state $\{r\} \in \mathcal{K}$.

Now, let's suppose, for the sake of contradiction, that the theorem does not hold for all states that meet the given condition. Therefore, in a learning space (Q, \mathcal{K}) , there exists a counterexample $K \subset L$, smallest with respect to $|L|$.

We know that (Q, \mathcal{K}) is a learning space with accessibility axiom. Since L is a state in \mathcal{K} , there exists such that $q \in L$ that $L \setminus \{q\} \in \mathcal{K}$. However, since L is a minimal counterexample, the theorem holds true for the state $L \setminus \{q\}$. Therefore, there exists a chain of states:

$$K \subset K_1 \subset \cdots \subset L \setminus \{q\}.$$

Since L is a state in \mathcal{K} , we can extend the chain:

$$K \subset K_1 \subset \cdots \subset L \setminus \{q\} \subset (L \setminus \{q\}) \cup \{q\} = L.$$

As we have shown that there exists a chain of states from K to L , we established a contradiction that proves our theorem. \square

Note: in source [4], property (2.1) is listed as a definition of accessibility. It is obvious that (2.1) implies accessibility in definition 2. Consequently, we can conclude that (2.1) is equivalent to our definition of accessibility.

Theorem 2.2. [4] *The following two conditions are equivalent for a finite family \mathcal{K} of subsets:*

- (i) (Q, \mathcal{K}) is a learning space (in sense of Definition 2);
- (ii) \mathcal{K} contains the empty set and is well-graded and \cup -closed.

3 Operations in learning spaces

The following learning space is obtained using the power set of Q , which contains the full spectrum of potential knowledge states derived from a given set of items.

Theorem 3.1. *For any set of items Q , define $\mathbb{K}(Q) := (Q, \mathcal{P}(Q))$, obtained using the power set of Q . Then, $\mathbb{K}(Q)$ is a learning space.*

Proof. Firstly, let's prove that $\mathbb{K}(Q)$ is a knowledge structure.

1. We must prove that $\mathcal{P}(Q) \subseteq \mathcal{P}(Q)$, which is obvious.
2. It is also evident that $\emptyset \in \mathcal{P}(Q)$.

Thus, we have proven that $\mathbb{K}(Q)$ is a knowledge structure. Let's show that it is also a learning space.

3. To prove accessibility, we must show that: $\forall K \in \mathcal{P}(Q) : K \neq \emptyset \Rightarrow \exists q \in K : K \setminus \{q\} \in \mathcal{P}(Q)$.

Let $K \in \mathcal{P}(Q)$ be an arbitrary state satisfying $K \neq \emptyset$. Then we can take an arbitrary item $q \in K$. It holds that $K \setminus \{q\} \in \mathcal{P}(Q)$. Therefore q is our desired element.

4. To prove learning consistency, we aim to prove that: $\forall K \in \mathcal{P}(Q), \forall q, r \in Q : K \cup \{q\} \in \mathcal{P}(Q) \wedge K \cup \{r\} \in \mathcal{P}(Q) \Rightarrow K \cup \{q, r\} \in \mathcal{P}(Q)$.

Let K be an arbitrary state in $\mathcal{P}(Q)$ and let q and r be arbitrary items in Q for which the assumption holds. Since $K \in \mathcal{P}(Q)$ and $q, r \in Q$, it also holds that $K \cup \{q, r\} \in \mathcal{P}(Q)$.

We have shown that $\mathbb{K}(Q)$ satisfies all the axioms of a learning space. \square

Definition 3. Let Q be a set of items and $\mathbb{K}(Q)$ be as denoted in Theorem 3.1. We call $\mathbb{K}(Q)$ a **complete learning space**.

Definition 4. Let $\mathbb{K}(Q, \mathcal{K})$ be a knowledge structure and let $S \subseteq Q$ be a set of items. We define $\mathcal{K} \setminus S := \{K \in \mathcal{K} \mid K \cap S = \emptyset\}$ as a set of states that do not contain any items of information from S . We define *an origin of S in \mathbb{K}* as $M(\mathcal{K} \setminus S) := \bigcup (\mathcal{K} \setminus S)$. Therefore, $M(\mathcal{K} \setminus S)$ represents the maximal set of items we can learn without S .

Lemma 3.2. *If $\mathbb{K}(Q, \mathcal{K})$ is a learning space, then for any set $S \subseteq Q$, the origin of S in \mathbb{K} is a state in the learning space \mathbb{K} . In other words, $M(\mathcal{K} \setminus S) \in \mathcal{K}$.*

Proof. We defined $\mathcal{K} \setminus S := \{K \in \mathcal{K} \mid K \cap S = \emptyset\}$. Therefore, for any state $K \in \mathcal{K} \setminus S$, it follows that $K \in \mathcal{K}$, as per the definition.

Given that $\mathbb{K}(Q, \mathcal{K})$ is a learning space, by Theorem 2.2 we can conclude that $\mathbb{K}(Q, \mathcal{K})$ is closed under union (\cup -closed). That means that an union of any states from \mathcal{K} is also a state in \mathcal{K} . By definition, the origin of S in \mathbb{K} is an union of all states $K \in \mathbb{K}$, that do not contain any item of information from S . Since $\mathbb{K}(Q, \mathcal{K})$ is \cup -closed and since $M(\mathcal{K} \setminus S)$ is an union of (some) states from \mathcal{K} , it follows that $M(\mathcal{K} \setminus S)$ is also a state in \mathcal{K} . \square

Corollary 3.3. *If $S = \emptyset$, then $M(\mathcal{K}) = \bigcup \mathcal{K} = Q \in \mathcal{K}$.*

The following learning space is obtained by giving up all items of information of some set S .

Definition 5. Let $\mathbb{K}(Q, \mathcal{K})$ be a knowledge structure and let $S \subseteq Q$ be a set of items considered as given up information in the new knowledge structure. We define $\mathbb{K} \setminus S := (M(\mathcal{K} \setminus S), \mathcal{K} \setminus S)$ as a knowledge structure obtained by giving up all items of information from S . If \mathbb{K} is a learning space, then $\mathbb{K} \setminus S$ is called the **lower learning space** of S in \mathbb{K} .

Theorem 3.4. *If \mathbb{K} is a learning space, then $\mathbb{K} \setminus S$ is also a learning space.*

Proof. 1. We will prove that $\mathcal{K} \setminus S \subseteq \mathcal{P}(M(\mathcal{K} \setminus S))$ or in other words: $\bigcup (\mathcal{K} \setminus S) \subseteq Q \setminus S$. We have to prove that the union of all sets from \mathcal{K} that do not contain any items of information from S , is a subset of $Q \setminus S$, a set that contains all items of information except those from the set S . We know that $\mathbb{K}(Q, \mathcal{K})$ is a learning space, so it follows that $\bigcup \mathcal{K} \subseteq Q$. Let $K \in (\mathcal{K} \setminus S)$ be an arbitrary element. It follows directly from $S \cap K = \emptyset$

that $\bigcup(\mathcal{K} \setminus S) \cap S = \emptyset$. Together with $\bigcup(\mathcal{K} \setminus S) \subseteq Q$, we get $\bigcup(\mathcal{K} \setminus S) \subseteq Q \setminus S$.

2. Let's prove: $\emptyset \in \mathcal{K} \setminus S$.

Because $\mathbb{K}(Q, \mathcal{K})$ is a learning space, we know that $\emptyset \in \mathcal{K}$. From $\emptyset \cap S = \emptyset$ follows $\emptyset \in \mathcal{K} \setminus S$.

3. To prove accessibility, we must prove that $\forall K \in \mathcal{K} \setminus S : K \neq \emptyset \Rightarrow \exists q \in K : K \setminus \{q\} \in \mathcal{K} \setminus S$.

We aim to demonstrate that for arbitrary state $K \in \mathcal{K}$ that does not contain any items of information from S , there exists an item $q \in K$, such that the state $K \setminus \{q\}$ is also included in $\mathcal{K} \setminus S$.

Let $K \in \mathcal{K} \setminus S, K \neq \emptyset$ an arbitrary state. By definition of $\mathcal{K} \setminus S$, we have that $K \in \mathcal{K}$.

Because $\mathbb{K}(Q, \mathcal{K})$ is a learning space, we can assume that the axiom of accessibility holds, so for $K \in \mathcal{K}$ there exists such $q \in K$, that $(K \setminus \{q\}) \in \mathcal{K}$.

Since $K \in \mathcal{K} \setminus S$, we know that $K \cap S = \emptyset$. It follows that: $(K \setminus \{q\}) \cap S = \emptyset$.

We have proven that the state $K \setminus \{q\}$ does not contain any items of information from S , which means: $K \setminus \{q\} \in \mathcal{K} \setminus S$. We have identified the element we were seeking, which is q .

4. To prove learning consistency, we must show that $\forall K \in \mathcal{K} \setminus S, \forall q, r \in M(\mathcal{K} \setminus S) : K \cup \{q\} \in \mathcal{K} \setminus S \wedge K \cup \{r\} \in \mathcal{K} \setminus S \Rightarrow K \cup \{q, r\} \in \mathcal{K} \setminus S$.

We need to show that for any state $K \in \mathcal{K} \setminus S$, and for any items $q, r \in M(\mathcal{K} \setminus S)$, if both $K \cup \{q\}$ and $K \cup \{r\}$ do not contain any items of information from S , then the state $K' := K \cup \{q, r\}$ also does not contain any items from S .

Let $K \in \mathcal{K} \setminus S$ be an arbitrary state and let $q, r \in M(\mathcal{K} \setminus S)$ be arbitrary items satisfying the above condition. By the definition of $M(\mathcal{K} \setminus S)$, we have that q and r are in a state that contains all items of information of the learning space \mathbb{K} except for those in the set S . Since $K \cup \{q\}$ and $K \cup \{r\}$ do not contain any items of information from S , it follows that $\{q, r\} \cap S = \emptyset$ and $K \cap S = \emptyset$. Therefore, the state $K' = K \cup \{q, r\}$ also satisfies $K' \cap S = \emptyset$. Since K' is a state in \mathcal{K} , we conclude that K' is an element of $\mathcal{K} \setminus S$. As a result, we have shown that the axiom of learning consistency holds. \square

The next learning space consists of all states that contain all items of information from some set S , but we remove all of those items from all states.

Definition 6. Let $\mathbb{K}(Q, \mathcal{K})$ be a knowledge structure and let $S \subseteq Q$ be a set of items, which we look at as a set of required items. Let M be the origin of S in \mathbb{K} . We define \mathbb{K}/S as a knowledge structure that contains only states from \mathcal{K} that contain the whole origin. We remove the origin items from all these states and get $\mathbb{K}/S := (Q \setminus M, \mathcal{K}/S)$, where $\mathcal{K}/S := \{K \setminus M \mid K \in \mathcal{K}, M \subseteq K\}$. If $\mathbb{K}(Q, \mathcal{K})$ is a learning space, then \mathbb{K}/S is called the **upper learning space** of S in \mathbb{K} .

Theorem 3.5. *If $\mathbb{K}(Q, \mathcal{K})$ is a learning space, then \mathbb{K}/S is also a learning space.*

Proof. 1. Let's prove: $\mathcal{K}/S \subseteq \mathcal{P}(Q \setminus M)$, where M is the origin of S in \mathbb{K} , $Q \setminus M$ is a set of all items of information from \mathbb{K} without all origin items of S and \mathcal{K}/S is a set of all states K' from \mathcal{K} that contain $M \subseteq K'$, but we remove it all of the items from M .

Consider an arbitrary state $K \in \mathcal{K}/S$. By definition, K can be expressed as $K = K' \setminus M$, where $K' \in \mathcal{K}$ and $M \subseteq K'$. We consider two cases:

1.1 If $K = \emptyset$, it trivially follows that $\emptyset \in \mathcal{P}(Q \setminus M)$.

1.2 Otherwise we can choose an arbitrary item of information $x \in K$. Let's assume that $x \notin Q \setminus M$. This assumption leads to the conclusion that x belongs to M , which contradicts the fact that x is in the state K .

2. We need to show that $\emptyset \in \mathcal{K}/S$.

Consider the state that consists only of the origin items of set S . This is the origin state M . By Lemma 3.2, $M \in \mathcal{K}$. It is obvious that $M \subseteq M$. By removing all items from M , we obtain the set $M \setminus M = \emptyset$, which meets the conditions for belonging to the set \mathcal{K}/S . Thus, we have shown that $\emptyset \in \mathcal{K}/S$.

3. To prove accessibility, we must show: $\forall K \in \mathcal{K}/S, K \neq \emptyset : \exists q \in Q \setminus M : K \setminus \{q\} \in \mathcal{K}/S$.

Our goal is to demonstrate that for any state $K \in \mathcal{K}/S$ that is non-empty, there exists an item of information q that does not belong to the set of origin items M , such that if we remove q from K , the state $K \setminus \{q\}$ still belongs to \mathcal{K}/S . This implies that $K \setminus \{q\}$ can be obtained from a state containing all the origin items of information, which were subsequently removed.

Let us consider an arbitrary state $K = K' \setminus M$, where $K' \in \mathcal{K}$ and $M \subseteq K'$.

By Lemma 3.2 we know that $M \in \mathcal{K}$. Because $\mathbb{K}(Q, \mathcal{K})$ is a learning space and M and K' are two states in \mathbb{K} , we can use Theorem 2.1 to get a chain of states:

$$M \subset M \cup \{q_1\} \subset M \cup \{q_1, q_2\} \subset \dots \subset K' \setminus \{q_m\} \subset K'$$

We assumed that K is non-empty. By examining the definition of the set \mathcal{K}/S , it's evident that $K' \neq M$ follows from the assumption, since $K = (K' \setminus M) \neq \emptyset$.

This means, that in our chain of states there exists a state $K' \setminus \{q\}$, where $q \in Q \setminus M$. We now aim to prove that $q = q_m$ is the desired element.

We want to demonstrate that the state $K \setminus \{q\}$ belongs to \mathcal{K}/S . From the chain of states, we observe that $K' \setminus \{q\} \in \mathcal{K}$ and $M \subseteq K' \setminus \{q\}$. Thus, $(K' \setminus \{q\}) \setminus M \in \mathcal{K}/S$ and $(K' \setminus \{q\}) \setminus M = K \setminus \{q\}$. We have successfully proven that $K \setminus \{q\} \in \mathcal{K}/S$.

4. To prove learning consistency, we must show: $\forall K \in \mathcal{K}/S, \forall q, r \in Q \setminus M : K \cup \{q\} \in \mathcal{K}/S \wedge K \cup \{r\} \in \mathcal{K}/S \Rightarrow K \cup \{q, r\} \in \mathcal{K}/S$.

We aim to prove that, for any state $K \in \mathcal{K}/S$, obtained by removing all origin items of S from the state $K' \in \mathcal{K}$, and for any states q and r from $Q \setminus M$, if both $K \cup \{q\}$ and $K \cup \{r\}$ can be derived from some states in \mathcal{K} that contain the origin items, by removing those origin items, then the state $K \cup \{q, r\}$ can also be derived in the same way from some state in \mathcal{K} .

Let $K = (K' \setminus M) \in \mathcal{K}/S$ be an arbitrary set, and let q and r be arbitrary elements from $Q \setminus M$, satisfying the assumption. Thus, q and r belong to the set of all items of information excluding those in M .

Since $K \cup \{q\} \in \mathcal{K}/S$ and $K \cup \{r\} \in \mathcal{K}/S$, we can express these states as $K \cup \{q\} = K'_q \setminus M$ and $K \cup \{r\} = K'_r \setminus M$ for some states $K'_q, K'_r \in \mathcal{K}$, $M \subseteq K'_q, K'_r$.

We know that q and r don't belong to the set of origin items and thus, q and r will not be removed when we eliminate the origin items. From this, we can deduce that $K'_q = K' \cup \{q\}$,

since $K'_q \setminus M = (K' \cup \{q\}) \setminus M = K \cup \{q\}$. Similarly, we have $K'_r = K \cup \{r\}$. Since K'_q and K'_r are in \mathcal{K} and q and r are in Q , we can refer to the learning consistency in the learning space \mathbb{K} . Therefore, $K' \cup \{q, r\} \in \mathcal{K}$. As $M \subseteq K'$, it follows that $M \subseteq K' \cup \{q, r\}$, indicating that the set $K' \cup \{q, r\}$ satisfies the conditions of \mathcal{K}/S . Hence, we have $(K' \cup \{q, r\}) \setminus M \in \mathcal{K}/S$. Furthermore, since $q, r \in Q \setminus M$, we have $(K' \cup \{q, r\}) \setminus M = K \cup \{q, r\}$. Thus, we have proven that $K \cup \{q, r\} \in \mathcal{K}/S$. \square

Let's look at two examples of binary operations on learning spaces.

Definition 7. Let $\mathbb{K}(Q_K, \mathcal{K}_K)$ and $\mathbb{H}(Q_H, \mathcal{K}_H)$ be knowledge structures that do not share any items of information. In other words: $Q_K \cap Q_H = \emptyset$. We define $Q_{K+H} := Q_K \cup Q_H$ as a set that contains items of both knowledge structures. Let $\mathcal{K}_{K+H} := \mathcal{K}_K \cup \{H \cup M(\mathcal{K}_K) \mid H \in \mathcal{K}_H\}$ be a set of all states from \mathcal{K}_K and all states from \mathcal{K}_H to which we add all items accessible in the structure \mathbb{K} . If $\mathbb{K}(Q_K, \mathcal{K}_K)$ and $\mathbb{H}(Q_H, \mathcal{K}_H)$ are learning spaces, then $\mathbb{K} + \mathbb{H} := (Q_{K+H}, \mathcal{K}_{K+H})$ is called the **sum of learning spaces** of \mathbb{K} and \mathbb{H} .

$\mathbb{K} + \mathbb{H}$ is a learning space that models consecutive learning of items in Q_K followed by items in Q_H .

Theorem 3.6. *If $\mathbb{K}(Q_K, \mathcal{K}_K)$ and $\mathbb{H}(Q_H, \mathcal{K}_H)$ are learning spaces, then $\mathbb{K} + \mathbb{H}$ is also a learning space.*

Proof. 1. To prove $\mathcal{K}_{K+H} \subseteq \mathcal{P}(Q_{K+H})$, we want to show that the union of all states of learning space \mathbb{K} and states of learning space \mathbb{H} , to which we add all possible items of information from the learning space \mathbb{K} , is a subset of the power set of all items from both learning spaces.

Let K be an arbitrary state in \mathcal{K}_{K+H} . We consider two cases:

1.1 $K \in \mathcal{K}_K$.

If the state K is contained in the learning space \mathbb{K} , we have $K \in \mathcal{K}_K \subseteq \mathcal{P}(Q_K)$ since \mathbb{K} is a learning space. Additionally, $\mathcal{P}(Q_K) \subseteq \mathcal{P}(Q_{K+H})$, so we have $K \in \mathcal{P}(Q_{K+H})$.

1.2 $K \in \{H \cup M(\mathcal{K}_K) \mid H \in \mathcal{K}_H\}$.

The state K is an union of some state from the learning space \mathbb{H} and a set that contains all items of information from the learning space \mathbb{K} . Thus, we can write it as $K = H \cup M(\mathcal{K}_K)$, where $H \in \mathcal{K}_H$. Since \mathbb{H} is a learning space, we have $H \subseteq Q_H$. Because $M(\mathcal{K}_K)$ is a set of all items of learning space \mathbb{K} , it follows that $M(\mathcal{K}_K) \subseteq Q_K$. Hence, we have $K = H \cup M(\mathcal{K}_K) \subseteq Q_H \cup Q_K$, which means $K \in \mathcal{P}(Q_{K+H})$.

Therefore, in both cases, we have shown that $K \in \mathcal{P}(Q_{K+H})$, implying $\mathcal{K}_{K+H} \subseteq \mathcal{P}(Q_{K+H})$.

2. We aim to show that $\emptyset \in \mathcal{K}_{K+H}$.

As \mathbb{K} is a learning space, we can assert that $\emptyset \in \mathcal{K}_K$. \mathcal{K}_{K+H} is a set that contains all states from \mathcal{K}_K , therefore it contains an empty set. Hence, we can conclude that $\emptyset \in \mathcal{K}_{K+H}$.

3. To prove accessibility, we must show: $\forall K \in \mathcal{K}_{K+H}, K \neq \emptyset : \exists q \in Q_{K+H} : K \setminus \{q\} \in \mathcal{K}_{K+H}$.

We want to demonstrate that for every state K , there exists an item of information q that belongs either to the learning space \mathbb{K} or \mathbb{H} , such that the state $K \setminus \{q\}$ is also an element of \mathcal{K}_{K+H} .

We consider two cases:

3.1 If $K \in \mathcal{K}_K$, this property holds true since \mathbb{K} is a learning space that ensures accessibility. Hence, there exists such $q \in Q_K \subseteq Q_{K+H}$. As $\mathcal{K}_K \subseteq \mathcal{K}_{K+H}$, we can find an element $q \in Q_{K+H}$ with desired properties.

3.2 Now let's examine the case where $K = H \cup M(\mathcal{K}_K)$, where $H \in \mathcal{K}_H$ is an arbitrary state.

As \mathbb{H} is a learning space, there exists $q \in Q_H \subseteq Q_{K+H}$ such that $H \setminus \{q\} \in \mathcal{K}_H$. Since $H \setminus \{q\}$ is a knowledge state of the learning space \mathbb{H} , we can deduce that $(H \setminus \{q\}) \cup M(\mathcal{K}_K) \in \{H' \cup M(\mathcal{K}_K) | H' \in \mathcal{K}_H\}$. If q is an item of the learning space \mathbb{H} , it follows that q is not an item of the learning space \mathbb{K} , since we assumed $Q_K \cap Q_H = \emptyset$. We conclude: $q \notin M(\mathcal{K}_K)$. Consequently, $K \setminus \{q\} = (H \cup M(\mathcal{K}_K)) \setminus \{q\} = (H \setminus \{q\}) \cup M(\mathcal{K}_K)$. This demonstrates that $K \setminus \{q\} \in \{H' \cup M(\mathcal{K}_K) | H' \in \mathcal{K}_H\} \subseteq \mathcal{K}_{K+H}$.

4. To prove learning consistency, we must show: $\forall K \in \mathcal{K}_{K+H}, \forall q, r \in Q_{K+H} : K \cup \{q\} \in \mathcal{K}_{K+H} \wedge K \cup \{r\} \in \mathcal{K}_{K+H} \Rightarrow K \cup \{q, r\} \in \mathcal{K}_{K+H}$.

We want to prove the following statement: For any state $K \in \mathcal{K}_{K+H}$ and any items of information $q, r \in Q_{K+H}$: If both states $K \cup \{q\}$ and $K \cup \{r\}$ are contained in \mathcal{K}_{K+H} , then the state $K \cup \{q, r\}$ is also contained in \mathcal{K}_{K+H} .

We consider four cases:

4.1 If $K \in \mathcal{K}_K$ and $q, r \in Q_K$, then the statement holds because \mathbb{K} is a learning space respecting the learning consistency axiom.

4.2 $K \in \mathcal{K}_K, q \in Q_K$ and $r \notin Q_K$.

If the item r does not belong to the learning space \mathbb{K} , then it is a part of the learning space \mathbb{H} . Since we assumed that $K \cup \{r\} \in \mathcal{K}_{K+H}$, this state must belong to the set $\{H \cup M(\mathcal{K}_K) | H \in \mathcal{K}_H\}$. As $K \in \mathbb{K}$, we can write $K \cup \{r\} = H \cup M(\mathcal{K}_K)$, where $H = \{r\}$ and $K = M(\mathcal{K}_K)$. We can see that the state $K \cup \{r\}$ is an union of the item $r \in Q_H$ and the set that contains all items of information of learning space \mathbb{K} .

The state $K \cup \{q, r\}$ can be written as $K \cup \{q, r\} = (K \cup \{q\}) \cup \{r\}$. From our previous observation, we found that K contains all items of information from learning space \mathbb{K} . In other words: $K = M(\mathcal{K}_K)$. Since $q \in \mathcal{K}_K$, we can conclude that q already belongs to K , therefore $K = K \cup \{q\} = M(\mathcal{K}_K)$. Hence, we can further simplify $(K \cup \{q\}) \cup \{r\} = M(\mathcal{K}_K) \cup \{r\}$. As the state $\{r\}$ belongs to the learning space \mathbb{H} , we can conclude: $K \cup \{q, r\} = M(\mathcal{K}_K) \cup \{r\} \in \mathcal{K}$. Similarly, we consider the case when K and r belong to \mathbb{K} , but q does not belong to \mathbb{K} .

4.3 $K \in \mathcal{K}_K$ and $q, r \notin Q_K$.

Since items q and r do not belong to the learning space \mathbb{K} , they must belong to the learning space \mathbb{H} . Assuming that the states $K \cup \{q\} \in \mathcal{K}_{K+H}$ and $K \cup \{r\} \in \mathcal{K}_{K+H}$, it implies that they both belong to the set $\{H \cup M(\mathcal{K}_K) | H \in \mathcal{K}_H\}$. Since $K \in \mathbb{K}$,

we can conclude that $K = M(\mathcal{K}_K)$ and $\{q\} \in \mathcal{K}_H, \{r\} \in \mathcal{K}_H$.

Considering that \mathbb{H} is a learning space, it holds that $\emptyset \in \mathcal{K}_H$. We have already established that $\{q\} \in \mathcal{K}_H$. Therefore, we can conclude that $\emptyset \cup \{q\} \in \mathcal{K}_H$. Similarly, we obtain $\emptyset \cup \{r\} \in \mathcal{K}_H$. Taking into account that \mathbb{H} is a learning space with learning consistency, from $\emptyset \cup \{q\} \in \mathcal{K}_H$ and $\emptyset \cup \{r\} \in \mathcal{K}_H$ it follows that $\emptyset \cup \{q, r\} \in \mathcal{K}_H$, or equivalently, $\{q, r\} \in \mathcal{K}_H$.

Therefore, we can conclude that the state $\{q, r\} \cup M(\mathcal{K}_{K+H})$ belongs to the set $\{H \cup M(\mathcal{K}_K) | H \in \mathcal{K}_H\}$, and consequently, $\{q, r\} \cup M(\mathcal{K}_{K+H}) = K \cup \{q, r\} \in \mathcal{K}_{K+H}$.

4.4 $K \notin \mathcal{K}_K$ and $q, r \notin Q_K$.

Since K does not belong to the learning space \mathbb{K} , it belongs to the set $\{H' \cup M(\mathcal{K}_K) | H' \in \mathcal{K}_H\}$, which implies that it can be written as $K = H \cup M(\mathcal{K}_K)$ for some $H \in \mathcal{K}_H$.

Items of information q and r , according to the assumption, belong to the learning space \mathbb{H} , which has no common items of information with the learning space \mathbb{K} . Therefore $\{q, r\} \cap M(\mathcal{K}_K) = \emptyset$.

We assumed that $K \cup \{q\} \in \mathcal{K}_{K+H}$ and $K \cup \{r\} \in \mathcal{K}_{K+H}$, which means that they both belong to the set $\{H' \cup M(\mathcal{K}_K) | H' \in \mathcal{K}_H\}$. Hence, we can write them as:

$K \cup \{q\} = H \cup M(\mathcal{K}_K) \cup \{q\} = (H \cup \{q\}) \cup M(\mathcal{K}_K)$. Because we assumed, that $K \cup \{q\}$ belongs to the set $\{H' \cup M(\mathcal{K}_K) | H' \in \mathcal{K}_H\}$, we can conclude that $H \cup \{q\} \in \mathcal{K}_H$.

$K \cup \{r\} = H \cup M(\mathcal{K}_K) \cup \{r\} = (H \cup \{r\}) \cup M(\mathcal{K}_K)$. Similarly we can conclude: $H \cup \{r\} \in \mathcal{K}_H$.

\mathbb{H} is a learning space where the axiom of learning consistency holds. Therefore, from $H \cup \{q\} \in \mathcal{K}_H$ and $H \cup \{r\} \in \mathcal{K}_H$ we can conclude $H \cup \{q, r\} \in \mathcal{K}_H$.

This means that the set $(H \cup \{q, r\}) \cup M(\mathcal{K}_K)$ belongs to the set $\{H \cup M(\mathcal{K}_K) | H \in \mathcal{K}_H\}$, or equivalently, $(H \cup \{q, r\}) \cup M(\mathcal{K}_K) \in \mathcal{K}$. It follows that $K \cup \{q, r\} \in \mathcal{K}_{K+H}$.

□

Definition 8. Let $\mathbb{K}(Q_K, \mathcal{K}_K)$ and $\mathbb{H}(Q_H, \mathcal{K}_H)$ be knowledge structures that do not share any items of information. In other words: $Q_K \cap Q_H = \emptyset$. We define $Q_{K \times H} := Q_K \cup Q_H$ as a set that contains all items of both knowledge structures. Let $\mathcal{K}_{K \times H} := \{K \cup H | K \in \mathcal{K}_K, H \in \mathcal{K}_H\}$ be a set of all states we get as a union of any state from the structure \mathbb{K} and any state from the structure \mathbb{H} . If $\mathbb{K}(Q_K, \mathcal{K}_K)$ and $\mathbb{H}(Q_H, \mathcal{K}_H)$ are learning spaces, then $\mathbb{K} \times \mathbb{H} := (Q_{K \times H}, \mathcal{K}_{K \times H})$ is also a learning space called the **product of learning spaces** of \mathbb{K} and \mathbb{H} .

Theorem 3.7. *If $\mathbb{K}(Q_K, \mathcal{K}_K)$ and $\mathbb{H}(Q_H, \mathcal{K}_H)$ are learning spaces, then $\mathbb{K} \times \mathbb{H}$ is also a learning space.*

Proof. 1. We want to prove that $\mathcal{K}_{K \times H} \subseteq \mathcal{P}(Q_{K \times H})$.

We aim to show that the set of all unions of an arbitrary state from the learning space \mathbb{K} and an arbitrary state from the learning space \mathbb{H} is a subset of the power set that contains all states from both learning spaces.

Let $K' \in \mathcal{K}_{K \times H}$ be an arbitrary state. This means that $K' = K \cup H$ for some states

$K \in \mathcal{K}_K$ and $H \in \mathcal{K}_H$. Since the states K and H belong to the learning spaces, we have $K \subseteq Q_K$ and $H \subseteq Q_H$, as they are composed of some items of information from the set of all possible items of information in the respective learning spaces. It follows that the union of states is also a subset of the union of all items from the learning spaces \mathbb{K} and \mathbb{H} , that means $H \cup K \subseteq Q_K \cup Q_H$. It follows that the state $H \cup K \in \mathcal{P}(Q_{K \times H})$. We have just shown: $\mathcal{K}_{K \times H} \subseteq \mathcal{P}(Q_{K \times H})$.

2. Let's prove: $\emptyset \in \mathcal{K}_{K \times H}$.

Since $\mathbb{K}(Q_K, \mathcal{K}_K)$ and $\mathbb{H}(Q_H, \mathcal{K}_H)$ are learning spaces, we have $\emptyset \in \mathcal{K}_K$ and $\emptyset \in \mathcal{K}_H$. Therefore, $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset \in \mathcal{K}_{K \times H}$.

3. To prove accessibility, we have to show: $\forall N \in \mathcal{K}_{K \times H}, N \neq \emptyset : \exists q \in Q_{K \times H} : N \setminus \{q\} \in \mathcal{K}_{K \times H}$.

We want to prove that for every state $N \in \mathcal{K}_{K \times H}$, there exists some item q that belongs either to the learning space \mathbb{K} or \mathbb{H} , such that the state $N \setminus \{q\} \in \mathcal{K}_{K \times H}$.

Let $N \in \mathcal{K}_{K \times H}$ be an arbitrary state. Thus, we can write it as $N = K \cup H$.

Since $\mathbb{K}(Q_K, \mathcal{K}_K)$ is a learning space, there exists $q_k \in Q_K$, such that $K \setminus \{q_k\} \in \mathcal{K}_K$.

We used the accessibility axiom in \mathbb{K} .

Because the sets of items of information from learning spaces \mathbb{K} and \mathbb{H} are disjoint, we have $q_k \notin H$.

As $\mathcal{K}_{K \times H}$ contains all possible unions of two states from the learning spaces \mathbb{K} and \mathbb{H} , the state $K \setminus \{q_k\} \cup H$ is also in $\mathcal{K}_{K \times H}$. Since $q_k \notin H$, we have $K \setminus \{q_k\} \cup H = (K \cup H) \setminus \{q_k\} = N \setminus \{q_k\} \in \mathcal{K}_{K \times H}$.

Thus, we have shown the existence of an element q_k that satisfies the condition, and the statement is proven.

4. To prove learning consistency, we must show: $\forall N \in \mathcal{K}_{K \times H}, q, r \in Q_K \cup Q_H : N \cup \{q\} \in \mathcal{K}_{K \times H} \wedge N \cup \{r\} \in \mathcal{K}_{K \times H} \Rightarrow N \cup \{q, r\} \in \mathcal{K}_{K \times H}$.

Let $N \in \mathcal{K}_{K \times H}$ and $q, r \in Q_K \cup Q_H$ be arbitrary elements satisfying the assumption. Hence, $N = K \cup H$. We consider two cases:

4.1 $q, r \in Q_K$.

We have:

$$N \cup \{q\} = K \cup \{q\} \cup H \in \mathcal{K}_{K \times H} \Rightarrow K \cup \{q\} \in \mathcal{K}_K,$$

$$N \cup \{r\} = K \cup \{r\} \cup H \in \mathcal{K}_{K \times H} \Rightarrow K \cup \{r\} \in \mathcal{K}_K.$$

Since $\mathbb{K}(Q_K, \mathcal{K}_K)$ is a learning space, we have $K \cup \{q, r\} \in \mathcal{K}_K$, and it follows that $(K \cup \{q, r\}) \cup H \in \mathcal{K}_{K \times H}$.

Similarly, we can prove the case for $q, r \in Q_H$.

4.2 $q \in Q_K, r \in Q_H$.

We observe:

$$N \cup \{q\} = K \cup \{q\} \cup H \in \mathcal{K}_{K \times H} \Rightarrow K \cup \{q\} \in \mathcal{K}_K,$$

$$N \cup \{r\} = K \cup \{r\} \cup H \in \mathcal{K}_{K \times H} \Rightarrow H \cup \{r\} \in \mathcal{K}_H.$$

Therefore, $N \cup \{q, r\} = K \cup H \cup \{q\} \cup \{r\} \in \mathcal{K}_{K \times H}$.

□

4 Conclusion

In conclusion, this article has presented an approach to constructing learning spaces using operations that are either internal operations on the class of learning spaces or operations on learning spaces and subsets of their sets of information items.

The complete learning space, $\mathbb{K}(Q)$, allows the learner to acquire any combination of items of information from a given set Q without any limitations. It models a learning process, where we can learn any combination of items of information from a given set.

The lower learning space, $\mathbb{K} \setminus S$, examines the impact of excluding specific items of information, contained in the set S , from a learning space $\mathbb{K}(Q, \mathcal{H})$.

The upper learning space, \mathbb{K}/S , models a learning process, where the learners have already mastered all of the items of information, contained in the origin $M(\mathcal{H} \setminus S)$. It is obtained by removing the origin items of information from all states.

Moreover, the composite learning spaces, $\mathbb{K} + \mathbb{H}$ and $\mathbb{K} \times \mathbb{H}$, model how we can acquire knowledge from two distinct learning spaces. The sum of two learning spaces offers an insight of a learning process, where we learn consecutively - individuals first acquire all items of information from one learning space before transitioning to learning items from the other. On the other hand, the product of two learning spaces allows the learner to simultaneously learn items of information from both learning spaces. Unlike the sequential approach, there is no requirement to learn all items from one learning space before accessing the other.

Through formal definitions, we have provided an exploration of these new learning spaces. By uncovering their unique properties and applications, we aim to inspire further research in fields such as artificial intelligence, cognitive science, and education.

By expanding the landscape of learning spaces, we deepen our understanding of the learning process.

Literatura

- [1] Galun M., Bokal D., *Povabilo v prostore znanja*, Dianoia, vol. 7, no. 1(2023), 41-54.
- [2] Jerebic J., Bokal G., Galun M., Vogrinec M., Bokal D. (2023). *Razumevanje delovanja umetne inteligence je od matematike sedmega razreda oddaljeno največ 37 konceptov. 42th International Conference on Organizational Science Development: interdisciplinarity counts.* (pp. 381-402). University of Maribor Press. <https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/768>
- [3] Falmange J.C., Doignon J.P., *Learning spaces*, third ed., Springer, New York, 2011.
- [4] Eppstein D., Falmange J.C., Ovchinnikov S., *Media Theory*, first ed., Springer, New York, 2008.
- [5] Eppstein D., Upright-Quad Drawing of st-Planar Learning Spaces. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, vol. 12, no. 1(2008), 51–72.
- [6] Doignon J.P., *Learning Spaces, and How to Build them. International Conference on Formal Concept Analysis.* (pp. 1-14). Springer International Publishing. 2014.

Učni primer sočasnega izračuna ogljičnega odtisa, lastne cene in analize življenjskega cikla

Educational Example of Simultaneous Calculation of Carbon Footprint, Production price, and Life Cycle Analysis

Jan Alif, Tit Podhraški, Špela Tertinek, Drago Bokal

DataBitLab d.o.o.

Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko Univerze v Mariboru, Koroška cesta 46, 2000 Maribor
Fakulteta za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru, Koroška cesta 160, 2000 Maribor

Povzetek

Zaradi naraščajočih spodbud k trajnostnostnemu odločanju v tem prispevku spoznamo temeljni matematični model za izračun CO₂ emisij, lastne cene in LCA z uporabo matričnega računanja. Ob reševanju nalog se bomo naučili uporabljati pridobljeno znanje na primeru izdelave pice. Cilj nalog je združiti matematično razmišljanje s praktično ozaveščenostjo, da bi študentom omogočili razvoj znanja matričnega računanja in razumevanje širšega okoljsko-ekonomskega konteksta svojih odločitev. Preko konkretnega primera bomo s pomočjo programskega jezika Python ter knjižnice NumPy raziskali vlogo matričnega računanja pri modeliranju trajnostnostnih kazalnikov.

Ključne besede: CO₂ odtis, lastna cena, LCA analiza, matrično računanje, Python, trajnostne odločitve

Abstract

Due to increasing encouragement for sustainable decision making, in this contribution, we introduce a fundamental mathematical model for calculating CO₂ emissions, production cost and LCA using matrix computation. In solving tasks, we will learn to apply the acquired knowledge using the example of pizza making process. The goal of the tasks is to integrate mathematical thinking with practical awareness, enabling students to develop knowledge of matrix computation and an understanding of the broader environmental-economic context of their decisions. Through a specific example, we will explore the role of matrix computation in modeling sustainability indicators using the programming language Python and the NumPy library.

Key words: CO₂ footprint, production cost, LCA analysis, matrix calculations, Python, sustainable decisions

1 Uvod

Študentje raznih smeri pri več predmetih matematike spoznajo matrike, vektorje in njihovo množenje. Veliko se jih sreča tudi s programskim jezikom Python, kjer nekateri te vsebine tudi povežejo med seboj. V pričujočem prispevku bomo abstraktno matematično vsebino (matrično množenje) povezali s tehnologijo (programskim jezikom Python) za mod-

eliranje vsebinsko pomembnega vprašanja v sodobnih podjetjih (modeliranje poslovnega procesa in z njim povezanih številčnih kazalnikov, kot so ogljični odtis, lastna cena). Uporabljen model je soroden modelu, uporabljenem pri analizi življenjskega cikla izdelka (LCA), ki v najširšem obsegu zajema analizo vseh sestavin od njihovega zajema iz narave do njihove vrnitve v naravo.

Da se lahko osredotočimo na model opisanih procesov in njegovo implementacijo v Pythonu, smo namesto konkretne podrobnosti posameznega kompleksnega izdelka za primer izbrali preprost, enostavno razumljiv in nekoliko poenostavljen primer analize življenjskega cikla pice. V primeru nastopa posameznik, ki v domači krušni peči speče pice in zanjo tudi sam kupi in pripelje vse. Rezultat z vseh podrobnosti odpre nekaj razmislekov: doma pečena pica je ob upoštevanju porabljenega časa neprimerno dražja od pice v piceriji, če pa dela ne upoštevamo, je že po nakupu surovin cenejša. Podobno ima večji ogljični odtis. Navedeno spodbuja razmislek, kako varčevanje in omejevanje okoljskih obremenitev v kombinaciji z ekonomskimi zakonitostmi ekonomije obsega spodbuja specializacijo v aktivnostih, centralizacijo in s tem krnitev kompetenc.

2 Naloge

2.1 Vektorji in matrike v prostoru

Naloga 1 Uvozi paket NumPy. Ustvari vektor `moj_vektor` s štirimi celimi števili: 5, 8, -2, 0. Izpiši vektor `moj_vektor`. Preveri in izpiši dolžino vektorja ter vsoto vseh njegovih elementov. Spremeni tretji element na 10 in izpiši spremenjeni vektor. Na koncu izpiši povprečno vrednost elementov vektorja.

Naloga 2 Seznan se z matričnim množenjem. V katerih primerih je izvedljivo?

Naloga 3 Napiši program v Pythonu, ki bo sprejel ocene študentov za različne predmete in izračunal povprečne ocene za vsak predmet. Vsak študent ima ocene za tri predmete: matematiko, slovenščino in fiziko. Program naj uporablja matriko ocen študentov, kjer vsaka vrstica predstavlja ocene enega študenta za en predmet. Za vsak predmet podaj pet ocen.

Naloga 4 Pri tej nalogi se naučimo vstavljati podatke v matriko za bolj tekočo berljivost zapisane kode. Najprej ustvarite enotsko matriko dimenzije 3×3 in ji dodelite imena stolpcev in vrstic x, y, z . V stolpec x ter vrstico y vstavite vrednost 4, v stolpec z ter vrstico x pa vrednost 5. Te vrednosti dodajte že ustvarjeni enotski matriki. Na koncu matriko izpišite.

2.2 Matematični model procesa

V nadaljevanju bomo pridobljeno algebrasko znanje uporabili za modeliranje procesov, ki obsegajo več korakov. Take procese pogosto srečamo pri obravnavi okoljske problematike (izračun ogljičnega odtisa [4], LCA analiza [8], [9]), pri vrednotenju in optimiziranju procesov (lastna cena, načrtovanje proizvodnje) ali nasploh kjerkoli, kjer je treba realizacijo nekega tehnološkega postopka iz modela pretvoriti v praktično izvedbo (upravljanje učinkovitosti poslovanja – corporate performance management [16], celovita optimizacija poslovanja – enterprise-wide optimization [19]). Matematični model procesa temelji na predhodno razvitem univerzalnem modelu procesa [3].

Pri tovrstnem modeliranju stanje sveta predstavimo z vektorjem W_i . Indeks vektorja predstavlja zaporedno številko koraka, katerega stanje sveta opisuje. Vsaka komponenta tega vektorja predstavlja eno količino, ki nas zanima. Za tako količino–komponento vektorja mora v celotnem opisu veljati konsistentna enota.

Na vsakem koraku bomo s svojo odločitvijo posegli v stanje sveta. Uporabili bomo tehnologijo, ki jo opišemo s tehnološko matriko A_i . Način uporabe opiše odločitveni vektor d_i . Produkt matrike A_i in vektorja d_i predstavlja spremembo stanja sveta; ko ga prištejemo prejšnjemu stanju sveta W_i , dobimo novo stanje sveta W_{i+1} .

Zapisan proces povzamemo z zaporedjem enačb oblike

$$W_{i+1} = W_i + A_i d_i \quad ; i = 1, 2, \dots, n$$

kjer privzamemo, da je $W_0 = 0$ in je prvi korak

$$W_i = A_0 d_0 \quad ; i = 1$$

Model nekoliko poenostavimo s predpostavko, da vektor stanja sveta vsebuje tako komponente za predstavitev količine surovin kot tudi produktov tehnologije, matrika A_i pa pove, koliko katerega produkta nastane in koliko katere surovine se porabi, če s tehnologijo koraka i sprožimo nastanek ene enote izbranega ciljnega produkta. Ob tej predpostavki W_i predstavlja stanje sveta po i -tem koraku v obliki vektorja dimenzije m , A_i je tehnološka matrika procesa velikosti $m \times m$, d_i pa je odločitveni vektor velikosti m , ki nam pove, kaj želimo v danem koraku pridobiti.

To enačbo bo najlažje razumeti na primeru, ki je vsem dobro razumljiv, kot je npr. peka pice. Zaradi poenostavitve bomo predpostavili, da je testo pice narejeno samo iz moke in vode, omaka samo iz paradižnikove mezge in vode in nadev samo iz sira. Pica bo pečena v krušni peči, zato bomo potrebovali še nekaj lesa. Tako bo vektor stanja sveta dimenzije 15. Vrednosti, ki bodo nastopale v tem vektorju, so naslednje: Pica, Testo, Omaka, Nadev, Moka, Mezga, Sir, Voda, CO₂, Metan (CH₄), Les, Električna, Čas, Denar, Razdalja.

Če želimo zajeti celoten proces, moramo gledati na proces od začetka do konca. Proces izdelave pice se začne pri izdelavi surovin, ki se bodo uporabile za izdelavo pice.

Naloga 5 Glede na zgornji opis poenostavljenega postopka za izdelavo pice potrebujemo surovine, ki jih moramo najprej proizvesti. Recimo, da želimo proizvesti 0.3 kg moke, 0.2 kg mezge, 0.1 kg sira, 2 l vode in 4 kg lesa. Na prvem koraku nas zanimajo le proizvedeni plini, v našem primeru CO₂ in metan. Naslednji podatki predstavljajo proizvod plinov glede na posamično surovino: Pri proizvodnji moke se ustvari 0.65 kg CO₂ emisij na kg moke [7]. Pri mezgi se proizvede 1.82 kg CO₂e/kg [7] in pri siru 27.9 kg CO₂e/kg [13] in 20 g CH₄/kg [18] CO₂, ki ga drevo porabi pri rasti, se bo izničilo pri kurjenju lesa. Pri vodi se proizvede 0.298 g CO₂e/l [6].

Izračunaj vektor W_1 , ki predstavlja stanje sveta po izdelavi teh surovin. Uporabi enačbo $W_1 = A_0 d_0$.

Naloga 6 V drugem koraku izdelave pice potrebujemo sestavine, ki jih moramo kupiti. Trgovina, kjer smo opravili nakup, je oddaljena 10 km, zato smo se do tja odpeljali z

avtomobilom, ki proizvede 192 g CO₂e/km [5] in 0.01 g CH₄/km [10] ter porabi 0.084 €/km. Cena surovin je naslednja: Moka stane 0.79 €/kg, mezga 1.29 €/500 g, sir 9.29 €/kg, les 0.49 €/kg in voda 0.59 €/l. Poleg tega je posameznik, ki peče pico, za celoten nakup porabil 85 minut, pri čemer njegova urna postavka znaša 5.55 €.

Izračunaj stanje sveta po opravljenem nakupu, pri čemer upoštevaj, da smo se za nakup odpravili z avtomobilom, kupili sestavine ter porabili čas in denar za nakup.

Naloga 7 V tretjem koraku je treba izdelati tri osnovne komponente pice: testo, omako ter nadev. Testo naredimo iz 300 g moke in 0.2 litrov vode. Za izdelavo omake smo porabili 200 g mezge in 0.1 litra vode, za izdelavo nadeva pa smo porabili 100 g sira. Celoten postopek traja 80 minut. Upoštevaj, da se porabi 10 W elektrike na uro zaradi luči [17]. Ne pozabi upoštevati urne postavke za delo.

Naloga 8 Četrty korak predstavlja postopek peke pice. Celoten postopek traja 20 minut in pridobimo 1 pico, pri čemer porabimo 1 testo, 1 omako in 1 nadev. Na pico se proizvede 80 g CH₄ [15] zaradi kurjenja lesa. Pri peki se porabi 4 kg lesa. Ne pozabi upoštevati urne postavke posameznika ter porabljene elektrike zaradi luči.

Naloga 9 V petem koraku pico pojemo. Za obrok smo porabili 20 minut in pojedli smo pico. Upoštevaj urno postavko.

Naloga 10 V zadnjem koraku izračunamo produkte, ki so nastali zaradi porabe elektrike, proizvedene v termoelektrarni. Tukaj bomo vektor, ki predstavlja stanje sveta, množili s tehnološko matriko, namesto da bi ga prišteli k produktu odločilnega vektorja in tehnološke matrike. To naredimo zato, da lahko izračunamo prej omenjene produkte. Za vsakih 1 kWh elektrike se proizvede 950 g CO₂ [1], 129 g CH₄ [14] in stane 0.157 €[2].

Naloga 11 Izračunaj emisije v primeru jedrske elektrarne, če veš, da cena elektrike ostane enaka. Na 1 kWh elektrike se v tem primeru proizvede 25 g CO₂ [12]. Jedrska elektrarna ne proizvaja metana, cena elektrike ostane enaka.

3 Namigi

Namig za nalogo 1:

Dokumentacija za boljše poznavanje NumPy funkcij za delo z matrikami [11].

Namig za nalogo 3:

Matriki lahko množimo, kadar število stolpcev prve matrike ustreza številu vrstic druge matrike. Konkretno, če imamo matriko A dimenzije $m \times n$ in matriko B dimenzije $n \times p$, potem lahko izvedemo matrično množenje in dobimo matriko C dimenzije $m \times p$. Ustvarjena matrika za ocene je dimenzije 3×5 , matrika za množenje pa 1×5 . Za uspešno množenje spremenimo matriko 1×5 v 5×1 z uporabo funkcije `.reshape((-1, 1))`.

Namig za nalogo 5:

Tehnološka matrika A je v začetnem stanju enaka matriki I dimenzije 15×15 . Na ustrezna mesta ji vnosi podatke o emisijah, pazi na enote.

Če imamo matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.03 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in vektor $d_1 = [1, 0, 0]^T$. Vrednost 1 v vektorju predstavlja, da želimo pridobiti 1 kg moke, zadnji element v vektorju pa predstavlja CO₂ emisije v gramih. Vrednost 0.03 pove, koliko gramov CO₂ se proizvede pri izdelavi 1 kg moke. Če pomnožimo Ad_1 , dobimo vektor $[1, 0, 0.03]^T$, ki pove, da imamo 1 kg moke ter 0.03 g CO₂, ki smo ga pridobili pri izdelavi moke.

Namig za nalogo 6:

Za pravilno vrednost končnega vektorja morajo biti na vseh diagonalnih elementih tehnološke matrike A , ki smo jih izdelali v prvem koraku, vrednosti 0.

Ne pozabite prišteti stanja sveta prvega koraka.

Za pravi izračun plačila delavcu zapišemo porabljen čas v odločitveni vektor. Enako naredimo z razdaljo zaradi izračuna CO₂, metana in denarja porabljenega za vožnjo.

Namig za nalogo 7:

Za lažjo izvedbo obravnavajte vsak stolpec kot recept, pri čemer vrednosti predstavljajo količine specifičnih sestavin, uporabljenih za izdelavo končnega izdelka, ki ga prikazuje ta stolpec. Hočemo izdelati 3 komponente: testo, omako ter nadev. Za vsako najдите stolpec, ki ga predstavlja, in v stolpec vnesite podatke o porabljenih sestavinah za njegovo izdelavo.

Porabljen čas za vsak postopek zanemarimo, potrebujemo samo skupen porabljen čas zaradi poenostavitve.

Namig za nalogo 8:

Da porabimo testo, nadev in omako, uporabimo enak način kakor pri prejšnjem postopku za porabo moke, sira in mezge.

4 Rešitve

Rešitev za nalogo 1

```
[ ]: import numpy as np

# Ustvari vektor moj_vektor.
moj_vektor = np.array([5, 8, -2, 0])

# Natisni vektor moj_vektor.
print("Vektor moj_vektor:", moj_vektor)

# Dolžina vektorja.
dolzina_vektorja = len(moj_vektor)
print("Dolžina vektorja:", dolzina_vektorja)
```

```

# Vsota vseh elementov vektorja.
vsota_elementov = np.sum(moj_vektor)
print("Vsota elementov vektorja:", vsota_elementov)

# Spremeni tretji element vektorja na 10.
moj_vektor[2] = 10
print("Spremenjeni vektor moj_vektor:", moj_vektor)

# Povprečna vrednost elementov vektorja.
povprecje = np.mean(moj_vektor)
print("Povprečna vrednost elementov vektorja:", povprecje)

```

Vektor moj_vektor: [5 8 -2 0]
Dolžina vektorja: 4
Vsota elementov vektorja: 11
Spremenjeni vektor moj_vektor: [5 8 10 0]
Povprečna vrednost elementov vektorja: 5.75

Rešitev za nalogo 3

```

[ ]: import numpy as np

# Korak 1: Ustvari matriko ocen študentov.
ocene_matrika = np.array([
    [7, 8, 8, 10, 9],
    [8, 9, 9, 10, 9],
    [9, 8, 8, 5, 9]
])

# Prikaži izvorno matriko ocen.
print("Izvirna matrika ocen študentov:")
print(ocene_matrika)

# Korak 2: Pomnoži matriko z vektorjem, da izračunaš
↳ povprečne ocene za vsak predmet.
# Vektor [1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5] povprečne ocene za
↳ vsak predmet, 5 ocen pomeni 5 elementov.
utezi_vektor = np.array([1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5])

# Vektorju spremenimo obliko tako, da bo imel dimenzije
↳ 5x1.
utezi_vektor = utezi_vektor.reshape((-1, 1))

# Izračunaj povprečne ocene za vsak predmet s pomočjo
↳ matričnega množenja.

```

```
povprecne_ocene_predmetov = np.dot(ocene_matrika,
    ↪ utezi_vektor)

# Prikaži vektor povprečnih ocen.
print("\nPovprečne ocene za vsak predmet:")
print(povprecne_ocene_predmetov)
```

Izvirna matrika ocen študentov:

```
[[ 7  8  8 10  9]
 [ 8  9  9 10  9]
 [ 9  8  8  5  9]]
```

Povprečne ocene za vsak predmet:

```
[[8.4]
 [9.0]
 [7.8]]
```

Rešitev za nalogo 4

```
[ ]: import numpy as np

# Ustvari enotsko matriko 3x3.
enotska_matrika = np.identity(3)

# Poimenuj stolpce in vrstice.
x, y, z = range(3)

# Vstavi vrednost 4 v stolpec x in vrstico y.
enotska_matrika[x][y] = 4

# Vstavi vrednost 5 v stolpec z in vrstico x.
enotska_matrika[z][x] = 5

# Izpiši končno matriko.
print(enotska_matrika)
```

```
[[1.  4.  0.]
 [0.  1.  0.]
 [5.  0.  1.]]
```

Rešitev za nalogo 5

```
[ ]: import numpy as np
# Izdelava surovin.
# Definirane pozicije vsakega elementa.
```



```

inxPica, inxTesto, inxOmaka, inxNadev, inxMoka, inxMezga,
↳ inxSir, inxVoda, inxCO2, inxMetan, inxLes,
↳ inxElektrika, inxČas, inxDenar, razdalja = range(15)

# Vektor, ki pove kaj želimo dobiti.
odlocitveni_vektor = np.zeros(15)
odlocitveni_vektor[inxMoka] = 0.3      #kg
odlocitveni_vektor[inxMezga] = 0.2    #kg
odlocitveni_vektor[inxSir] = 0.1      #kg
odlocitveni_vektor[inxVoda] = 2       #l
odlocitveni_vektor[inxLes] = 4        #kg

print("Odločitveni vektor:")
print(odlocitveni_vektor)

# Tehnološka matrika.
tehnoloska_matrika = np.array([
    [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], # pica
    [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], #
↳ testo
    [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], #
↳ omaka
    [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], #
↳ nadev
    [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], # moka
    [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], #
↳ mezga
    [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], # sir
    [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], # voda
    [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], # CO2
    [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], #
↳ metan
    [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0], # les
    [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0], #
↳ elektrika
    [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0], # čas
    [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0], #
↳ denar
    [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1], #
↳ razdalja
], dtype=float)

tehnoloska_matrika[inxCO2, inxMoka] = 0.65

tehnoloska_matrika[inxCO2, inxMezga] = 1.82

```

```
tehnoloska_matrika[inxCO2,inxSir] = 27.9
tehnoloska_matrika[inxMetan,inxSir] = 20

tehnoloska_matrika[inxCO2,inxVoda] = 0.000298

# Prvo stanje sveta.
odlocitveni_vektor_transponiran = odlocitveni_vektor.
↳reshape((-1, 1))
koncni_vektor = np.matmul(tehnoloska_matrika,
↳odlocitveni_vektor_transponiran)
koncni_vektor = koncni_vektor.reshape((-1, 1))

print("Stanje sveta:")
print(np.transpose(koncni_vektor))
```

Odločitveni vektor:

```
[0.  0.  0.  0.  0.3 0.2 0.1 2.  0.  0.  4.  0.  0.  0.  0.]
↳]
```

Stanje sveta:

```
[[0.      0.      0.      0.      0.3      0.2      0.1
↳   2.
   3.349596 2.      4.      0.      0.      0.      0.
↳   ]]
```

Rešitev za nalogo 6

```
[ ]: # Dobava.

odlocitveni_vektor = np.zeros(15)
odlocitveni_vektor[inxMoka] = 0.3      #kg
odlocitveni_vektor[inxMezga] = 0.2    #kg
odlocitveni_vektor[inxSir] = 0.1     #kg
odlocitveni_vektor[inxVoda] = 2      #l
odlocitveni_vektor[inxLes] = 4       #kg
odlocitveni_vektor[razdalja] = 20    #km
odlocitveni_vektor[inxČas] = 85     #min

print("Odločitveni vektor:")
print(odlocitveni_vektor)

tehnoloska_matrika = np.identity(15, dtype=float)

# Nastavimo na 0 tiste, ki smo jih v prvem koraku
↳proizvedli.
tehnoloska_matrika[inxMoka,inxMoka] = 0
tehnoloska_matrika[inxMezga,inxMezga] = 0
```

```

tehnoloska_matrika[inxSir,inxSir] = 0
tehnoloska_matrika[inxVoda,inxVoda] = 0
tehnoloska_matrika[inxLes,inxLes] = 0

# Cena sestavin.
tehnoloska_matrika[inxDenar,inxMoka] = -0.79
tehnoloska_matrika[inxDenar,inxMezga] = -2.58
tehnoloska_matrika[inxDenar,inxSir] = -9.29
tehnoloska_matrika[inxDenar,inxVoda] = - 0.59
tehnoloska_matrika[inxDenar,inxLes] = - 0.49

# Vožnja.
tehnoloska_matrika[inxDenar,razdalja] = -0.084
tehnoloska_matrika[inxCO2,razdalja] = 0.192
tehnoloska_matrika[inxMetan,razdalja] = 0.01

# Delavec.
tehnoloska_matrika[inxDenar,inxČas] = -0.093

# Drugo stanje sveta.
odlocitveni_vektor_transponiran = odlocitveni_vektor.
↳reshape((-1, 1))
temp_vector = np.matmul(tehnoloska_matrika,↳
↳odlocitveni_vektor_transponiran)
koncni_vektor += temp_vector
koncni_vektor = koncni_vektor.reshape((-1, 1))
print("Stanje sveta:")
print(np.transpose(koncni_vektor))

```

Odločitveni vektor:

```

[ 0.  0.  0.  0.  0.3  0.2  0.1  2.  0.  0.  4.  0.↳
↳ 85.  0.
 20. ]

```

Stanje sveta:

```

[[ 0.  0.  0.  0.  0.3  0.3  0.3  0.3  0.3  0.3  0.3  0.3↳
↳0.2
 0.1  2.  7.189596  2.2  4.  4.  4.  4.  4.  4.  4.↳
↳0.
 85. -14.407  20.  ]]

```

Rešitev za nalogo 7

```

[ ]: # Izdelava omake, nadeva in testa.

odlocitveni_vektor = np.zeros(15)
odlocitveni_vektor[inxTesto] = 1

```

```
odlocitveni_vektor[inxOmaka] = 1
odlocitveni_vektor[inxNadev] = 1
odlocitveni_vektor[inxČas] = 80

print("Odločitveni vektor:")
print(odlocitveni_vektor)

tehnoloska_matrika = np.identity(15, dtype=float)

tehnoloska_matrika[inxMoka,inxTesto] = -0.3
tehnoloska_matrika[inxVoda,inxTesto] = -0.2

tehnoloska_matrika[inxMezga,inxOmaka] = -0.2
tehnoloska_matrika[inxVoda,inxOmaka] = -0.1

tehnoloska_matrika[inxSir,inxNadev] = -0.1

tehnoloska_matrika[inxElektrika,inxČas] = 0.17

tehnoloska_matrika[inxDenar,inxČas] = -0.093

# Tretje stanje sveta.
odlocitveni_vektor_transponiran = odlocitveni_vektor.
↳reshape((-1, 1))
temp_vector = np.matmul(tehnoloska_matrika,↳
↳odlocitveni_vektor_transponiran)
koncni_vektor += temp_vector
koncni_vektor = koncni_vektor.reshape((-1, 1))
print("Stanje sveta:")
print(np.transpose(koncni_vektor))
```

Odločitveni vektor:

```
[ 0.  1.  1.  1.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  80.  0.  0.
↳]
```

Stanje sveta:

```
[[ 0.          1.          1.          1.          0.          ↳
↳0.
   0.          1.7         7.189596    2.2         4.          ↳
↳13.6
  165.         -21.847     20.          ]]
```

Rešitev za nalogo 8

```
[ ]: # Peka pice.

odlocitveni_vektor = np.zeros(15)
```

```

odlocitveni_vektor[inxPica] = 1
odlocitveni_vektor[inxČas] = 20

print("Odločitveni vektor:")
print(odlocitveni_vektor)

tehnoloska_matrika = np.identity(15, dtype=float)

tehnoloska_matrika[inxTesto, inxPica] = -1
tehnoloska_matrika[inxOmaka, inxPica] = -1
tehnoloska_matrika[inxNadev, inxPica] = -1
tehnoloska_matrika[inxMetan, inxPica] = 75
tehnoloska_matrika[inxLes, inxPica] = -4

tehnoloska_matrika[inxDenar, inxČas] = -0.093

tehnoloska_matrika[inxElektrika, inxČas] = 0.17

# Četrto stanje sveta.
odlocitveni_vektor_transponiran = odlocitveni_vektor.
↳ reshape((-1, 1))
temp_vector = np.matmul(tehnoloska_matrika,
↳ odlocitveni_vektor_transponiran)
koncni_vektor += temp_vector
koncni_vektor = koncni_vektor.reshape((-1, 1))
print("Stanje sveta:")
print(np.transpose(koncni_vektor))

```

Odločitveni vektor:

```
[ 1.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  20.  0.  0.
↳ ]
```

Stanje sveta:

```
[ [ 1.          0.          0.          0.          0.          0.          0.          0.          0.          0.          0.          0.          0.          0.          0.          0.
↳ 0.
    0.          1.7          7.189596  77.2          0.          0.          0.          0.          0.          0.          0.          0.          0.          0.          0.
↳ 17.
    185.         -23.707         20.          20.          0.          0.          0.          0.          0.          0.          0.          0.          0.          0.          0.
↳ ] ]
```

Rešitev za nalogo 9

```
[ ]: # Uživanje pice.

odlocitveni_vektor = np.zeros(15)
odlocitveni_vektor[inxPica] = 1
odlocitveni_vektor[inxČas] = 20

```

```
print("Odločitveni vektor:")
print(odlocitveni_vektor)

tehnoloska_matrika = np.identity(15, dtype=float)

tehnoloska_matrika[inxPica,inxPica] = -1
tehnoloska_matrika[inxDenar,inxČas] = -0.093

# Peto stanje sveta.
odlocitveni_vektor_transponiran = odlocitveni_vektor.
    ↳reshape((-1, 1))
temp_vector = np.matmul(tehnoloska_matrika,
    ↳odlocitveni_vektor_transponiran)
koncni_vektor += temp_vector
koncni_vektor = koncni_vektor.reshape((-1, 1))
print("Stanje sveta:")
print(np.transpose(koncni_vektor))
```

Odločitveni vektor:

```
[ 1.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0. 20.  0.  0.
    ↳]
```

Stanje sveta:

```
[[ 0.          0.          0.          0.          0.          0.          0.          0.
    ↳0.
   0.          1.7         7.189596  77.2         0.          0.          0.
    ↳17.
  205.         -25.567      20.          0.          0.          0.          0.
    ↳]]
```

Rešitev za nalogo 10

```
[ ]: # Stroški in emisije elektrike za termo elektrarno.

tehnoloska_matrika = np.identity(15, dtype=float)

tehnoloska_matrika[inxCO2,inxElektrika] = 0.00095
tehnoloska_matrika[inxMetan,inxElektrika] = 0.129
tehnoloska_matrika[inxDenar,inxElektrika] = -0.000157

# Šesto stanje sveta.
koncni_vektor = np.matmul(tehnoloska_matrika,
    ↳koncni_vektor)
koncni_vektor = koncni_vektor.reshape((-1, 1))
print("Stanje sveta:")
print(np.transpose(koncni_vektor))
```

Stanje sveta:

```
[[ 0.          0.          0.          0.          0.          0.          0.
  ↪0.
   0.          1.7          7.205746  79.393          0.          0.
  ↪17.
  205.         -25.569669  20.          0.          0.          0.
  ]]
```

Rešitev za nalogo 11

```
[ ]: # Stroški in emisije elektrike za jedersko elektrarno.

tehnoloska_matrika = np.identity(15, dtype=float)

tehnoloska_matrika[inxCO2,inxElektrika] = 0.000025
tehnoloska_matrika[inxDenar,inxElektrika] = -0.000157

# Šesto alternativno stanje sveta.
koncni_vektor = np.matmul(tehnoloska_matrika,
  ↪koncni_vektor)
koncni_vektor = koncni_vektor.reshape((-1, 1))
print("Stanje sveta:")
print(np.transpose(koncni_vektor))
```

Stanje sveta:

```
[[ 0.          0.          0.          0.          0.          0.          0.
  ↪0.
   0.          1.7          7.190021  77.2          0.          0.
  ↪17.
  205.         -25.569669  20.          0.          0.          0.
  ]]
```

5 Zaključek

Z reševanjem teh nalog smo predstavili, kako lahko matrično računanje uporabimo za izračun ogljičnega odtisa, lastne cene ter LCA v praktičnem kontekstu izdelave pice, obenem pa smo raziskovali širši spekter vpliva naših odločitev. Pomembno spoznanje tega postopka je, kako lahko s pomočjo matematičnih orodij, kot so matrike in matrično množenje, ter računalniških orodij, kot so Python in NumPy knjižnica, izračunamo ogljični odtis, lastno ceno in izvedemo poenostavljeno analizo življenjskega cikla (LCA).

Vendar pa je ključno razumeti, da ta postopek ni omejen zgolj na izdelavo pice. Naša pridobljena znanja o izračunu lastne cene in vplivu na okolje so prenosljiva na različne industrije in procese, za katere je ogljični odtis, lastna cena in analiza življenjskega cikla smiselna. Sposobnost kvantificiranja vpliva odločitev na okolje in ekonomijo je ključna za oblikovanje trajnostnih pristopov v številnih panogah.

Matrično računanje predstavlja temelj za analizo kompleksnih sistemov, kar omogoča boljše razumevanje vzrokov in posledic odločitev. S pridobljenim znanjem lahko študentje postanejo inovativni raziskovalci in odločevalci, ki prispevajo k trajnostnim rešitvam na različnih področjih. Matrično računanje tako postaja ključno orodje za oblikovanje odgov-

ornih odločitev, ki ne le vplivajo na okolje, ampak tudi na družbo kot celoto. S povezovanjem raziskovalnih pristopov s širšimi družbenimi vidiki, lahko študentje razvijejo celovit pogled na vpliv svojega dela na okolje.

Literatura

- [1] Electricity Generation and Related CO₂ Emissions (12 Feb. 2016). Planète Énergies. Pridobljeno na: <https://www.planete-energies.com/en/media/article/electricity-generation-and-related-co2-emissions#:~:text=Electricity%20generation%20is%20responsible%20for,gas%2Dfired%20power%20plants3>.
- [2] Electricity Prices for Household Consumers (2023). Bi-annual Data from 2007 Onwards.
- [3] Fic Žagar, P., Bokal, D. (2019). Primerjava uspešnosti percepcijskih strategij v različnih okoljih, Ekosistem organizacij v dobi digitalizacije: konferenčni zbornik, 38th International Conference on Organizational Science Development, Maribor: Univerzitetna založba Univerze, 259/272.
- [4] GHG Protocol (2004). A Corporate Accounting and Reporting Standard. World Resources Institute & World Business Council for Sustainable Development. Pridobljeno na: <https://ghgprotocol.org/standards/>
- [5] Gonzales, S. (2024, January 8). "How Much CO₂ Does a Car Emit per Mile: List by Type, Size, Energy Source." Pridobljeno na: <https://8billiontrees.com/carbon-offsets-credits/how-much-co2-does-a-car-emit-per-mile/#:~:text=CO2%20emissions%20can%20also,of%20CO2%20per%20km>.
- [6] Griffiths-Sattenspiel, B., in Wilson, W. (2009). The carbon footprint of water. River Network, Portland.
- [7] HEALabel. (2022) Carbon footprints of foods and ingredients list. Pridobljeno na: www.healabel.com/carbon-footprints-of-food-list/.
- [8] ISO 14040; Environmental Management: LCA Principles and Framework. 2006. Pridobljeno na: <https://www.iso.org/standard/37456.html>.
- [9] ISO 14044; Environmental Management: LCA Requirements and Guidelines. 2006. Pridobljeno na: <https://www.iso.org/standard/38498.html>.
- [10] Nam, E. K., Jensen, T. E., in Wallington, T. J. (2004, February 26). "Methane Emissions from Vehicles." Environmental Science & Technology. Pridobljeno na: <https://pubs.acs.org/doi/10.1021/es034837g>
- [11] Numpy dokumentacija, vir: <https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.matrix.html>
- [12] Pomponi, F., in Hart, J. (2021). The greenhouse gas emissions of nuclear energy—Life cycle assessment of a European pressurised reactor. Applied Energy, 290, 116743.
- [13] Poore, J., in Nemecek, T. (2018). Reducing food's environmental impacts through producers and consumers. Science, 360(6392), 987/992.
- [14] Quaschnig, V., in Siegel, B. (November 2022). "CO₂ Emission Factors Database." Volker Quaschnig's Website. Pridobljeno na: https://www.volker-quaschnig.de/datserv/CO2-spez/index_e.php

- [15] Robinson, D. L. (2011). Australian wood heaters currently increase global warming and health costs. *Atmospheric Pollution Research*, 2(3), 267/274.
- [16] TechTarget. (2020, February). Corporate Performance Management. Pridobljeno na: <https://www.techtarget.com/searchdatamanagement/definition/corporate-performance-management>
- [17] U.S. Energy Information Administration. (2020). Frequently Asked Questions (FAQ).
- [18] Valio. (2022, June 15). Total Methane Production in Milk Production Reduced by 57% in 60 Years, Further Reductions Still Possible. Pridobljeno na: [https://www.valio.com/news/total-methane-production-in-milk-production-reduced-by-57-per-cent-in-60-years-further-reductions-still-possible/#:~:text=Methane %20produced%20by%20ruminants%20is,an%20adult%20animal%20is%20considered.](https://www.valio.com/news/total-methane-production-in-milk-production-reduced-by-57-per-cent-in-60-years-further-reductions-still-possible/#:~:text=Methane%20produced%20by%20ruminants%20is,an%20adult%20animal%20is%20considered.)
- [19] Zhang, Q., in Grossmann, I. E. (2016). Enterprise-wide optimization for industrial demand side management: Fundamentals, advances, and perspectives. *Chemical Engineering Research and Design*, 116, 114/131.

VABILO AVTORJEM

Dianoia (grško διάνοια) po Platonu označuje védenje, razmišljanje o modelih stvarnosti, o naravoslovno-matematičnih in tehničnih temah. Uporabljajo ga matematiki (modeliranje) in znanstveniki (formuliranje problema), inženirji (načrtovanje sistema). Opredeljuje kompetenco, proces ali rezultat diskurzivnega razmišljanja, za razliko od neposrednega razumevanja obravnavane tematike. Aristotel to védenje naprej razdeli na teoretično (episteme) in praktično (phronesis).

Dianoia po Platonu torej označuje vmesni nivo človeškega spoznanja, prehod od intuitivnih občutkov do najglobljega spoznanja dejanskosti. Tako je idealna oznaka za objave v pričujoči reviji, ki povezujejo teoretična, znanstvena izhodišča z njihovo uporabno namembnostjo. Študentje, avtorji teh člankov, ste na prehodu od učenja k delu, od teoretičnega h konkretnemu, ki vas bo pripeljalo do kruha, do dela, s katerim boste odigrali svojo vlogo v družbi. Na tem prehodu pa poleg znanja, ki ga ponuja redno izobraževanje, potrebujete tudi izkušnje s konkretnih izzivov in mehke kompetence sodelovanja v ekipah delodajalcev, k čemur vas spodbuja in vam pri tem pomaga revija Dianoia.

V reviji bomo objavljali poljudne in strokovne članke s področja naravoslovja, matematike ali znanosti, ki uporabljajo znanja teh področij. Ciljna publika bralcev so v prvi vrsti delodajalci, ki tovrstna znanja potrebujejo in želijo izvedeti, kaj je kdo zanimivega razmislil na njihovem področju. V drugi vrsti so ciljna publika študentje, ki iščejo zamisli za svojo poklicno pot in lahko v reviji najdejo navdih za lastna raziskovanja in iskanje stikov s trgom dela.

Za kakovost izdelkov bo skrbel uredniški odbor in uredniški svet, v katerih so vrhunski strokovnjaki, povezani s področji, ki jih revija obravnava. Članki bodo anonimno recenzirani, o objavi pa na podlagi recenzije odloča uredniški odbor. Priporočljivo je, da avtorji besedilo spremenijo v skladu s priporočili recenzentov in da popravljeni članek z utemeljitvijo sprejema ali zavrnitve sprememb ponovno pošljejo v pregled. Uredništvo lahko objavo članka zavrne, če vsebinsko ali po merilih kakovosti ne ustreza standardom revije, o čemer avtorje obvestimo v najkrajšem možnem času.

S prispevkom v reviji bodo avtorji spodbujali širjenje znanja s področja naravoslovja in matematike ter tehnike oziroma izobraževanja teh področij in svoje poglede prenašali na trg dela in na prihajajoče generacije.

NAVODILA AVTORJEM

Avtorje prosimo, da pri pripravi članka upoštevajo naslednja navodila.

Če je članek napisan v slovenščini, naj ima angleški prevod naslova, povzetka in ključnih besed. Veseli bomo tudi prispevkov v angleščini, ki pa morajo imeti naslov, razširjen povzetek v obsegu 300 – 400 besed in ključne besede v slovenščini. Ključnih besed naj bo do šest.

Prispevki naj bodo zanimivi za širši krog bralcev. Ključna je intuitivna predstavitev zamisli in rezultatov, podrobnosti pa lahko ostanejo prihranjene za morebitni znanstveni članek, ki bi bil nadgradnja članka, objavljenega v reviji Dianoia.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (avtorjev) in sedež ustanove, kjer avtor(ji) dela(jo). Sledi naj povzetek, z največ 150 besedami, seznam ključnih besed in besedilo, ki ne presega 3000 besed. Besedilo naj bo zapisano v urejevalniku besedil MS Word 2010 oz. kasnejši ali LaTeX in naj uporablja objavljeno predlogo. Slike in tabele morajo biti oštevilčene in imeti natančen opis, da jih lahko razumemo brez preostalega besedila. Slike v elektronski obliki naj bodo visoke kakovosti v formatu PNG ali JPEG.

Prispevek v PDF obliki pošljite na naslov dianoia@um.si z zadevo: »Za revijo Dianoia«. Če bo sprejet v objavo, vas bomo prosili za izvirno obliko prispevka.