LETNIK 7 (2023) – ŠT. 2

ISSN 2536-3565

Univerza v Mariboru

Fakulteta za naravoslovje in matematiko

D I A N O I A

REVIJA ZA UPORABO NARAVOSLOVNO-MATEMATIČNIH ZNANOSTI

ISSN	**2536-3565**
Naslov publikacije/Title	**DIANOIA**, revija za uporabo naravoslovnih in matematičnih znanosti
	DIANOIA, journal for applications of natural and mathematical sciences
Letnik/Volume	**7**
Leto/Year	**2023 (september)**
Številka/Number	**2**
Založnik in izdajatelj/	Univerzitetna založba Univerze v Mariboru, Slomškov trg 15, 2000 Maribor, Slovenija,
Published & Issued by	http://press.um.si/, zalozba@um.si

Oblikovanje/Design	Amadeja Bratuša
Lektoriranje/Proofreading	Ljudmila Bokal
Sedež uredništva/Address	FNM UM, Koroška cesta 160, 2000 Maribor
e-mail	dianoia@um.si
internet/web	www.fnm.um.si
Tisk/Printed by	FNM UM
Leto izida/Year	2023
Datum natisa/Published	2023
Naklada/Nr. of Copies	100 izvodov

Revija izhaja dvakrat letno, predvidoma aprila in septembra.

Volume 7 Number 2 September 2023

Kazalo / Table of Contents

UVODNIK/EDITORIAL

Dianoia 2 (2023) 5–6

Prevzemanje odgovornosti je pot do zrelosti / Accountability is the road to maturity

Špela Kajzer
Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Koroška cesta 160, 2000 Maribor, Slovenija

Accountability separates the wishers in life from the action-takers that care enough about their future to account for their daily actions.
-John Di Lemme

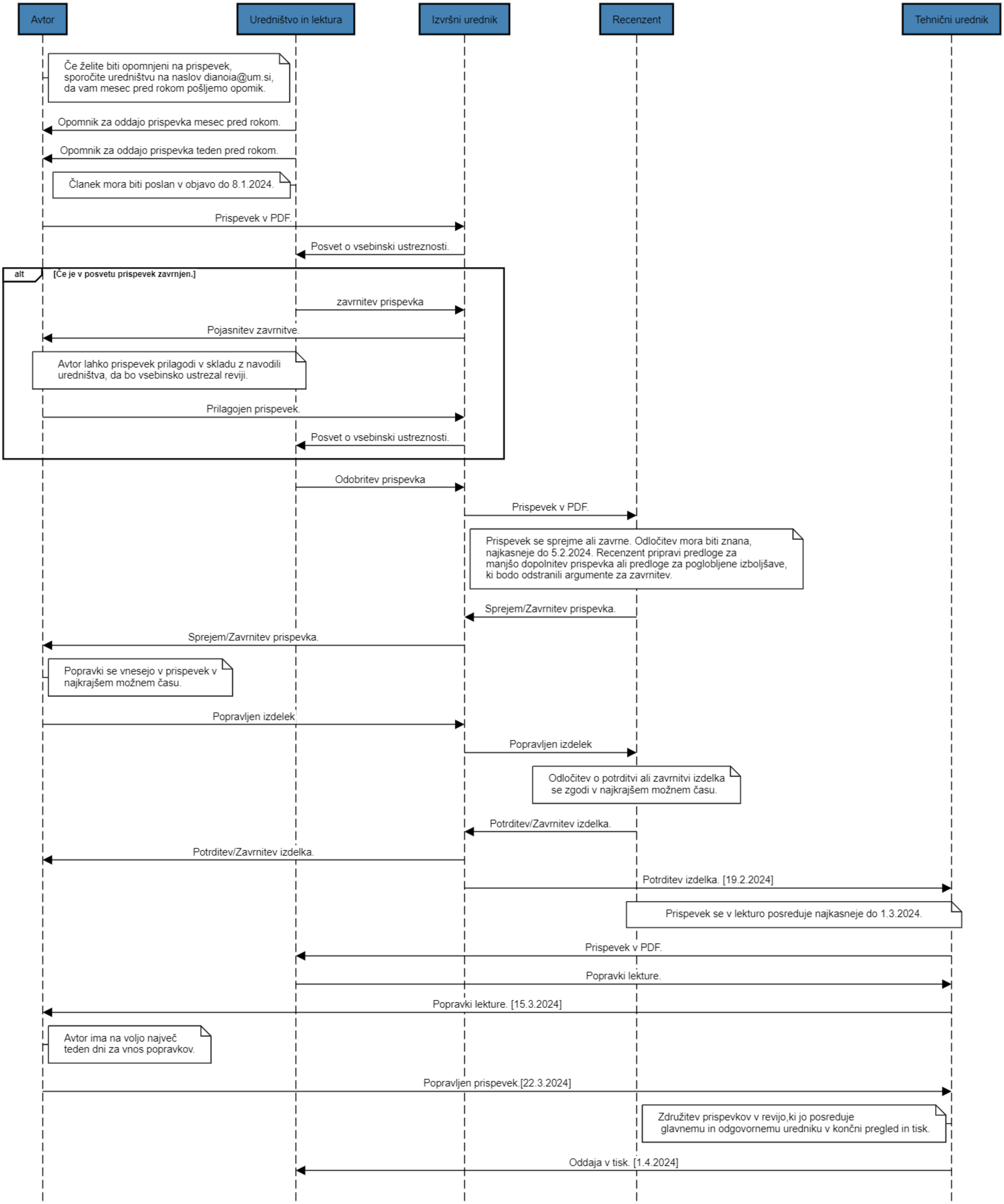
Študentska leta so čas oblikovanja, učenja in raziskovanja, hkrati pa so tudi leta, v katerih se posameznik preoblikuje iz otroka/učenca/dijaka v odraslo, samostojno osebo. S tem je tekom študija poleg potrebnih kompetenc iz učne snovi nujno tudi pridobivanje veščin, kot so samostojno razmišljanje, inovativnost ter sprejemanje odgovornosti. Samostojno delo študentov omogoča, da stopimo iz sence predavateljev in knjig ter prevzamemo odgovornost za lastno učenje in raziskovanje, kar nas uči vztrajnosti, organizacije in kritičnega razmišljanja, je priložnost za rast in razvoj in nikakor ne le nujnost (ali nadloga), ki bi jo od nas zahtevali profesorji. V študijskem letu 2022/23 se je na Fakulteti za naravoslovje in matematiko Maribor ravno s tem namenom izvedel projekt ŠIPK (Študentski Inovativni Projekt za družbeno Korist) z naslovom Podnebna nevtralnost, optimizacija poslovnih procesov in zrelostni modeli v tovarnah prihodnosti, ki je s pomočjo uporabe sodobnih pedagoških spoznanj (Bloomova taksonomija) in različnih sodobnih pedagoških pristopov poskušal opolnomočiti študente za prevzemanje odgovornosti za sprejete naloge v dinamičnem delovnem okolju ter za samostojno raziskovanje projektnih vsebin. Tekom projekta se je pokazal razkorak med tradicionalnimi pedagoškimi metodami, ki slonijo na bolj avtoritarnem odnosu med učencem in učiteljem in so bile udeležencem bolj poznane, ter sodobnimi, zgoraj omenjenimi metodami, ki vpeljujejo samostojen odnos med posrednikom ter prejemnikom znanja. Zaradi dejstva, da so tradicionalne metode prevladovale v študijskem procesu sodelujočih, se je pokazala potreba po 'učenju' samostojnosti v delovnem procesu, prav tako pa tudi potreba po dvigovanju stopnje sprejemanja odgovornosti. Ob tem dognanju se je pojavilo vprašanje, kako najbolj učinkovito nadgradimo nižjo stopnjo samostojnosti in odgovornosti. Kot učinkovit način se je izkazalo vključevanje v takšne in podobne projekte, kot tudi s so-ustvarjanjem revije Dianoia v obliki prispevkov, ki so sad samostojnega raziskovanja študentov. Revija Dianoia, ki izhaja zadnjih 7 let, si prizadeva ustvarjati okolje, v katerem lahko študentje sami raziskujete, se učite, ter svoje izsledke predstavite s prispevkom, v želji, da pomaga študentom, da vas tok raziskovanja ponese v nove,

E-naslov: spela.kajzer@student.um.si (Špela Kajzer)

razburljive vode, ki vas bodo navduševale in vam služile kot navdih, da se iz študentov prelevite v raziskovalce, ki se izobražujejo, raziskujejo in soustvarjajo znanje. Naj vas v ta svet ponesejo tudi članki, ki sledijo.
V primeru, da vas zanima proces izdaje prihodnje številke revije Dianoia, prilagamo sekvenčni diagram, podrobnosti katerega so predstavljene v [1]

Literatura

[1] Goričan, A.: Proces izdaje nove številke revije Dianoia, Dianoia 1 (2017) 109 - 112.



Avtor
Uredništvo in lektura
Izvršni urednik
Recenzent
Tehnični urednik
Če želite biti opomnjeni na prispevek, sporočite uredništvu na naslov dianoia@um.si, da vam mesec pred rokom pošljemo opomik.
Opomnik za oddajo prispevka mesec pred rokom.
Opomnik za oddajo prispevka teden pred rokom.
Članek mora biti poslan v objavo do 8.1.2024.
Prispevek v PDF.
Posvet o vsebinski ustreznosti.
alt
[Če je v posvetu prispevek zavrnjen.]
zavrnitev prispevka
Pojasnitev zavrnitve.
Avtor lahko prispevek prilagodi v skladu z navodili uredništva, da bo vsebinsko ustrezal reviji.
Prilagojen prispevek.
Posvet o vsebinski ustreznosti.
Odobritev prispevka
Prispevek v PDF.
Prispevek se sprejme ali zavrne. Odločitev mora biti znana, najkasneje do 5.2.2024. Recenzent pripravi predloge za manjšo dopolnitev prispevka ali predloge za poglobljene izboljšave, ki bodo odstranili argumente za zavrnitev.
Sprejem/Zavrnitev prispevka.
Sprejem/Zavrnitev prispevka.
Popravki se vnesejo v prispevek v najkrajšem možnem času.
Popravljen izdelek
Popravljen izdelek
Odločitev o potrditvi ali zavrnitvi izdelka se zgodi v najkrajšem možnem času.
Potrditev/Zavrnitev izdelka.
Potrditev/Zavrnitev izdelka.
Potrditev izdelka. [19.2.2024]
Prispevek se v lekturo posreduje najkasneje do 1.3.2024.
Prispevek v PDF.
Popravki lekture.
Popravki lekture. [15.3.2024]
Avtor ima na voljo največ teden dni za vnos popravkov.
Popravljen prispevek.[22.3.2024]
Združitev prispevkov v revijo,ki jo posreduje glavnemu in odgovornemu uredniku v končni pregled in tisk.
Oddaja v tisk. [1.4.2024]

STROKOVNI PRISPEVKI

Dianoia 7 (2023) 09–15

Posplošeni Stirlingovi trikotniki
Generalized Stirling triangles

Polona Repolusk

Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Koroška cesta 160, 2000 Maribor
IMFM, Jadranska cesta 19, 1000 Ljubljana
Fakulteta za informacijske študije, Ljubljanska cesta 31a, 8000 Novo mesto

Povzetek

V članku so predstavljena Stirlingova števila druge vrste. Podanih je nekaj njihovih enostavnih in dolgo znanih lastnosti, med drugim rekurzivna zveza, ki omogoča izračun vrednosti Stirlingovih števil druge vrste za poljubne vrednosti parametrov, ki sta naravni števili. Tako lahko tvorimo trikotnik Stirlingovih števil druge vrste. Med mnogimi posplošitvami, ki se pojavijo v literaturi, je izbrana zanimiva posplošitev v smislu razbitij multimnožice. Za ta koncept so podane lastnosti, sorodne lastnostim običajnih Stirlingovih števil druge vrste. Dokazana je rekurzivna zveza, ki omogoča izračun koeficientov posplošenega Stirlingovega trikotnika druge vrste.

Ključne besede: Stirlingova števila druge vrste, posplošena Stirlingova števila druge vrste, multimnožica, rekurzivne zveze.

Abstract

We present the Stirling numbers of the second kind. Some simple and long known properties are given. One of them is a recurrence relation that allows the calculation of Stirling numbers of the second kind for arbitrary values of the parameters, which are positive integers. Thus, we can easily construct Stirling's triangle of the second kind. Among the many generalizations that appear in the literature, we present an interesting generalization in the sense of partitions of a multiset. Properties, related to those of ordinary Stirling numbers of the second kind, are given for this generalized concept. A recurrence relation, which enables the calculation of the coefficients of the generalized Stirling's triangle of the second kind, is proven.

Key words: Stirling numbers of the second kind, generalized Stirling numbers of the second kind, multiset, recurrence relations.

1 Uvod

V matematiki poznamo veliko znanih trikotnikov. Med njimi mnogi niso geometrijski objekti temveč, na primer trikotniki števil. Tvorimo jih iz zaporedij števil s to ali ono lastnostjo. Na spletu [9] najdemo celo zbirko (Online Encyclopedia of Integer sequences, kratko OEIS), ki je namenjena iskanju, zbiranju in beleženju zaporedij števil. Vsako od njih ima posebno oznako, v nadaljevanju bodo zapisane na ustreznih mestih v besedilu. Trenutno zbirka OEIS vsebuje podatke o več kot 360 000 zaporedjih.

Med najbolj poznanimi trikotniki števil je gotovo Pascalov trikotnik (A007318), ki ga sestavljajo binomski koeficienti $\binom{n}{k}$. V jeziku algebre so binomski koeficienti koeficienti polinoma $(x+y)^n$, kjer je n naravno število. V jeziku kombinatorike pa to sovpada z naslednjo definicijo. Naj bosta n in k nenegativni celi števili in $n \geq k$. $\binom{n}{k}$ je število možnih izbir k elementov iz množice z n elementi. Z drugimi besedami, $\binom{n}{k}$ predstavlja

E-naslov: polona.repolusk@um.si (Polona Repolusk)

število podmnožic moči k množice z n elementi. Ko binomske koeficiente zapišemo v obliki trikotnika, hitro opazimo nekaj zanimivih lastnosti. Na primer, vsota elementov ene vrstice predstavlja število vseh podmnožic n-množice. V njem se skriva tudi zaporedje naravnih števil (A000027), trikotniških števil (A000217), vsota določenih elementov tvori znano Fibonaccijevo zaporedje števil (A001906). Podrobneje o tem lahko preberete na primer v [11].

Trikotnik števil lahko tvorimo tudi iz dobro poznanih Stirlingovih števil prve in druge vrste. Za Stirlingovo število prve vrste (A132393) omenimo samo definicijo. $\left[{n \atop k}\right]$ je število permutacij na množici z n elementi, ki jih lahko zapišemo kot produkt k disjunktnih ciklov [4]. V nadaljevanju se bomo omejili na proučevanje Stirlingovih števil druge vrste (A008277). Avtorji jih preučujejo iz najrazličnejših vidikov. Na primer, v [8] je podana interpretacija v jeziku normalne ureditve posebnih besed v Weylovi algebri. V [7, 10] so Stirlingova števila druge vrste karakterizirana preko rodovnih funkcij. Mi se bomo osredotočili na definicijo v jeziku kombinatorike: Stirlingovo število druge vrste $\left\{{n \atop k}\right\}$ je število razbitij množice z n elementi na k nepraznih paroma disjunktnih podmnožic, katerih unija je prvotna množica. Na primer, naj bo $n = 3$ in $A = \{1, 2, 3\}$. Razbitja te množice na k podmnožic so naslednja:

1. $k = 1$: Razbitje na eno množico je eno samo, množica sama.
2. $k = 2$: Dobimo 3 različna razbitja, $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$; $\{\{2\}, \{1, 3\}\}$ in $\{\{3\}, \{1, 2\}\}$.
3. $k = 3$: Dobimo eno samo razbitje, $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.

V nadaljevanju bomo najprej ponovili nekaj znanih trditev v zvezi s Stirlingovimi števili druge vrste. Poglavje 3 bo namenjeno predstavitvi posplošenih Stirlingovih števil druge vrste in lastnostim le-teh.

2 Stirlingova števila druge vrste

Dodajmo nekaj lastnosti, ki sledijo neposredno iz definicije Stirlingovih števil druge vrste [6].

Lema 2.1. *Naj bosta $n, k \in \mathbb{N}_0$. Velja naslednje:*

1. *če je $n < k$, je $\left\{{n \atop k}\right\} = 0$,*
2. $\left\{{n \atop 0}\right\} = 0$,
3. $\left\{{n \atop 1}\right\} = \left\{{n \atop n}\right\} = 1$,
4. $\left\{{n \atop n-1}\right\} = \binom{n}{2}$,
5. $\left\{{n \atop k}\right\} = k\left\{{n-1 \atop k}\right\} + \left\{{n-1 \atop k-1}\right\}$.

Dokaz. Točka 4 sledi iz ugotovitve, da v razbitju množice z n elementi na $n-1$ podmnožic vse razen ene podmnožice vsebujejo le en element, ena podmnožica pa dva. Pomembno je torej le, katera dva elementa sta v tej podmnožici, izberemo ju lahko na $\binom{n}{2}$ načinov. Poglejmo še točko 5. Razbitje n-množice na k podmnožic lahko iz razbitij $(n-1)$-množice dobimo na dva načina: bodisi $(n - 1)$-množico razbijemo na $k - 1$ podmnožic in element n dodamo v svojo, novo podmnožico, bodisi n dodamo eni izmed k podmnožic razbitja $(n - 1)$-množice. Od tod sledi formula 5, ki je rekurzivna zveza za Stirlingova števila druge vrste. □

Če rekurzivno zvezo iz točke 5 leme 2.1 združimo z robnima pogojema pod točkama 2 in 3, lahko za vsak par naravnih števil n in k, kjer je $n \geq k$, izračunamo vrednost za $\left\{ {n \atop k} \right\}$. Če izračune vseh možnih k pri fiksnem n zapišemo v vrstice, dobimo Stirlingov trikotnik druge vrste.

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$n=1$	1					
$n=2$	1	1				
$n=3$	1	3	1			
$n=4$	1	7	6	1		
$n=5$	1	15	25	10	1	
$n=6$	1	31	90	65	15	1

Slika 1: Stirlingov trikotnik druge vrste za vse $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ in vse $1 \leq k \leq n$.

Med drugim lahko opazimo, da je vsota elementov n-te vrstice, $\sum_{i=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$ ravno n-to Bellovo število B_n (A000110), ki predstavlja število vseh možnih razbitij množice z n elementi.

Naj bosta spet n in k naravni števili, $n \geq k$ in definirajmo $St(n, k)$ kot

$$St(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

Naj bo še $S(n, k)$ število surjektivnih funkcij iz množice z n elementi v množico s k elementi. Razmislimo, da je to število povezano s Stirlingovimi števili druge vrste. Naj bo $f : \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots k\}$ surjektivna funkcija. Potem je za vsak $i \in \{1, 2, \dots k\}$ praslika $f^{-1}(i)$ neprazna podmnožica množice $\{1, 2, \dots, n\}$. Pri tem je še $\bigcup\limits_{i=1}^{k} f^{-1}(i) = \{1, 2, \dots, n\}$ in za različna i in j sta $f^{-1}(i)$ in $f^{-1}(j)$ disjunktni. Torej množice $f^{-1}(i)$ tvorijo razbitje množice $\{1, 2, \dots, n\}$. Vseh možnih razbitij je $\left\{ {n \atop k} \right\}$. Za vsako razbitje pa lahko na $k!$ različnih načinov opišemo, v katero število se elementi iz neke njegove podmnožice slikajo. Število vseh surjektivnih funkcij je torej $k!\left\{ {n \atop k} \right\}$. Izkaže se tudi:

Trditev 2.2. *[5] Naj bosta $n, k \in \mathbb{N}$ in $n \geq k$. Potem velja $\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} S(n, k) = St(n, k)$.*

3 Posplošena Stirlingova števila druge vrste

Kot smo videli zgoraj, je Stirlingovo število druge vrste $\left\{ {n \atop k} \right\}$ enako številu razbitij množice z n elementi na k nepraznih paroma disjunktnih podmnožic. Številni avtorji so iskali možnosti za posplošitev tega koncepta. Na primer, v [1] so raziskovali vrednosti za negativna n in/ali k, v [7] gre za posplošitev v jeziku rodovnih funkcij, v [8] pa v jeziku Weylove algebre. V tem članku bomo predstavili posplošitev, kjer namesto razbitja množice (t. j. n različnih elementov) iščemo možna razbitja multimnožice – "množice", v kateri dovoljujemo, da se elementi ponavljajo [3]. Sledi formalna definicija:

Definicija 3.1. Multimnožica je par (A, m), kjer je A množica, $m : A \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ pa funkcija. Za vsak $a \in A$, $m(a)$ imenujemo kratnost elementa a. Naj bo n naravno število. n-multimnožica je taka multimnožica, za katero je $\sum_{a \in A} m(a) = n$.

n-multimnožico bomo predstavili takole: $M = \{\!\!\{1, 1, 1, 2, 2, 3\}\!\!\}$ je 6-multimnožica, v kateri nastopajo elementi $1, 2$ in 3 in velja: $m(1) = 3$, $m(2) = 2$ in $m(3) = 1$.

Definicija 3.2. [2] Naj bosta $M_1 = (A, m_A)$ in $M_2 = (B, m_B)$ multimnožici. Vsota multimnožic M_1 in M_2 je multimnožica $(A \cup B, m_C)$, kjer je za vsak $x \in A \cup B$, $m_C(x) = m_A(x) + m_B(x)$.

Če obstaja element $y \in A \setminus B$, potem definiramo $m_B(y) = 0$ in če obstaja element $z \in B \setminus A$, potem definiramo še $m_A(z) = 0$. V vsoti multimnožic M_1 in M_2 nastopajo torej vsi različni elementi multimnožic M_1 in M_2, kratnost vsakega pa je vsota kratnosti v posamezni multimnožici.

Naj bo $0 < r \leq n$. Označimo z $M(n, r)$ n-multimnožico

$$\{\!\!\{1, 1, \ldots, 1, 2, 3, \ldots, n - r + 1\}\!\!\},$$

kjer je $m(1) = r$ in $m(i) = 1$ za vse $i \in \{2, 3, \ldots, n - r + 1\}$.

Definicija 3.3. Naj bodo $n, k, r \in \mathbb{N}$. $S_r(n, k)$ je število razbitij multimnožice $M(n, r)$ na k nepraznih multimnožic, katerih vsota je multimnožica $M(n, r)$.

Dodatno definirajmo še $S_1(0, 0) = 1$, $S_r(n, k) = 0$, če je $n < k$ ali $n < r$, in $S_0(n, k) = S_1(n, k)$. Očitno je $S_1(n, k) = \left\{ {n \atop k} \right\}$. Zapišimo še en primer. Naštejmo vsa možna razbitja multimnožice $M(4, 2)$ na dve multimnožici. To so

$$\{\!\!\{\{\!\!\{1\}\!\!\}, \{\!\!\{1, 2, 3\}\!\!\}\}\!\!\}; \quad \{\!\!\{\{\!\!\{2\}\!\!\}, \{\!\!\{1, 1, 3\}\!\!\}\}\!\!\}; \quad \{\!\!\{\{\!\!\{3\}\!\!\}, \{\!\!\{1, 1, 2\}\!\!\}\}\!\!\};$$

$$\{\!\!\{\{\!\!\{1, 1\}\!\!\}, \{\!\!\{2, 3\}\!\!\}\}\!\!\}; \quad \{\!\!\{\{\!\!\{1, 2\}\!\!\}, \{\!\!\{1, 3\}\!\!\}\}\!\!\}.$$

$S_r(n, k)$ je na primer rešitev naslednje naloge: Naj bo N naravno število in $p_1^r p_2 \ldots p_{n-r+1}$ zapis števila N kot produkt različnih praštevil. Če vrstni red faktorjev ni pomemben, je $S_r(n, k)$ število načinov zapisa števila N kot produkt k faktorjev. Pri tem mora biti vsak faktor naravno število in vsaj 2. Opazimo še, da je $S_n(n, k)$ ravno število zapisov števila n kot vsote k naravnih števil. Slednje je v literaturi pogosto označeno s $p_k(n)$ (A008284).

V [3] so preučili še nekaj lastnosti posplošenih Stirlingovih števil druge vrste. Le-te so podobne lastnostim običajnih Stirlingovih števil druge vrste, ki smo jih navedli v lemi 2.1. Naslednji rezultat bo omogočal zapis posplošenih Stirlingovih trikotnikov druge vrste.

Izrek 3.4. *[3] Naj bosta $n, r \in \mathbb{N}$ in $n > r$. Potem je*

$$S_r(n, k) = kS_r(n - 1, k) + S_r(n - 1, k - 1) - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \sum_{j=2}^{\lfloor \frac{r}{i} \rfloor} S_{r-ij}(n - 1 - ij, k - j).$$

Dokaz. Naj bo $0 < r < n$ in $M(n, r)$ n-multimnožica. Poglejmo, kako je možno dobiti vseh $S_r(n, k)$ razbitij multimnožice M. Naj bo $x = n - r + 1$. Očitno je $x \neq 1$ in $x \in M(n, r) \setminus M(n - 1, r)$.

1. Število razbitij multimnožice $M(n-1,r)$ na $k-1$ multimnožic je enako $S_r(n-1,k-1)$. Dodajmo sedaj vsakemu razbitju eno dodatno multimnožico, ki vsebuje le element x. Tako dobimo različna razbitja $M(n,r)$ na k razredov. Teh je ravno $S_r(n-1,k-1)$.
2. Poglejmo spet multimnožico $M(n-1,r)$. Vseh razbitij $M(n-1,r)$ na k nepraznih multimnožic je $S_r(n-1,k)$. Poglejmo eno od razbitij. Le-to vsebuje natanko k multimnožic. Dodajmo element x katerikoli od njih. Iz enega razbitja smo tako dobili k razbitij množice $M(n,r)$ na k nepraznih multimnožic, skupaj torej $kS_r(n-1,k)$ razbitij. Razmislimo še, če so tako dobljena razbitja različna. Najprej poglejmo primer. Eno možno razbitje multimnožice $M(5,3)$ na 3 neprazne multimnožice je na primer
$$\{\!\{\{\!\{1\}\!\},\{\!\{1\}\!\},\{\!\{1,2,3\}\!\}\}\!\}.$$
Dodajmo mu sedaj element $x=4$, kot je opisano v prejšnjem odstavku. Dobimo tri razbitja
$$\{\!\{\{\!\{1,4\}\!\},\{\!\{1\}\!\},\{\!\{1,2,3\}\!\}\}\!\};\quad \{\!\{\{\!\{1\}\!\},\{\!\{1,4\}\!\},\{\!\{1,2,3\}\!\}\}\!\};\quad \{\!\{\{\!\{1\}\!\},\{\!\{1\}\!\},\{\!\{1,2,3,4\}\!\}\}\!\},$$
pri čemer sta prvi dve razbitji enaki. Poglejmo torej, koliko razbitij se ponovi v splošnem primeru.

   Označimo z E_i multimnožico, ki vsebuje samo enice, teh naj bo natanko i. Odvečna razbitja tako pri dodajanju elementa dobimo, če se multimnožica E_i za nek i v razbitju pojavi vsaj dvakrat. Označimo z $N(m_i=j)$ število razbitij $M(n-1,r)$ na k multimnožic, ki vsebujejo j kopij E_i, in z $N(m_i\geq j)$ število razbitij $M(n-1,r)$ na k multimnožic, ki vsebujejo vsaj j kopij E_i. Naj bo $j\geq 2$. Pokažimo, da je $N(m_i\geq j)=S_{r-ij}(n-1-ij,k-j)$. V razbitju $M(n-1,r)$ na k multimnožic, od katerih je vsaj j kopij E_i, jih lahko odstranimo j. Ostane $n-1-ij$ elementov, od katerih je $r-ij$ enic. Iz teh lahko tvorimo razbitja s $k-j$ razredi, ki jih je $S_{r-ij}(n-1-ij,k-j)$.

   Torej, naj bo podano razbitje $M(n-1,r)$ na k multimnožic, ki vsebuje natanko $j\geq 2$ multimnožic E_i. Ko element x dodamo multimnožicam E_i, tako dobimo $j-1$ odvečnih razbitij. Opazimo, da je $j\leq\frac{r}{i}$. Naj bo $s=\lfloor\frac{r}{i}\rfloor$. Število odvečnih razbitij O_i lahko za vsak $i\leq\frac{r}{2}$ izračunamo takole:
$$\begin{aligned}
O_i &= N(m_i=2)+2N(m_i=3)+3N(m_i=4)+\ldots+(s-1)N(m_i=s)\\
&= (N(m_i=2)+N(m_i=3)+N(m_i=4)+\ldots+N(m_i=s))+\\
&+(N(m_i=3)+N(m_i=4)+\ldots+N(m_i=s))+\\
&+(N(m_i=4)+\ldots+N(m_i=s))+\\
&+\ldots+\\
&+N(m_i=s)\\
&= N(m_i\geq 2)+N(m_i\geq 3)+N(m_i\geq 4)+\ldots+N(m_i\geq s)\\
&= \sum_{j=2}^{s} N(m_i\geq j)\\
&= \sum_{j=2}^{s} S_{r-ij}(n-1-ij,k-j).
\end{aligned}\tag{3.1}$$

Ker odvečna razbitja nastopijo le, ko imamo v razbitju vsaj dve enako veliki multimnožici iz samih enic, je $i \leq \frac{r}{2}$. Skupno število odvečnih razbitij je torej

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \sum_{j=2}^{s} S_{r-ij}(n-1-ij, k-j),$$

s čimer smo zaključili dokaz.

□

Posledica 3.5. *[3] Naj bo $m \in \mathbb{N}$, $r = 2^m - 1$ in $n \geq r$. Potem je*

$$S_r(n, 2) = 2^{n-r+m-1} - 1.$$

Dokaz. Po izreku 3.4 za $k = 2$ velja:

$$S_r(n, 2) = 2S_r(n-1, 2) + S_r(n-1, 1) - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \sum_{j=2}^{\lfloor \frac{r}{i} \rfloor} S_{r-ij}(n-1-ij, 2-j).$$

Najprej opazimo, da je $S_r(n-1, 1)$, ki predstavlja število razbitij $(n-1)$-multimnožice na 1 multimnožico, enako 1. Poglejmo še, kako se poenostavi dvojna vsota. Ker je $S_r(n, k) = 0$ za $k < 0$, je

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \sum_{j=2}^{\lfloor \frac{r}{i} \rfloor} S_{r-ij}(n-1-ij, 2-j) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} S_{r-2i}(n-1-2i, 0).$$

Opazimo, da je za $n-1-2i < r-2i$, kar je enako kot $n < r+1$, vsota enaka 0. Če je $n = r+1$ in r sod, pa je vsota enaka 1, saj smo definirali, da je $S_1(0, 0) = 1$. Ugotovili smo torej:

$$S_r(n, 2) = \begin{cases} 2S_r(n-1, 2) & \text{če je } n = r+1 \text{ in } r \text{ sod,} \\ 2S_r(n-1, 2) + 1 & \text{sicer.} \end{cases} \tag{3.2}$$

Dobili smo torej splošnejšo zvezo, mi pa potrebujemo rezultat v primeru, ko je $r = 2^m - 1$. Ta sledi iz zveze 3.2 z uporabo matematične indukcije po številu n. Naj bo najprej $n = r$. $S_r(r, 2)$ je število razbitij multimnožice r enic na dve multimnožici. Pomembno je torej le, koliko enic nastopa v posamezni multimnožici. Ker multimnožici nista označeni, je rezultat enak $\frac{r-1}{2}$. Upoštevajmo še, da je $r = 2^m - 1$ in dobimo, da je $S_r(r, 2) = 2^{m-1} - 1$. Baza indukcije je torej dokazana. Za indukcijski korak predpostavimo, da je $S_r(n, 2) = 2^{n-r+m-1} - 1$. Zaradi enakosti 3.2 takoj sledi

$$S_r(n+1, 2) = 2S_r(n, 2) + 1 = 2\left(2^{n-r+m-1} - 1\right) + 1 = 2^{n-r+m} - 1,$$

kar je želeni rezultat. □

Sedaj lahko za različne vrednosti parametra r tvorimo posplošene Stirlingove trikotnike druge vrste. Rezultate lahko na primer dobimo z rekurzivnim algoritmom, zakodiranim v poljubnem programskem jeziku. Spomnimo se, da je $S_1(n, k) = \left\{ {n \atop k} \right\}$. Zapišimo še nekaj vrstic trikotnika, katerega elementi ustrezajo številom $S_2(n, k)$:

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$n=2$	1	1				
$n=3$	1	2	1			
$n=4$	1	5	4	1		
$n=5$	1	11	16	7	1	
$n=6$	1	23	58	41	11	1

Slika 2: Posplošena Stirlingova števila razbitj $M(n, 2)$ za vse $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ na k multimnožic, kjer je $1 \leq k \leq n$.

4 Zaključek

Med zanimivimi posplošitvami Stirlingovih števil druge vrste smo izbrali tako, kjer iščemo razbitja multimnožice, v kateri dovoljujemo ponovitev natanko enega elementa. Zapisali smo nekaj osnovnih lastnosti in rekurzivno zvezo, ki omogoča izračun posplošenih Stirlingovih števil druge vrste za ustrezne parametre. V splošnem je definicija multimnožice taka, da se lahko v njej poljubno ponavljajo vsi elementi (glej definicijo 3.1). Zanimivo bi bilo razmisliti, kako prešteti razbitja v takem splošnejšem primeru.

Literatura

[1] D. Branson, Stirling number representations, *Discrete Mathematics* **306** (2006), 478–494.

[2] L. da Fontoura Costa, Multisets, *Arxiv,* https://doi.org/10.48550/arXiv.2110.12902.

[3] M. Griffiths, I. Mezö, A generalization of Stirling numbers of the second kind via a special multiset, *Journal of Integer Sequences* **13** (2010), 713–725.

[4] E. Hetmaniok, B. Smoleń, R. Wituła The Stirling triangles, *CEUR Workshop Proceedings* **1853** (2017), 35–41.

[5] P. Hilton, J. Pedersen, J. Stinger, On the partitions, surjections and Stirling numbers, *The Bulletin of the Belgian Mathematical Society* **1** (1994), 713–725.

[6] S. Klavžar, P. Žigert, *Izbrana poglavja uporabne matematike*, Univerza v Mariboru, Pedagoška fakulteta, Maribor, 2002.

[7] W. Lang, On generalizations of the Stirling number triangles, *Journal of Integer Sequences* **3** (2000), 713–725.

[8] T. Mansour, M. Schork, M. Shattuck, The generalized Stirling and Bell numbers revisited, *Journal of Integer Sequences* **15** (2012), 12.8.3.

[9] N. J. A. Sloane, The On-line Encyclopedia of Integer Sequences, objavljeno na spletu http://oeis.org.

[10] A. Tucker, *Applied Combinatorics*, 6th ed., John Wiley and Sons, New York, 1984.

[11] Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal% 27s_ triangle, pridobljeno 19.4.2023.

Dianoia 7 (2023) 17-25

Teorija grafov v osnovnošolskem in srednješolskem izobraževanju

Graph theory in primary and secondary education

Jasmina Ferme, Daša Mesarič Štesl

Univerza v Mariboru, Pedagoška fakulteta, Koroška cesta 160, 2000 Maribor, Slovenija

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za računalništvo in informatiko, Večna pot 113, 1000 Ljubljana, Slovenija

---

Povzetek

V prispevku obravnavamo poučevanje vsebin s področja teorije grafov ter vključenost nalog, ki jih umeščamo na področje teorije grafov, v osnovnošolskem in srednješolskem izobraževanju. Med drugim podamo, obravnavamo in rešimo nekaj nalog, ki jih zlahka rešujemo brez poznavanja konceptov s področja teorije grafov, a njihovo ozadje temelji na tej matematični disciplini.

Ključne besede: teorija grafov, osnovnošolsko izobraževanje, srednješolsko izobraževanje

Abstract

In this paper, we discuss the teaching of graph theory and the inclusion of tasks that belong in the area of graph theory in primary and secondary education. Among other things, we give, discuss and solve some problems that can be easily solved without any knowledge of graph theory concepts, but whose background is based on this mathematical discipline.

Key words: graph theory, primary education, secondary education.

---

1 TEORIJA GRAFOV

Teorija grafov je eno izmed novejših, a zaradi številnih praktičnih aplikacij, v zadnjih letih zelo raziskovanih in uveljavljenih področij matematike. V prispevku želimo predstaviti vpletenost tega področja v osnovnošolsko in srednješolsko izobraževanje. Za potrebe reševanja nalog s pomočjo teorije grafov, katerih ozadje temelji na omenjeni matematični disciplini, opredelimo najprej osnovne pojme s področja teorije grafov.

Enostaven graf $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ sestoji iz neprazne množice elementov (oznaka V) ter (pod)množice množice neurejenih parov različnih elementov iz množice V (oznaka E). Elemente množice V imenujemo **vozlišča grafa** $\boldsymbol{G}$, elementom množice E pa pravimo **povezave grafa** $\boldsymbol{G}$. Za poljubni vozlišči u in v grafa G, neurejeni par $\{u, v\}$ krajše označimo kot uv. Pravimo, da sta vozlišči u in v **povezani** oziroma **sosednji** v grafu G, če je $uv \in E$. V primeru, ko je $uv \in E$ rečemo tudi, da je $\boldsymbol{u}$ **sosed** vozlišča v oziroma $\boldsymbol{v}$ **sosed** vozlišča u. Število sosedov izbranega vozlišča imenujemo **stopnja vozlišča**. Graf G, v katerem sta poljubni dve vozlišči sosednji, imenujemo **poln graf**. Če ta vsebuje n vozlišč, ga označimo s K_n.
Zaporedje vozlišč $v_1, v_2, \dots, v_k$ v grafu $G = (V, E)$ se imenuje **sprehod**, če za vsak $i \in \{1,2, \dots, k-1\}$ velja $v_i v_{i+1} \in E$. Če so vsa vozlišča sprehoda različna, tak sprehod imenujemo **pot** v grafu G. **Obhod** v grafu G je sprehod, katerega začetno in končno vozlišče sovpadata. Če so vse povezave in vsa vozlišča obhoda, razen začetnega in končnega, različna, potem tak obhod imenujemo **cikel**. Cikel v grafu G je **Hamiltonov**, če vsebuje vsa vozlišča grafa G. Graf G je **Hamiltonov**, če vsebuje Hamiltonov cikel.
Dodatno pravimo, da je graf G **uteženi graf**, če je vsaki njegovi povezavi prirejeno pozitivno število, ki ga imenujemo **utež**.

E-mail naslov/i: jasmina.ferme1@um.si (Jasmina Ferme), Dasa.Stesl@fri.uni-lj.si (Daša Mesarič Štesl)

2 VKLJUČENOST TEORIJE GRAFOV V IZOBRAŽEVANJE

Teorija grafov je lahko v izobraževalne dejavnosti vključena na različne načine. Med te sodita neposredno uvajanje vsebin s področja teorije grafov (torej vpeljava pojmov, konceptov s področja teorije grafov) ter posredna vključenost teorije grafov preko uporabe nalog, problemov in tudi seznanitve z vsebinami, ki sicer ne zahtevajo poznavanja teorije grafov, a izhajajo iz teorije grafov oziroma na njej temeljijo.

Medtem ko so vsebine s področja teorije grafov vključene v učne načrte več študijskih predmetov različnih fakultet, te neposredno niso zastopane v učnih načrtih za matematiko v osnovnošolskem ali gimnazijskem izobraževanju. Kljub temu ugotavljamo, da je poučevanje izbranih vsebin s področja teorije grafov oziroma uporaba nalog, ki jih lahko umestimo na področje teorije grafov, ponekod vključeno tudi v poučevanje učencev in dijakov. Omenjeni se tako lahko na nekaterih šolah s teorijo grafov srečujejo bolj ali manj neposredno v okviru naslednjih dejavnosti.

- Krožki oziroma interesne dejavnosti; na primer v šolskem letu 2015/2016 smo izvedli *krožek iz teorije grafov* na I. gimnaziji v Celju [3].
- Priprave na tekmovanja in tekmovanja; na primer ACM tekmovanji Bober (mednarodno tekmovanje iz računalniškega mišljenja) in Pišek (tekmovanje v programiranju z delčki).
- Priprave raziskovalnih nalog; na primer raziskovalna naloga z naslovom *Teorija grafov in nanocevke* avtorjev Gorinšek in Mihelič [4].
- Podobno; na primer v sklopu Mini univerze FF UM je bilo leta 2019 izvedeno predavanje z naslovom *Zakaj navigacijska naprava ne deluje brez matematike*?, v sklopu katerega so bili predstavljeni tudi koncepti s področja teorije grafov.

Vključevanje vsebin s področja teorije grafov oziroma nalog, ki jih lahko umestimo na področje teorije grafov, v formalno ali neformalno izobraževanje učencev in dijakov ima lahko različne motive, namene, cilje. Eden izmed teh je gotovo prikaz uporabnosti matematike v realnem življenju. Kot pišeta Klavžar in Žigert [7] je namreč model teorije grafov zelo bogat in nam tako omogoča modeliranje raznolikih realnih situacij, kar se kaže tudi v veliki uporabnosti te matematične discipline v vsakdanjem življenju. Hkrati pa je model teorije grafov dovolj preprost [7], da ga je mogoče predstaviti tudi otrokom [2]. Tako lahko učencem ali dijakom s pomočjo nalog s področja teorije grafov, ki opisujejo realne probleme ali ponazarjajo realne situacije ter so njim seveda prilagojene, prikažemo uporabnost matematike v vsakdanjiku, kar lahko spodbuja njihovo željo po spoznavanju matematike. Poleg spoznavanja uporabnosti matematike v vsakdanjiku nam teorija grafov ponuja tudi možnost uresničevanja drugih splošnih ciljev iz učnega načrta, ki opredeljujejo namen poučevanja matematike. Preko nalog, ki temeljijo na idejah s področja teorije grafov, lahko učenci oziroma dijaki tudi utrjujejo znanja nekaterih vsebin iz učnega načrta za matematiko (na primer preko naloge 2, opisane v nadaljevanju prispevka, učenci oziroma dijaki utrjujejo seštevanje). Omenjene naloge lahko pomenijo tudi matematične probleme za učence ali dijake, z reševanjem katerih ti uresničujejo cilje iz sklopa *Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami* ter hkrati razvijajo tudi matematično pismenost ter matematično kompetenco.
Osnovne vire za obravnavo vsebin s področja teorije grafov ali pridobivanje nalog, ki na teoriji grafov temeljijo, pomeni predvsem strokovna literatura, ki je v večini namenjena študentom in profesorjem na univerzah. V sklopu visokošolskega izobraževanja je nastalo tudi nekaj magistrskih del študentov, kjer so podani primeri za obravnavo izbranih vsebin s področja

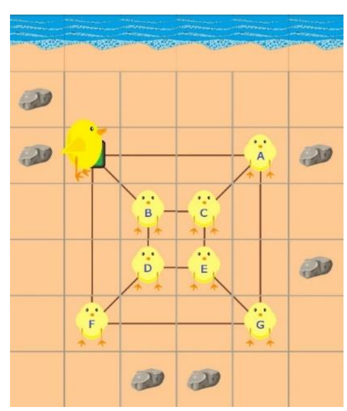
teorije grafov v osnovnošolskem ali srednješolskem izobraževanju [3, 6, 11]. Dodatne naloge s področja teorije grafov ter ideje za obravnavo vsebin s področja teorije grafov v osnovni ali srednji šoli ponujajo razne spletne strani (na primer [1, 13]) ter zbirke nalog s tekmovanj (na primer [8]). Naj omenimo še, da je mogoče kakšno nalogo ali matematični problem, ki temelji na teoriji grafov, najti tudi v osnovnošolskih učbenikih (na primer I-učbenik za matematiko v 5. razredu osnovne šole [12]).

3 PRIMERI NALOG

V nadaljevanju prispevka predstavljamo nekaj nalog, s pomočjo katerih lahko posredno vključimo teorijo grafov v izobraževanje učencev in dijakov. Naloge so namreč takšne, da jih zlahka rešimo brez poznavanja konceptov s področja teorije grafov, a njihovo ozadje temelji na tej matematični disciplini.
V osnovi so naloge sicer namenjene posrednemu vključevanju teorije grafov v izobraževanje, a kljub temu seveda obstaja možnost, da učencem ali dijakom ob nalogah pojasnimo tudi koncept grafa ter druge koncepte s področja teorije grafov, na katerih naloga temelji.
Izbrane naloge sodijo na tri različna področja teorije grafov (ta so navedena pri nalogah), s čimer želimo pokazati široko možnost posredne rabe teorije grafov pri poučevanju. Hkrati sta dve nalogi takšni, ki izhajata iz realnih situacij, kar kaže na uporabnost teorije grafov v vsakdanjiku. Naloge so različnih težavnosti in zahtevajo rabo različnih tipov znanj, kar dodatno prispeva k njihovi rabi pri pouku.
V okviru organiziranih šolskih dejavnosti lahko naloge, ki jih bomo podali, uporabimo v sklopu različnih interesnih dejavnosti (na primer dodatnega pouka matematike), priprav na tekmovanja ter za reševanje v šolskih urah matematike. Tudi slednje ponuja več možnosti uporabe naloge: naloge lahko rešujejo vsi učenci oziroma dijaki ali pa jih z upoštevanjem individualizacije osvetlimo le nekaterim.
Poleg podanih nalog v nadaljevanju prispevka navedemo tudi rešitve teh, opišemo možne načine reševanja brez uporabe konceptov s področja teorije grafov ter za vsako nalogo predstavimo njeno ozadje s področja teorije grafov in možen način reševanja naloge z uporabo teh konceptov.
Vsako nalogo glede na vsebino, ki jo ta obravnava, ter zahtevnost umestimo v ustrezno raven izobraževanja (osnovnošolsko ali srednješolsko), v kateri je po našem mnenju obravnava naloge najbolj mogoča ter smiselna. Opomnimo, da se z nekaj prilagoditvami posamezne naloge, uporabo didaktičnih pripomočkov ali s podajanjem izbranih usmeritev pri reševanju naloge raven težavnosti te lahko zmanjša, kar pripomore k širši rabi naloge glede na starostni razpon učencev. Za vsako nalogo navajamo tudi primer vsebine iz učnega načrta, v sklopu katere lahko z reševanjem naloge uresničujemo operativne cilje.

Naloga 1: Pišek in prijatelji
(Vir naloge in slike: [9])

<u>Naloga</u>
Mali Pišek se je odpravil na plažo skupaj s prijatelji. Spomnili so se nove igre. V pesek so zarisali zanimiv vzorec in vsak piščanček se je postavil v svoje oglišče. Cilj igre je, da piščanček med premikanjem po vzorcu obišče vse ostale piščančke natanko enkrat in konča svojo pot na istem mestu, kot je začel.



Pomagaj Pišku zmagati igro! Poišči takšno pot, da bo Pišek obiskal svoje prijatelje le enkrat. Premika se lahko le po narisanih črtah.

Rešitev

Možnih je več rešitev. Ena od njih je, da Mali Pišek zaporedoma obišče piščančke z oznakami: A, G, F, D, E, C, B in se vrne domov.

Možen način reševanja brez uporabe konceptov s področja teorije grafov

Nalogo rešujemo s poskušanjem in logičnim sklepanjem. Najprej vidimo, da imamo tri možnosti glede tega, koga Mali Pišek obišče najprej: piščančka A, piščančka B ali piščančka F. Obravnavajmo le primera, ko Mali Pišek najprej obišče piščančka A ali piščančka B (obisk piščančka F v prvem koraku je namreč simetričen obisku piščančka A v tem koraku).

a) Možnost 1: Mali Pišek najprej obišče piščančka A. V nadaljevanju se lahko Pišek napoti na obisk k piščančku C ali piščančku G.

Če v drugem koraku obišče piščančka C, lahko kot tretjega obišče piščančka B ali piščančka E. Predpostavimo najprej, da v tretjem koraku obišče piščančka B. Potem je edina možnost, da v naslednjem koraku obišče piščančka D, nato pa zaporedoma piščančke E, G in F. Namreč, če bi se namreč Mali Pišek od piščančka D napotil k piščančku F, se po obiskih piščančkov G in E ne bi mogel več vrniti domov, saj nobenega piščančka ne sme obiskati dvakrat. Če Mali Pišek v tretjem koraku obišče piščančka E, potem je edina možna rešitev, da v nadaljevanju zaporedoma obišče piščančke G, F, D, B. V primeru, da bi od piščančka E najprej odšel k piščančku D, Pišek ne bi mogel obiskati vseh piščančkov natanko enkrat in se vrniti domov.

Obravnavajmo še možnost, da Mali Pišek kot drugega obišče piščančka G. Potem ima, če želi obiskati vse piščančke, vsakega natanko enkrat in se vrniti domov, v nadaljevanju dve možni poti: zaporeden obisk piščančkov F, D, E, C, B ali piščančkov E, C, B, D, F.

a) Možnost 2: Pišek najprej obišče piščančka B. Potem lahko Mali Pišek kot drugega obišče piščančka C ali D. Ker je situacija, ko Mali Pišek v drugem koraku obišče piščančka C popolnoma simetrična situaciji, ko le-ta kot drugega obišče piščančka D, obravnavamo le prvi omenjeni primer. Od piščančka C, lahko Mali Pišek odide k piščančku A ali E. Če odide k piščančku A, bo v nadaljevanju zaporedoma obiskal še piščančke G, E, D, F in se vrnil domov. V nasprotnem primeru, če je tretji obisk Malega Piška obisk piščanka E, temu zaporedoma sledijo obiski piščančkov D, F, G in A. Če bi namreč Pišek od piščančka E odšel k piščančku G, v nadaljevanju ne bi mogel obiskati vseh piščančkov in se vrniti domov, ne da bi katerega od piščančkov obiskal dvakrat.

Ozadje naloge s področja teorije grafov in možen način reševanja z uporabo konceptov s področja teorije grafov

V nalogi opisano situacijo predstavimo z enostavnim grafom G na sledeči način. Mali pišek in piščančki A, B, C, D, E, F, G pomenijo vozlišča grafa G, v pesek zarisane črte pa povezave med ustreznimi vozlišči v grafu G. Cilj naloge (obisk piščančkov med premikanjem po vzorcu na način, da Mali Pišek obišče vse preostale piščančke, vsakega natanko enkrat, in konča svojo pot na istem mestu, kot je začel) je tako ekvivalentno iskanju Hamiltonovega cikla v grafu G.

Umestitev naloge glede na raven izobraževanja

Osnovnošolsko izobraževanje (razredna in predmetna stopnja).

Primeri možnih prilagoditev naloge ali načina reševanja z namenom zmanjšati težavnost te

- Nalogo lahko poenostavimo tako, da ne zahtevamo uresničitve vseh pogojev obiskovanja piščančkov (povratek na začetno mesto, obisk vseh piščančkov, enkraten

obisk vsakega piščančka). Tako lahko na primer učenci poskušajo poiskati takšno pot, kjer Pišek obišče vse piščančke in se na koncu vrne domov (dopuščamo pa možnost, da Pišek katerega piščančka obišče večkrat).
Drugo možnost poenostavitve naloge predstavlja uporaba drugačnega vzorca poti – grafa, kjer je smiselno, da obstaja eden ali več piščančkov, ki je le z dvema potema povezan s preostalimi. To namreč določa pot obiska tega piščančka.

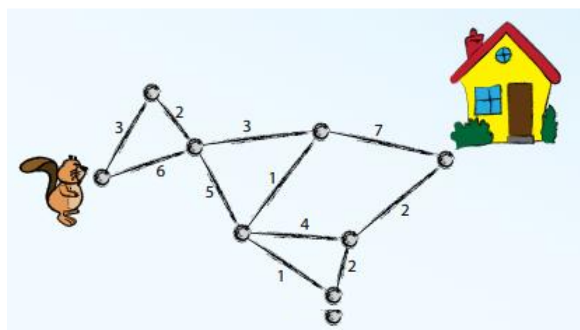
– Reševanje originalne naloge lahko učencem olajšamo tako, da jim pripravimo več narisanih vzorcev poti in jim omogočimo poskušanje, ki je beleženo in lahko tudi sistematično vodeno.
  Z uporabo znanja s področja kombinatorike lahko določimo vse možne prve dele poti (narišemo lahko kombinatorično drevo, ki predstavlja vse možnosti za prva dva obiska), kar prav tako lahko olajša reševanje naloge.

<u>Primeri vsebin iz učnega načrta, v sklopu katerih lahko preko reševanja naloge uresničujemo operativne cilje</u>

– Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami.
– Kombinatorični problemi.

Naloga 2: Ben se vrača
(Vir naloge in slike: [8])

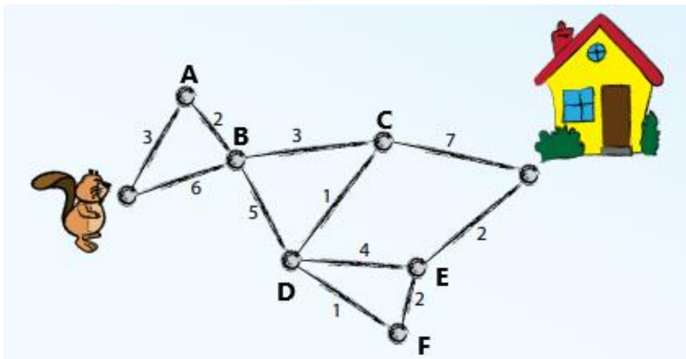
<u>Naloga</u>
Bober Ben bi rad prišel čim prej domov. Skica kaže poti, po katerih bi lahko hodil, in čas v minutah, ki jih potrebuje za vsako. Koliko minut bo najmanj potreboval do doma?



<u>Rešitev</u>
Bober Ben za pot do doma potrebuje najmanj 14 minut (hodi zaporedoma po poteh, ki mu vzamejo naslednje število minut: 3, 2, 3, 1, 1, 2, 2).

<u>Možen način reševanja brez uporabe konceptov s področja teorije grafov</u>
Logično sklepanje z računanjem časa hoje po več različnih možnih poteh, ki lahko poteka na primer takole. Za lažji opis procesa sklepanja najprej križišča poti na sliki označimo s črkami (glejte sliko spodaj).
Najprej ugotovimo, da mora bober Ben na poti do doma prečkati križišče B. Do tega križišča lahko pride po dveh različnih poteh, najhitreje tako, da uporabi poti, ki mu vzameta 3 in 2 minuti. Iz križišča B lahko bober Ben pot nadaljuje direktno do križišča C ali do križišča D. Oglejmo si obe možnosti.
a) Možnost 1: Ben gre iz križišča B direktno do križišča C (do križišča C tako porabi 8 minut). Iz križišča C lahko gre direktno domov, kar pomeni, da za celotno pot do doma porabi 15 minut. Lahko pa namesto tega pot iz križišča C nadaljuje direktno do križišča D (tako do križišča D porabi 9 minut). Če nato pot nadaljuje direktno v križišče E in gre potem domov, za to pot porabi 15 minut. Lahko pa gre iz križišča D do križišča F ter nato preko križišča E domov. Za to pot porabi 14 minut.
b) Možnost 2: Ben gre iz križišča B direktno do križišča D (do križišča D tako porabi 10 minut). Če gre Ben iz križišča D do križišča E ali do križišča F, potem gotovo ne uporabi najkrajše poti

do doma, saj bi lahko prišel do križišča D hitreje (preko križišča C v le 9 minutah). Tako si moramo ogledati le še možnost, ko gre Ben iz križišča D do križišča C in potem direktno domov. Kot je razvidno s slike, bober Ben za to pot porabi 18 minut.
Glede na zapisano ugotavljamo, da bober Ben pride najhitreje domov, če gre po vrsti preko križišč A, B, C, D, F in E. V tem primeru za pot do doma potrebuje 14 minut.



Ozadje naloge s področja teorije grafov in možen način reševanja z uporabo konceptov s področja teorije grafov
V nalogi opisano situacijo lahko ponazorimo z uteženim grafom na naslednji način. Množica vozlišč grafa naj ustreza množici bobrovih (možnih) lokacij: bobrovi trenutni lokaciji, njegovemu domu ter križiščem poti. Dve vozlišči grafa povežemo, če med pripadajočima lokacijama obstaja direktna pot (takšna, ki ne prečka drugih križišč). Utež vsake povezave v grafu naj bo enaka številu minut, ki jih bober Ben potrebuje, da to pot prehodi. Reševanje naloge, torej iskanje najkrajše oziroma najhitrejše poti med bobrovo trenutno lokacijo in domom, je tako ekvivalentno iskanju najkrajše poti v uteženem grafu med danima dvema vozliščema. Ta naloga sodi med zelo znane probleme s področja teorije grafov in se tako lahko reši tudi z uporabo različnih algoritmov. Za pridobitev rešitve naloge lahko tako uporabimo na primer Dijkstrov algoritem (več o tem se lahko prebere v [5]).

Umestitev naloge glede na raven izobraževanja
Osnovnošolsko izobraževanje (razredna in predmetna stopnja).

Primeri možnih prilagoditev naloge ali načina reševanja z namenom zmanjšati težavnost te
- Težavnost naloge lahko zmanjšamo tako, da uporabimo drugačen zemljevid (graf) ali drugačne časovne zahtevnosti potovanja po posameznih poteh (drugačne vrednosti uteži povezav). Obe možnosti ponujata zmanjšanje števila vseh različnih možnih poti do cilja, kar pomeni lažje sistematično preizkušanje. Druga možnost ponuja nižjo raven zahtevnosti naloge tudi z vidika računanja skupnega časa potovanja (če uporabimo manjša oz. drugačna števila za vrednosti uteži povezav).
- Reševanje dane naloge lahko učencem olajšamo tako, da jim pripravimo več narisanih zemljevidov in jim omogočimo poskušanje, ki je lahko vodeno in izvedeno sistematično. Tudi v tem kontekstu nam lahko koristi znanje s področja kombinatorike.

Primeri vsebin iz učnega načrta, v sklopu katerih lahko preko reševanja naloge uresničujemo operativne cilje
- Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami.
- Kombinatorični problemi.

- Računanje v množici naravnih števil.

Naloga 3: Znanci ali neznanci
(Naloga je sestavljena na podlagi naloge s spletne strani *Otroški klub EUREKA* [10].)

Naloga
Utemeljite, da so med katerikoli izbranimi šestimi osebami vsaj trije znanci (takšni, ki se vsi poznajo med seboj) ali vsaj trije neznanci (takšni, za katere velja, da drug drugega ne poznajo).

Možen način reševanja brez uporabe konceptov s področja teorije grafov
Poljubno izberimo šest oseb in jih poimenujmo, na primer s črkami A, B, C, D, E in F. Ker smo poleg osebe A izbrali še pet oseb, za osebo A velja ena od možnosti: *a*) oseba A pozna vsaj tri od oseb B, C, D, E ali F; *b*) oseba A ne pozna vsaj treh od oseb B, C, D, E ali F. Najprej obravnavajmo možnost a. Recimo, da so osebe, ki jih oseba A pozna, osebe B, C in D (če gre za katere druge tri osebe oziroma več teh, je razlaga analogna). Če se vsaj dve od oseb B, C in D med seboj poznata, recimo osebi B in C, potem so osebe A, B in C znanci, s čimer je trditev dokazana. V nasprotnem primeru so osebe B, C in D neznanci, kar pomeni, da tudi v tem primeru trditev velja. Simetrično (z zamenjavo izrazov znanec/neznanec) utemeljimo, da trditev velja tudi v primeru, ko je resnična možnost b.

Ozadje naloge s področja teorije grafov in možen način reševanja z uporabo konceptov s področja teorije grafov
Situacijo, opisano v nalogi, lahko ponazorimo s polnim grafom na šestih vozliščih (torej z grafom, ki ima šest vozlišč in so vsa paroma povezana). Šest omenjenih vozlišč ustreza šestim osebam iz naloge, povezave med njimi pa ustrezajo odnosom med osebami (poznanosti oziroma nepoznanosti). Dalje, medsebojno poznavanje dveh oseb lahko ponazorimo tako, da povezavo med vozliščema, ki tema dvema osebama pripadata, pobarvamo z rdečo barvo; v primeru, da se dve izbrani osebi ne poznata, pa povezavo med vozliščema, ki tema dvema osebama pripadata, pobarvamo z modro barvo. Glede na opisano, je reševanje naloge ekvivalentno dokazovanju, da ne glede na to, kako pobarvamo povezave polnega grafa na šestih vozliščih z dvema barvama (modro in rdečo), dobimo poln graf na treh vozliščih, v katerem so vse povezave pobarvane z rdečo (kar ustreza trojici znancev) ali z modro barvo (kar ustreza trojici neznancev). Takšna naloga sodi na področje (grafovskih) Ramseyevih števil (več o tem si lahko preberete v [14]). Za dana enostavna grafa G_1 in G_2 je namreč Ramseyevo število, $R(G_1, G_2)$, najmanjše naravno število *n*, za katerega velja, da pri vsakem barvanju povezav grafa K_n z dvema barvama (označenima z 1 in 2) dobimo kopijo grafa G_1, kjer so vse povezave pobarvane z barvo 1, ali pa kopijo grafa G_2, kjer so vse povezave pobarvane z barvo 2. Reševanje zgoraj zapisane naloge tako sovpada z dokazovanjem, da je $R(K_3, K_3) \leq 6$, kar je znano dejstvo s področja teorije grafov, zapisano na primer v [14].

Umestitev naloge glede na raven izobraževanja
Osnovnošolsko izobraževanje (predmetna stopnja) in srednješolsko izobraževanje.

Primeri možnih prilagoditev naloge ali načina reševanja z namenom zmanjšati težavnost te
- Nalogo lahko z namenom zmanjšanja ravni zahtevnosti prilagodimo tako, da dodamo nove informacije o osebah. Na primer predpostavimo, da ena izmed oseb pozna vse preostale, kar močno olajša reševanje naloge.

- Reševanje originalne naloge lahko učencem ali dijakom olajšamo z ustreznim usmerjanjem, predvsem na način, ki vodi do ideje, da ima vsaka oseba vsaj tri znance ali vsaj tri neznance.

<u>Primer vsebin iz učnega načrta, v sklopu katere lahko z reševanjem naloge uresničujemo operativne cilje</u>

- Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami.
- Kombinatorika oziroma Kombinatorični problemi.

4 ZAKLJUČEK

Vsebine s področja teorije grafov sicer niso neposredno zastopane v učnih načrtih za matematiko v osnovnošolskem ali gimnazijskem izobraževanju, a vseeno je poučevanje teh ali uporaba nalog, ki jih lahko umestimo na področje teorije grafov, ponekod vključeno v poučevanje učencev in dijakov. Naloge, ki na teoriji grafov temeljijo in so ustrezne zahtevnosti, da jih lahko rešujejo tudi učenci in dijaki, najdemo predvsem v strokovni literaturi, namenjeni v prvi vrsti študentom in profesorjem na univerzah, v magistrskih delih študentov, na raznih spletnih straneh in v zbirkah nalog z nekaterih tekmovanj.
Področje vključenosti teorije grafov v osnovnošolsko in srednješolsko izbraževanje v Sloveniji se sicer razvija in ponekod s pridom izkorišča za uresničevanje različnih izobraževalnih ciljev, a za slednje obstaja še veliko manevrskega prostora. Kot smo pojasnili v prispevku lahko namreč z nalogami, ki izhajajo iz različnih vsebin teorije grafov, uresničujemo zelo raznolike splošne in operativne učne cilje poučevanja matematike. Zato bi bilo v bodoče smiselno seznaniti oziroma opomniti učitelje, da opisane možnosti uresničevanja izobraževalnih ciljev obstajajo ter jim tudi ponuditi gradiva, ki bi jim omogočala enostavnejšo, predvsem posredno vključenost teorije grafov v pouk matematike.

Literatura

[1] *E-um*. Pridobljeno 6. 2. 2022.
https://www.e-um.si/

[2] Fellows, M. R. (1993). *Computer science and mathematics in the elementary schools*; v N. D. Fisher, H. B. Keynes, P. D. Wagreich (Ur.), Mathematicians and Education Reform 1990-1991 (str. 143–163). Amer. Math. Society.

[3] Ferme, J. (2016). *Obravnava barvanj grafov in tetivnih grafov v srednješolskem izobraževanju: magistrsko delo.* Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko.

[4] Gorinšek, K., Mihelič, E. (2016). *Teorija grafov in nanocevke: raziskovalno področje matematika: raziskovalna naloga.* Maribor, II. Gimnazija Maribor.

[5] Gregorčič, L. (2012). *Algoritmi za iskanje poti: diplomsko delo na visokošolskem strokovnem študiju.* Univerza v Ljubljani, Fakulteta za računalništvo in informatiko.

[6] Ilić, I. (2018). *Dominacija v grafih in ravninski grafi pri pouku v osnovni in srednji šoli: magistrsko delo.* Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko.

[7] Klavžar, S., in Žigert, P. (2002). *Izbrana poglavja iz uporabne matematike*, Pedagoška fakulteta Maribor.

[8] *Naloge in rešitve tekmovanja ACM Tekmovanja – Bober (starejše)*. Pridobljeno 6. 2. 2022. https://tekmovanja.acm.si/?q=bober/naloge-re%C5%A1itve

[9] *Naloge in rešitve tekmovanja ACM Tekmovanja – Pišek*. Pridobljeno 8. 2. 2022. https://pisek.acm.si/contents/4907-319805995281415931-1246498428199543920-147074868733429854-1552452185123664218/

[10] *Otroški klub EUREKA – primeri nalog (13‒14 let; 8. razred).* Pridobljeno 6. 2. 2022. http://babyschooleureka.com/1314let#razred8

[11] Plavec, K. (2017). *Eulerjevi in Hamiltonovi grafi pri pouku v osnovni in srednji šoli: magistrsko delo.* Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko.

[12] *Spletno mesto inteaktivnih učbenikov - Matematika 5.* Pridobljeno 7. 2. 2022. https://eucbeniki.sio.si/mat5/1207/index6.html

[13] *Vidra.si.* Pridobljeno: 6. 2. 2022 http://vidra.si/index.html

[14] West, D. B. (2001). *Introduction to graph theory* (Vol. 2). Upper Saddle River: Prentice hall.

Dianoia 7 (2023) 27-35

Feeding behaviour of six bird species (Passeriformes) at a bird feeder

Prehranjevalno vedenje šestih vrst ptic (Passeriformes) na ptičji krmilnici

Tina Mihelič, Vesna Klokočovnik

University of Maribor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Koroška cesta 160, 2000 Maribor, Slovenia

Abstract

Many people feed wild birds because it connects them to nature. It is also an opportunity to learn about different bird species, their feeding behaviour, and their food preferences. Despite the positive effects, this activity can also have negative consequences, especially if it is done inappropriately. During February and March 2022, data was collected to determine the feeding preferences and behaviour of birds at a bird feeder. All bird species fed most frequently at the same time of day, between 07:00 and 10:00. Bird species of the family Paridae had similar food preferences and feeding behaviour. The great tit, Eurasian blue tit, marsh tit, and crested tit preferred walnuts over any other food, while the European robin and Eurasian nuthatch preferred hulled sunflower seeds. The crested tit was most often chased away by other species, while the Eurasian nuthatch chased away all the species with which it had interactions.

Key words: birds, Passeriformes, bird feeder, food preference, behaviour, interactions

Povzetek

Hranjenje ptic z uporabo ptičjih krmilnic je dejavnost, ki jo izvaja veliko število ljudi, saj jih povezuje z naravo, še posebej v urbanih okoljih. Hranjenje ptic ima lahko kratkoročne in dolgoročne negativne posledice. Ptice lahko postanejo odvisne od nastavljene hrane, zaradi česar lahko pride do manj učinkovitega iskanja naravnih virov hrane in posledično do nižjega preživetja. Hranjenje ptic na ptičjih krmilnicah naj bi povečalo tudi širjenje bolezni, saj pride do pojavljanja velikega števila osebkov različnih ptičjih vrst na istem mestu. Kljub temu imajo ptičje krmilnice tudi številne pozitivne učinke na nivoju populacije, saj povečana količina hrane izboljša rast mladičev in zmanjša tekmovalnost med sorojenci. V obdobju od februarja do marca 2022 smo zbirali podatke za ugotavljanje preference do nastavljene hrane in prehranjevalnega vedenja ptic, ki so se hranile na ptičji krmilnici. Podatki so bili pridobljeni z analizo posnetkov, ki so bili snemani s kamero Ring. Na krmilnico smo nastavili kosmiče ovsenih zrn, oluščena sončnična semena, neoluščena sončnična semena, oljno pogačo, kosmiče pšeničnih zrn, mandlje, jabolko in orehe. Vse vrste ptic so se v večini hranile ob enakih urah dneva, in sicer med 07:00 in 10:00 in pri vseh vrstah, razen pri močvirski sinici, se je število obiskov na ptičji krmilnici nato ponovno povečalo med 16. in 18. uro. Izbrane vrste, ki pripadajo družini sinic (Paridae), so imele podobno preferenco hrane in prehranjevalno vedenje, saj so se vse v večini prehranjevale z orehi in to tako, da so ali odletele s hrano ali, da so na ptičji krmilnici kljuvale hrano. Taščica in brglez sta se v večini prehranjevala z oluščenimi sončnimi semeni in to tako, da sta goltala cela semena ali že nadrobljene koščke semen. Velika sinica, plavček in brglez so edine vrste, ki so se občasno hranile v parih. Najbolj plašljiva vrsta je bila čopasta sinica, saj je bila največkrat pregnana s strani drugih vrst. Brglez je izkazoval najbolj dominantno vedenje izmed vseh vrst, saj je preplašil vse ostale vrste, s katerimi je imel interakcijo (velika sinica, plavček, močvirska sinica in čopasta sinica).

Ključne besede: ptice, Passeriformes, ptičja krmilnica, preferenca hrane, vedenje, interakcije

1 INTRODUCTION

We, as humans, have had interactions with birds for millennia, being represented in mythology, religion, art, music, etc. One of the most common reasons for feeding birds is that we want to help birds; moreover, birds have a calming effect on us because they provide a connection to nature, especially in urban environments [3]. Feeding birds can have positive impacts on bird species. At a population level, we can see an increase in juvenile populations due to the abundance of food available for the chicks. More food improves the chicks' growth and reduces

E-mail naslov/i: tina.mihelic1@student.um.si (Tina Mihelič), vesna.klokocovnik@um.si (Vesna Klokočovnik)

sibling rivalry, thus a higher fledgling success rate [6]. The food in bird feeders must be appropriate for wild birds. A mixture of seeds is recommended, e.g., sunflower seeds, peanuts,

and oats. Fat balls, fresh coconut, and various fruit are also suitable. Unsaturated fats, milk, mouldy food, cooked food, or bread are not recommended as they are unsuitable for wild birds [5]. Feeding birds may also cause negative short- and long-term impacts on bird species [6]. Short bird feeding periods could cause birds to always expect the food at that exact location. Long feeding periods could result in birds foraging less efficiently for their natural food source. Both dependencies could lead to lower survival rates, especially in the long term [1]. The spread of diseases is also a significant issue with bird feeders due to the number of birds and variety of bird species within close proximity [4, 9]. Therefore, it is important to limit the amount of food available to the birds and clean bird feeders regularly.

The aim of this study was to analyse the feeding preferences and behaviour of birds at the bird feeder. Small birds from the order Passeriformes, which overwinter in Maribor, were expected to visit the bird feeder. The feeding preference and behaviour were expected to be similar among related species within families, such as Paridae and Passeridae.

2 MATERIAL AND METHODS

Field study

The data was collected from 16th February to 1st March 2022 in Maribor, Slovenia. The bird feeder was located on a windowsill of student dormitory 4 (46º33’48.33" N 15º37’30.86" E) (Fig. 1). The windowsill was located 12.5 m above the ground. Silver birch (*Betula pendula*) trees were about 4 m from the student dormitory (Fig. 1). Other tree species, mainly conifers, also grew in the vicinity.

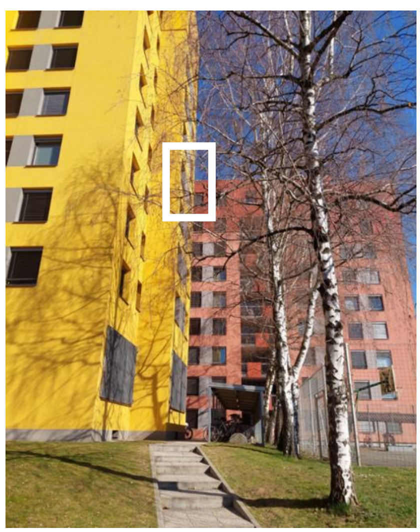


Fig. 1: Student dormitory with a marked window, where the bird feeder was located, with nearby silver birch trees.

The bird feeder was assembled from a piece of marble, hot glue, cardboard, and eight identical glass dishes (10.5 cm diameter). We placed hot glue around each dish to prevent movement. Cardboard was placed around all dishes for additional stability (Fig. 2). We filled each dish with a different type of food, namely oats, hulled sunflower seeds, unhulled sunflower seeds, wheat grain, almonds, walnuts, a quarter of an apple, and a whole fat ball (ingredients:

derivatives of vegetable origin, oils and fats, seeds, cereals, and minerals) (Fig. 2). Every evening (after 19:00) the dishes were refilled with the same amount of food, and they were rearranged to exclude spatial learning in birds.

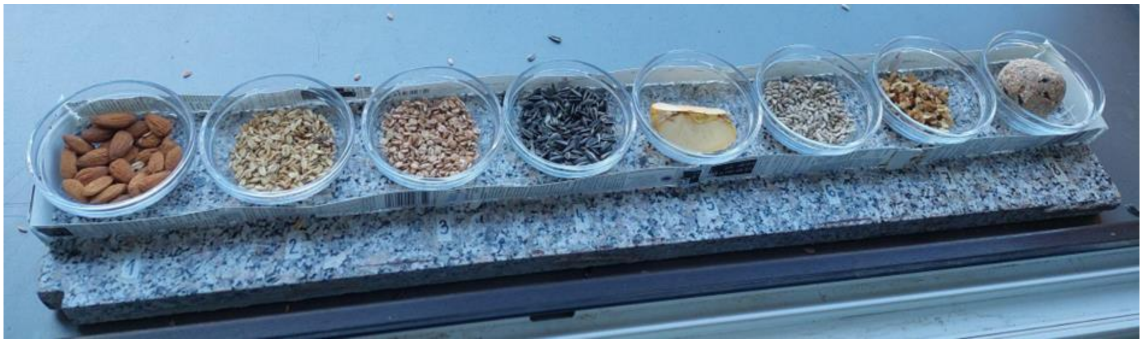


Fig. 2: Bird feeder (from left to right: almonds, oats, wheat grain, unhulled sunflower seeds, apple, hulled sunflower seeds, walnuts, and a fat ball).

Data was collected using a Ring Stick-Up camera (Ring LLC) (Fig. 3), with a motion detector. Recordings were automatically uploaded to the website www.ring.com through a Wi-Fi connection. The recordings can be accessed with an account on the website or mobile device through the Ring application. The light that turns on when the camera detects motion has been covered with tape to avoid disturbing the birds.

Fig. 3: Ring Stick-Up camera.

From the video recordings, we collected data on the bird species that visited the feeder, the date and time of visits, food preference, whether the birds ate or took any food with them during the visit and if so, which food. If they neither fed at the bird feeder nor took any food with them, we counted it as an unsuccessful visit. We only analysed the data for the bird species that visited the feeder more than 50 times during the observation period.

The behaviour of the bird species during visits to the feeder was determined by selecting one random visit per day (14 in total for each species during the observation period). For inter- and intraspecific interactions, only visits during which interactions occurred were considered, whereas, for species-specific feeding behaviour and manipulation of food, only visits without interactions were considered. We created a uniform catalogue of behavioural patterns (ethogram) with a detailed behaviour description for the bird species observed at the feeder. Behaviour during interaction is included in the ethogram.

Statistical analyses

We calculated the total number of visits and the average number of visits per day for the selected bird species. Food preference was tested using the Pearson Chi-square statistics for 6 x 8 contingency table(s). We also calculated the percentage of unsuccessful visits to the feeder for each species and test the differences between species with the non-parametric Mann-Whitney U test. For statistical analysis, we used Microsoft Excel and the software Past 4.11.

3 RESULTS

All bird species observed at the feeder more than 50 times are from the order of passerine birds (Passeriformes), namely the great tit (*Parus major*), Eurasian blue tit (*Cyanistes caeruleus*), marsh tit (*Poecile palustris*), crested tit (*Lophophanes cristatus*), European robin (*Erithacus rubecula*) and Eurasian nuthatch (*Sitta europaea*). The great tit visited the bird feeder most often and was, on average the most abundant bird species at the feeder, while the crested tit visited the bird feeder the least (Table 1).

Table 1: Total number of visits and average number of visits per day, of the bird species during the observation period.

Species	Total number of visits	Average number of visits per day ± SD
Great tit	433	30.93 ± 14.97
Eurasian blue tit	365	26.07 ± 11.86
Marsh tit	84	6.00 ± 5.88
Crested tit	54	3.86 ± 3.44
European robin	97	6.93 ± 3.63
Eurasian nuthatch	204	14.57 ± 10.15

The highest number of different bird species at the feeder during the day was between 06:30 and 10:00 (Fig. 4). This corresponded to the highest number of bird visits recorded at the feeder, which was between 07:00 and 07:15, with 91 visits.

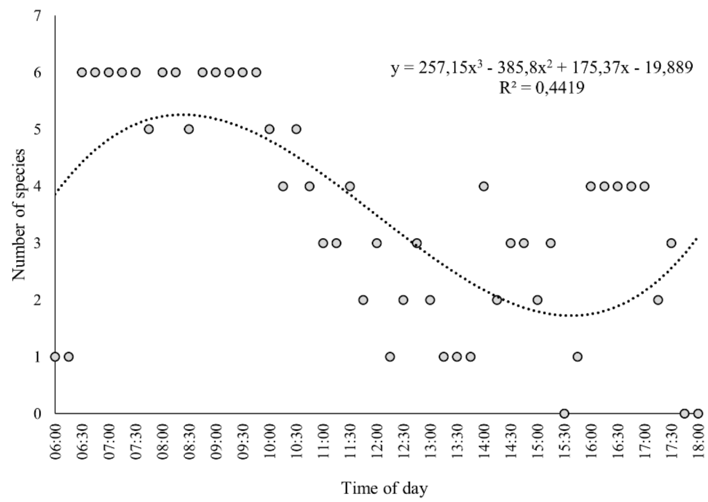


Fig. 4: Number of bird species visiting during the day.

The highest number of visits was from 07:00 and 10:00 and the lowest between 10:00 and 16:00. After 16:00 the number of visits started to increase again. The European robin is the only species that was feeding before 06:30 and the marsh tit is the only species which did not visit the bird feeder after 11:00 (Fig. 5).

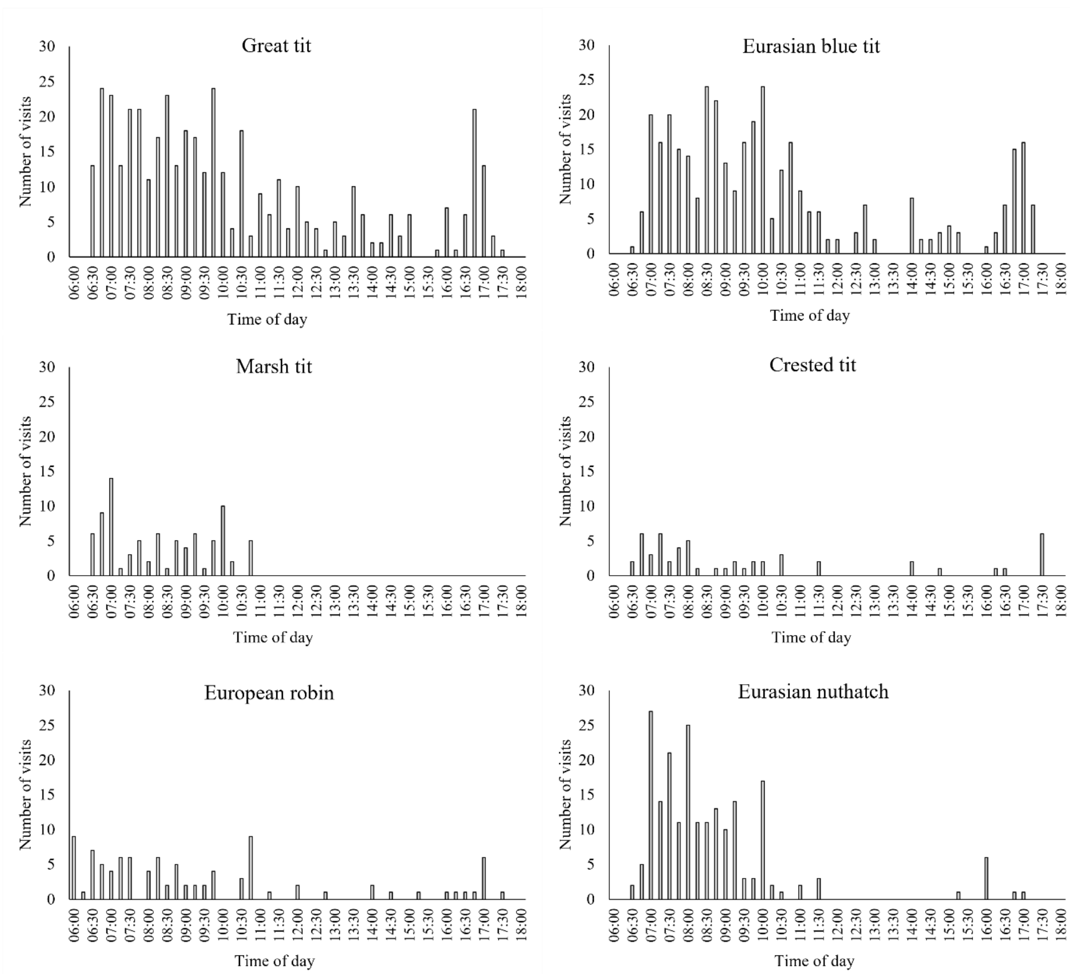


Fig. 5: Frequency of bird species visiting the bird feeder during the day.

The species of the family Paridae (great tit, Eurasian blue tit, marsh tit and crested tit) fed most frequently on walnuts, while the Eurasian nuthatch fed most frequently on hulled sunflower seeds. The European robin fed on hulled sunflower and oats about the same number of times. None of the species fed on the apple (Fig. 6). Each observed bird species showed a statistically significant preference for a certain type of food (Table 2).

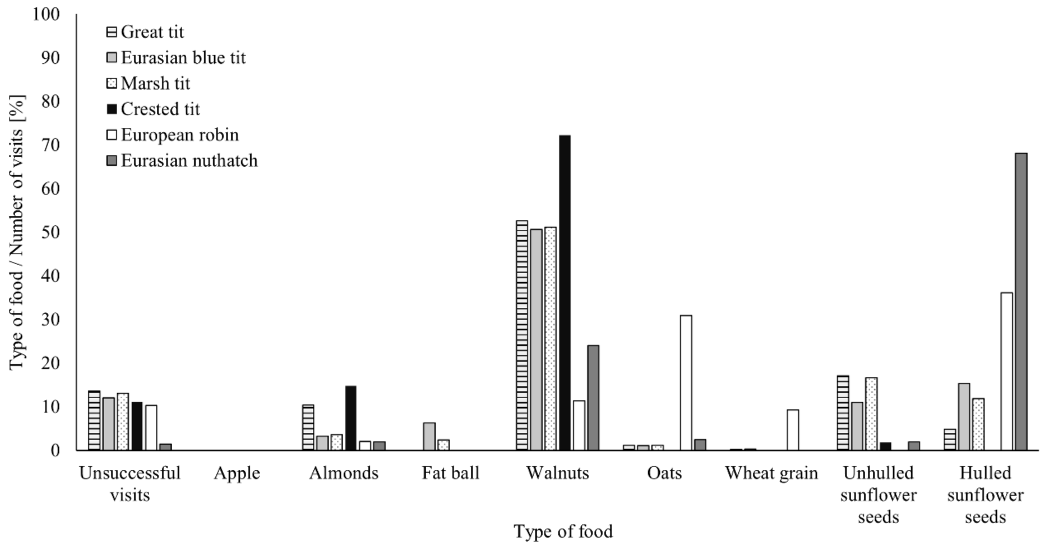


Fig. 6: Proportions of food types consumed by individual species.

Table 2: The results of the Pearson Chi-square test for food preference.

Species	Chi-square test	p	df
Great tit	81.77	< 0.0001	7
Eurasian blue tit	70.23	< 0.0001	7
Marsh tit	76.30	< 0.0001	7
Crested tit	118.89	< 0.0001	7
European robin	68.91	< 0.0001	7
Eurasian nuthatch	105.87	< 0.0001	7

We recorded major behavioural patterns which occurred at the feeder. Interestingly species showed differences in feeding habits, food manipulation, and behaviour when the birds were alone at the feeder or in inter- and intraspecific interactions. Behavioural patterns with descriptions are listed in the behavioural catalogue (Table 3).

Table 3: Ethogram of behavioural patterns of all observed bird species at the feeder.

Type of visit	
Successful visit	The bird feeds at the bird feeder or flies away with food.
Unsuccessful visit	The bird arrives at the bird feeder and leaves without feeding or taking food.
Feeding habit	
Taking food	The bird takes food and flies away.
Feeding on the spot	The bird feeds at the bird feeder.
Manipulation of food	
Swallowing	The bird swallows the food without breaking it into smaller pieces.
Pecking	The bird pecks the food and breaks it into smaller pieces.
Pecking in between feet	The bird holds the food in between its feet and pecks it to break it into smaller pieces.
Interspecific interactions	
Waiting	Bird species A is feeding; meanwhile, bird species B is waiting for species A to leave and feeds afterwards.
Tolerating	Bird species A and B feed simultaneously.
Chasing	Bird species A chases bird species B to move or fly away.
Being chased away	Bird species A moves or flies away, because of bird species B.
Intraspecific interactions	
Waiting	Individual 1 is feeding; meanwhile, individual 2 is waiting for individual 1 to leave and feeds afterwards.
Tolerating	Individuals 1 and 2 feed simultaneously.
Chasing	Individual 1 chases individual 2 to move or fly away.

The percentage of unsuccessful visits to the bird feeder differed significantly between the great tit and European robin ($p = 0.0075$), the great tit and Eurasian nuthatch ($p = 0.0001$), the Eurasian blue tit and European robin ($p = 0.0162$), and the Eurasian blue tit and Eurasian nuthatch ($p = 0.0001$). The Eurasian nuthatch had the lowest percentage of unsuccessful visits (Fig. 6).

The great tit, Eurasian blue tit, and Eurasian nuthatch were the only species that fed in pairs. The Eurasian nuthatch was the only species that did not fear other species, but it did scare away all the other species with which it interacted (the great tit, Eurasian blue tit, marsh tit, and crested tit). The crested tit was the most frightened species and was most often chased away (Table 4).

Table 4: Type of visit, interspecific and intraspecific interactions of the bird species while visiting the bird feeder (SV = successful visit, UV = unsuccessful visit, W = waiting, T = tolerating, C = chasing, BCA = being chased away).

Species	Type of visit [%]		Interspecific interactions [%]				Intraspecific interactions [%]		
	SV	UV	W	T	C	BCA	W	T	C
Great tit [a]	72.73	27.27	14.29	14.29	14.29	57.14	0.00	25.00	75.00
Eurasian blue tit	78.57	21.43	12.50	12.50	37.50	37.50	16.67	83.33	0.00
Marsh tit [b]	83.33	16.67	16.67	33.33	0.00	50.00	0.00	0.00	0.00
Crested tit [c]	66.67	33.33	33.33	0.00	0.00	66.67	0.00	0.00	0.00
European robin [b]	100.0	0.00	16.67	16.67	16.67	50.00	0.00	0.00	0.00
Eurasian nuthatch [a]	100.0	0.00	0.00	33.33	66.67	0.00	0.00	100.00	0.00

[a] Only 11 visits
[b] Only 6 visits
[c] Only 3 visits

The species of the family Paridae mostly took the food and left without feeding on the bird feeder. The European robin and Eurasian nuthatch almost always fed on the bird feeder by swallowing the food whole (or part of it) but flew away without taking any food. Neither the European robin nor Eurasian nuthatch ever pecked the food on the bird feeder, while the species of the family Paridae did. The great tit was the only species of the family Paridae that swallowed the food on the bird feeder (Table 5).

Table 5: Type of visit and frequency of behavioural patterns exhibited by the bird species while visiting the bird feeder alone (SV = successful visit, UV = unsuccessful visit, TF = taking food, F = feeding on the spot, S = swallowing, P = pecking, PF = pecking in between feet).

Species	Type of visit [%]		Feeding manner [%]		Manipulation of food [%]		
	SV	UV	TF	F	S	P	PF
Great tit	100.00	0.00	78.57	21.43	33.33	66.67	0.00
Eurasian blue tit	92.86	7.14	57.14	42.86	0.00	40.00	60.00
Marsh tit [a]	84.62	15.38	69.23	30.77	0.00	50.00	50.00
Crested tit [b]	90.91	9.09	63.64	36.36	0.00	33.33	66.67
European robin [a]	100.00	0.00	0.00	100.00	100.00	0.00	0.00
Eurasian nuthatch	100.00	0.00	7.14	92.86	100.00	0.00	0.00

[a] Only 13 visits
[b] Only 11 visits

4 CONCLUSION

Feeding birds is very popular among people, especially in the wintertime. It can be an opportunity to learn about different bird species, their feeding behaviour and food preferences. Annually, bird conservation organizations encourage people to observe birds in their neighbourhoods, including at bird feeders. This allows individuals to contribute recordings of bird species, which benefits bird species conservation programs by tracking populations and distribution [5]. Several positive effects of bird feeding have been observed, as feeders provide a constant and predictable food source that supplements the natural diet [2, 9]. However, studies also report negative impacts, including an increased risk of disease transmission [6, 7]. The occurrence of bird species at bird feeders depends on several factors, such as the type of feeder, whether it is in an urban or rural environment and interactions between and within bird species [8]. In our study, we recorded six bird species and 1240 visits to the bird feeder. The most common was the great tit, with 433 visits. By observing the interaction of six species, we can conclude that the crested tit is the most fearful, while the Eurasian nuthatch is the most dominant and fearless species.

5 ACKNOWLEDGMENTS

We thank Prof. Dr. Franc Janžekovič for his help with the statistical analysis. We are grateful to Aaron Marshall for his help with the linguistic improvements of the manuscript.

References

[1] Brittingham, M. C., & Temple, S. A. (1992). Does Winter Bird Feeding Promote Dependency?(¿ Promueve Dependencia la Alimentación de aves Durante el Invierno?). *Journal of Field Ornithology*, 190-194.

[2] Brittingham, M. C., & Temple, S. A. (1992). Use of winter bird feeders by black-capped chickadees. *The Journal of wildlife management*, 103-110.

[3] Dayer, A. A., Rosenblatt, C., Bonter, D. N., Faulkner, H., Hall, R. J., Hochachka, W. M., ... & Hawley, D. M. (2019). Observations at backyard bird feeders influence the emotions and actions of people that feed birds. *People and Nature*, *1*(2), 138-151.

[4] Dhondt, A. A., Tessaglia, D. L., & Slothower, R. L. (1998). Epidemic mycoplasmal conjunctivitis in house finches from eastern North America. *Journal of wildlife diseases*, 34(2), 265-280.

[5] DOPPS. *Ptice in ljudje*. (2022). https://www.ptice.si/ptice-in-ljudje/

[6] Robb, G. N., McDonald, R. A., Chamberlain, D. E., & Bearhop, S. (2008). Food for thought: supplementary feeding as a driver of ecological change in avian populations. *Frontiers in Ecology and the Environment*, 6(9), 476-484.

[7] Schaper, L., Hutton, P., & McGraw, K. J. (2021). Bird-feeder cleaning lowers disease severity in rural but not urban birds. *Scientific reports*, 11(1), 12835.

[8] Tryjanowski, P., Skórka, P., Sparks, T. H., Biaduń, W., Brauze, T., Hetmański, T., Martyka, R., Indykiewics, P., Myczko, Ł., Kunysz, P., Kawa, P., Czyż, S., Czechowsk P., Polakowski, M., Zduniak, P., Jerzak, P., Janiszewsk, T., Goławski, A., Duduś, L., Nowakowski, J. J., Wuczyńsk, A., & Wysocki, D. (2015). Urban and rural habitats differ in number and type of bird feeders and in bird species consuming supplementary food. *Environmental Science and Pollution Research*, 22(19), 15097-15103.

[9] Wilcoxen, T. E., Horn, D. J., Hogan, B. M., Hubble, C. N., Huber, S. J., Flamm, J., ... & Wrobel, E. R. (2015). Effects of bird-feeding activities on the health of wild birds. *Conservation physiology*, 3(1).

Dianoia 7 (2023) 37–49

Policijsko število velikih 2-prekrižno-kritičnih grafov

The cop number of large 2-crossing-critical graphs

Matija Kerkoč

Fakulteta za matematiko in fiziko, Jadranska ulica 21, Ljubljana, Slovenija

Povzetek

Policijsko število $c(G)$ grafa G je najmanjše število policistov, ki lahko ujamejo roparja na grafu G v igri policistov in roparja. V članku najprej obravnavamo osnovno različico te igre ter 2-prekrižno-kritične grafe. Dokažemo, da je policijsko število velikih 2-prekrižno-kritičnih grafov enako 2 ali 3. Postavimo tudi domnevo, da je policijsko število takih grafov enako 2 in dokažemo domnevo za posebno družino takšnih grafov.

Ključne besede: prekrižno število, 2-prekrižno-kritični grafi, policijsko število.

Abstract

The cop number $c(G)$ of a graph G is the minimum number of cops that can catch a robber in the game of cops and robber, played on the graph G. In this paper we first present the basic version of this game and define 2-crossing-critical graphs. We prove that the cop number of large 2-crossing-critical graphs is always 2 or 3. Moreover we state the conjecture that the cop number of such graphs is equal to 2 and we prove the conjecture for a special family of such graphs.

Key words: crossing number, 2-crossing-critical graphs, cop number.

1 Uvod

Igra *policistov in roparja* je ena izmed klasičnih iger na grafu. Igro, v kateri nastopata le en policist ter en ropar, so prvič neodvisno predstavili Nowakowski in Winkler [7] ter Quilliot [8] leta 1983. Splošnejšo verzijo igre z več policisti (in definicijo policijskega števila) pa sta prva definirala Aigner ter Froome v [1] leta 1984. En izmed najizčrpnejših virov na to temo je [4], zainteresiranega bralca pa bo morda zanimala tudi knjiga [5], ki je izšla v lanskem letu ter obravnava različne igre lovljenja in izmikanja na grafih. V članku se bomo ukvarjali z osnovno različico igre, pri kateri nastopa en ropar ter poljubno število policistov.

Igro bomo natančneje obravnavali na posebni družini grafov, to so 2-prekrižno-kritični grafi. Definiramo *prekrižno število* $cr(G)$ grafa G, ki pove, kolikšno je najmanše število križanj povezav v ravninski risbi grafa. Definicijo lahko posplošimo ter dovolimo, da ima ravninska risba grafa eno križanje, vendar z odstranitvijo katerekoli povezave ali vozlišča graf postane ravninski. Take grafe imenujemo 1-*prekrižno-kritični grafi*. Po izreku Kuratowskega sta grafa K_5 in $K_{3,3}$ edina taka grafa, ki nimata vozlišč stopnje 2. Zastavljen problem lahko posplošimo in iščemo c-prekrižno-kritične grafe za $c \geq 1$. Vendar je vprašanje že za $c = 2$ konkretno težje.

E-naslov: kerkoc.matija@gmail.com (Matija Kerkoč)

V 2. poglavju definiramo osnovno verzijo igre policistov in roparja, v 3. poglavju pa predstavimo osnovne lastnosti 2-prekrižno-kritičnih grafov. V 4. poglavju postavimo zgornjo in spodnjo mejo za policijsko število takih grafov ter poiščemo policijsko število za specifično družino takih grafov. V zadnjem poglavju obravnavamo posebno taktiko lova policistov, postavimo domnevo za natančno policijsko število ter podamo nekaj smernic za nadaljnje raziskovanje.

2 Igra policistov in roparja

Pravila osnovne različice igre so sledeča.

Definicija 2.1. Naj bo G graf. *Policijsko število* $c(G)$ je najmanjše število policistov, ki zagotavlja njihovo zmago (ne glede na to, kako igra ropar) pri igri policistov in roparja na grafu G z naslednjimi pravili:

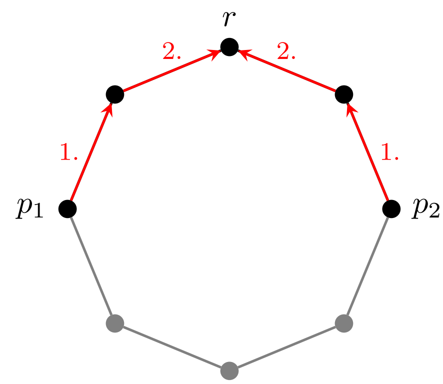
1. prvi igralec v potezi 0 postavi policiste v izbrana vozlišča (več policistov lahko zaseda isto vozlišče),
2. drugi igralec v potezi 0 postavi roparja v poljubno začetno vozlišče,
3. igralca si poteze izmenjujeta,
4. prvi igralec lahko na svoji potezi vsakega policista pusti na mestu ali ga premakne na njemu sosednje vozlišče,
5. drugi igralec lahko na svoji potezi pusti roparja na mestu ali ga premakne na sosednje vozlišče,
6. igra se konča z zmago prvega igralca, ko vsaj eden od policistov zaseda isto vozlišče kot ropar. Če se to nikoli ne zgodi, zmaga ropar.

Policiste bomo označevali s $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (ali p v primeru enega policista), roparja pa z r. Trenutna razdalja $d_G(p_i, r)$ policista p_i do roparja r, je dolžina najkrajše poti od vozlišča, na katerem je policist p_i, do vozlišča, na katerem je ropar r, v grafu G pri trenutni postavitvi. Definirano razdaljo bomo označevali z $d(p_i, r)$, če je očitno o katerem grafu govorimo. Igra se konča z zmago prvega igralca, ko je razdalja $d(p_i, r)$ enaka 0, za vsaj en $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Primer 2.2. Utemeljimo, da za poljuben cikel C_n, $n \geq 4$ velja $c(C_n) = 2$.

Najprej opazimo, da en policist ne zadošča. Res, prvi igralec postavi policista p na poljubno vozlišče, drugi igralec pa roparja na njemu nesosednje (in ne na vozlišče policista) vozlišče – to obstaja, ker smo privzeli $n \geq 4$. Označimo začetno razdaljo $d := d(p, r)$. Po predpostavki je $d \geq 2$. V eni potezi lahko prvi igralec zmanjša razdaljo $d(p, r)$ za največ 1. Če se to zgodi, v naslednjem koraku drugi igralec premakne roparja po ciklu v isti smeri in spet poveča razdaljo $d(p, r)$ na prejšnjo vrednost, sicer roparja pusti na mestu. Tako lahko drugi igralec na vsakem koraku igre zagotavlja $d(p, r) \geq d - 1 \geq 1$, kar pa ravno pomeni, da se igra nikoli ne konča. To je zmagovalna strategija roparja.

Zmagovalna strategija prvega igralca za dva policista je naslednja. Naj bosta policista p_1, p_2 in ropar r v poljubnih vozliščih cikla C_n. Brez škode za splošnost predpostavimo, da so vsi trije na različnih vozliščih. Označimo s H pot od vozlišča p_1 do vozlišča p_2, na kateri leži vozlišče r. Velja $d_G(p_i, r) \leq d_H(p_i, r)$ za $i \in \{1, 2\}$, ker je graf H podgraf grafa G.



Slika 1: Strategija dveh policistov na ciklu C_8.

Dolžina poti H je enaka $d_H(p_1, r) + d_H(p_2, r) - 1$. Prvi igralec lahko ob vsaki svoji potezi s premikom policistov po poti H proti roparju zmanjša razdalji $d_H(p_1, r)$ in $d_H(p_2, r)$ vsako za 1. S tem se za 2 zmanjša vsota $d_H(p_1, r) + d_H(p_2, r)$. Na potezi drugega igralca pa se ne glede na premik roparja njegova vsota razdalj do policistov $d_H(p_1, r) + d_H(p_2, r)$ ne spremeni. Tako je po končno mnogo korakih vsaj ena od razdalj $d_H(p_1, r)$ in $d_H(p_2, r)$ enaka 0 in igra se konča s zmago policistov. Primer igre na ciklu C_8 prikazuje slika 1.

3 2-prekrižno-kritični grafi

Leta 2016 je Bokal s sodelavci podal klasifikacijo 2-prekrižno-krtičnih grafov [2, izrek 15].

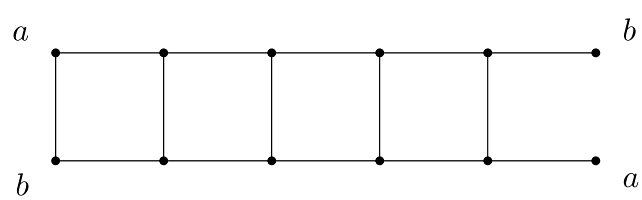
Izrek 3.1 (Klasifikacija 2-prekrižno-kritičnih grafov)**.** *Naj bo G 2-prekrižno-kritičen graf z najmanjšo stopnjo vozlišča vsaj 3. Potem velja ena izmed naslednjih trditev*

1. *G je 3-povezan, vsebuje subdivizijo grafa V_{10} in ima specifično obliko Möbiusovega traka, sestavljenega iz posebnih tlakovcev, kjer je vsak tlakovec lahko en izmed 42 možnih tlakovcev. Vse take strukture so 3-povezane in 2-prekrižno-kritične.*

2. *G je 3-povezan, nima subdivizije V_{10} in ima največ 3 milijone vozlišč.*

3. *G ni 3-povezan in je eden izmed 49 posebnih primerov.*

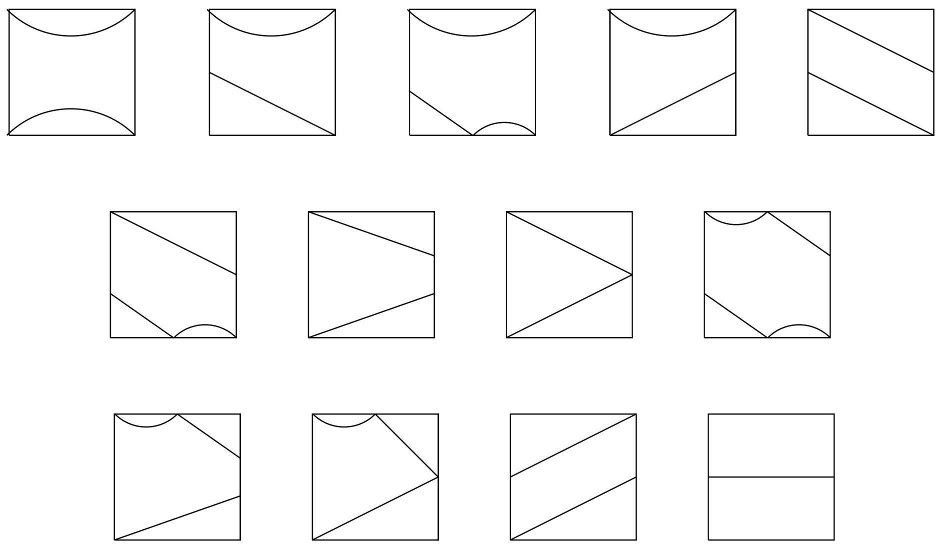
4. *G je 2-povezan, vendar ni 3-povezan in ga lahko dobimo iz 3-povezanega, 2-prekrižno-kritičnega grafa tako, da njegove dvojne povezave zamenjamo s potmi iz dvojnih povezav.*



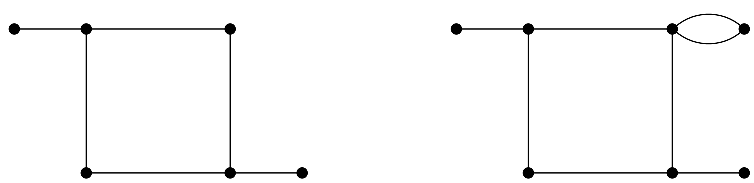
Slika 2: Risba grafa V_{10} v ravnini.

Opomba 3.2. Graf V_n (za sode n) se imenuje Möbiusova lestev. Konstruiramo ga tako, da ciklu C_n dodamo $n/2$ povezav med nasproti ležečimi vozlišči. Na sliki 2 je risba grafa V_{10} v ravnini, kjer identificiramo vozlišči, označeni z a in b. Graf V_{10} lahko vložimo v Möbiusov trak.

Ukvarjali se bomo z grafi iz 1. točke izreka 3.1. Za lažje razumevanje take grafe imenujemo *veliki* 2*-prekrižno-kritični-grafi*. Zaradi posebne oblike lahko njihovo konstrukcijo eksplicitno zapišemo.



Slika 3: Trinajst ploščic, ki jih poimenujemo s črkami abecede. Prva vrsta: DD, DV, DB, DA in VV, druga vrsta: VB, VA, VIA in BB, tretja vrsta: BA, BIA, AA in H.



Slika 4: Dva možna okvirja v katera vstavljamo ploščice.

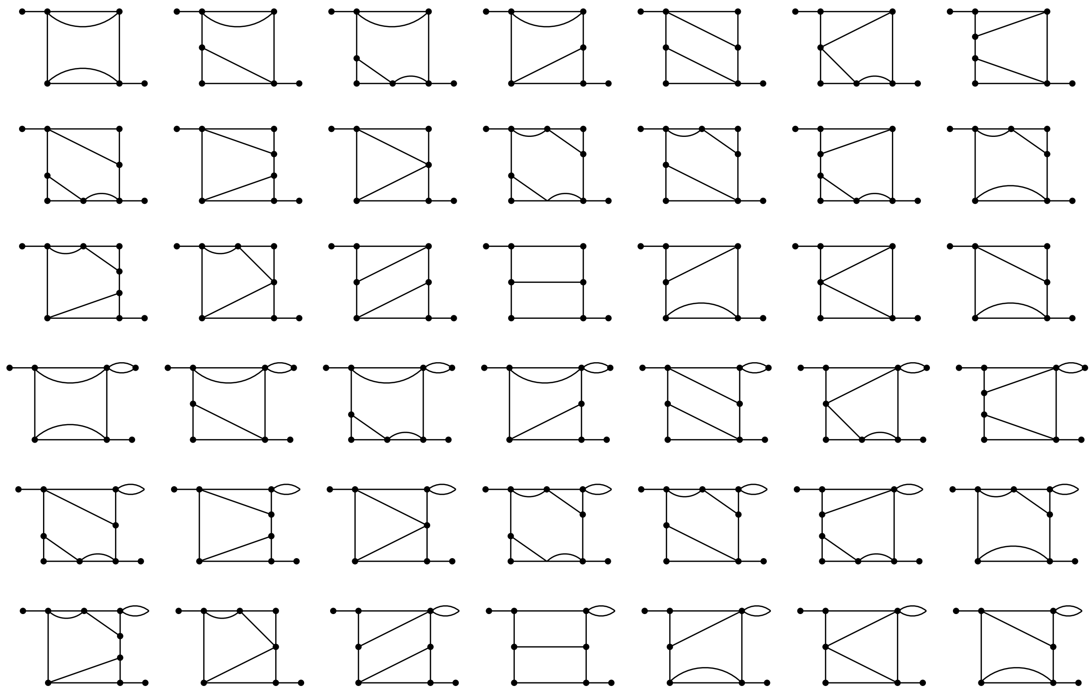
Osnovni gradniki velikega 2-prekrižno-kritičnega grafa so *ploščice*, prikazane na sliki 3. Vsako izmed ploščic lahko na dva načina vstavimo v okvira, prikazana na sliki 4, v originalni poziciji ali zarotirano za $180°$ in tako dobimo *tlakovce*. Ker so nekatere možnosti simetrične, dobimo 42 možnih različnih tlakovcev, ki so prikazani na sliki 5. Tlakovce nato zlepimo skupaj ter jih vložimo v Möbiusov trak (natančen opis lepljenja je opisan v [2, definicija 2.2]).

Definiramo tudi poimenovanje tlakovcev preko abecede na naslednji način:

1. zgornja pot: $P_t \in TP = \{A, B, V, D, H\}$,

2. identifikacija: $Id \in ID = \{I, \emptyset\}$,

3. spodnja pot: $P_b \in BP = \{A, B, V, D, \emptyset\}$,



Slika 5: Vseh 42 različnih tlakovcev, ki jih uporabljamo pri konstrukciji velikih 2-prekrižno-kritičnih grafov.

4. okvir: $Fr \in \{L, dL\}$.

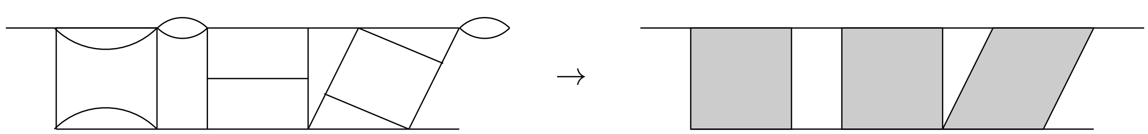
Vsak tlakovec ima tako enolično poimenovanje oblike $P_t\ Id\ P_b\ Fr$.

Konstruirani grafi vsebujejo subdivizijo V_{10} in so sestavljeni iz liho mnogo staknjenih tlakovcev. Če tak graf gledamo kot vložitev v Möbiusov trak, podgraf na njegovem robu imenujemo *obod*.

V članku bomo grafe opazovali lokalno, torej nekaj zaporednih tlakovcev oziroma odseke Möbiusovega traku. Takšne odseke lahko (ravninsko) narišemo v pravokotnik tako, da sta odseka oboda na njegovi zgornji in spodnji stranici. S tem dobijo smisel tudi pojmi "zgoraj", "spodaj", "levo", "desno", saj jih razumemo glede na risbo v pravokotniku.

Vsaka ploščica ima ravninsko risbo v enotskem kvadratu ([2, definicija 2.1]). Vozliščem na levi stranici kvadrata bomo rekli *leva prečka*, vozliščem na desni stranici pa *desna prečka* ploščice (oziroma tlakovca). Če nas notranja zgradba tlakovcev ne bo zanimala, jih bomo risali kot osenčene kvadrate/paralelograme v ravnini (glej sliko 6).

Definiramo še *preprečno vozlišče*. To je vozlišče, ki – v primeru, da ga zaseda policist – onemogoča roparju prehod čez prečko tlakovca.



Slika 6: Primer okleščene slike 2-prekrižno-kritičnega grafa.

Opomba 3.3. Omenimo še, da lahko vzporedne povezave za potrebe naše verzije igre policistov in roparja na grafu ignoriramo. Ker ropar med policistovo potezo čaka, se ne more izmuzniti po drugi – vzporedni – povezavi.

4 Zgornja in spodnja meja za policijsko število

Zaradi specifične zgradbe zgoraj opisanih grafov lahko hitro omejimo njihovo policijsko število.

Izrek 4.1. *Naj bo G graf iz prve točke izreka 3.1. Potem velja* $2 \leq c(G) \leq 3$.

Dokaz. En policist ne zadošča za zmago prvega igralca. Naj bo p policist, postavljen na izbrano vozlišče grafa G. Drugi igralec poišče cikel C_4 brez tetive (t.j. induciran podgraf C_4) ter postavi roparja v tako vozlišče cikla C_4, da velja $d_G(p, r) \geq 2$. Takemu ciklu bomo rekli *pravi cikel*. Tak cikel lahko v 2-prekritično kritičnem grafu vedno najdemo (t.j. G ni tetivni graf) bodisi v notranjosti posameznega tlakovca, bodisi na stičišču dveh tlakovcev. V trenutku, ko ropar doseže tak cikel, je vedno varen. Roparjevo premikanje po pravem ciklu, ločimo na dva primera:

(i) če sta tako ropar kot policist oba na ciklu C_4, se ropar preprosto premika v smeri/v nasprotni smeri urinega kazalca po ciklu, glede na policistovo premikanje v smeri/v nasprotni smeri urinega kazalca po ciklu,

(ii) če policist ni na istem C_4 ciklu kot ropar, se ropar premika po ciklu tako, da v vsaki potezi vzdržuje (ali celo povečuje) razdaljo do policista.

Preko opisane strategije lahko ropar na vsakem koraku zagotavlja $d_G(p, r) \geq 1$, kar pomeni zmago roparja.

Trije policisti vedno zadoščajo. Po [3, posledica 7.7] je drevesna širina poljubnega velikega 2-prekrižno-kritičnega grafa enaka 4 ali 5. Po [6, trditev 5] pa imamo oceno

$$c(H) \leq \mathrm{tw}(H)/2 + 1 \tag{4.1}$$

za poljuben graf H. Če oceno (4.1) uporabimo na grafu G, dobimo $c(G) \leq 3$, kar je želena ocena. □

Primer 4.2. Poglejmo primer družine grafov s policijskim številom 2. Naj bo G 2-prekrižno-kritičen graf, sestavljen iz n tlakovcev HL.

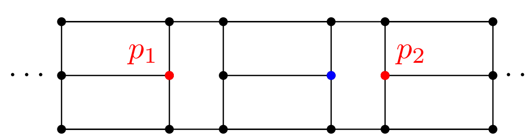
Naj bo T_i tlakovec, na katerega je bil v potezi 0 postavljen ropar. Opazimo, da poljuben policist potrebuje 3 poteze, da pride iz preprečnega vozlišča enega tlakovca v najbližje preprečno vozlišče sosednjega tlakovca in le eno potezo, da pride iz enega preprečnega vozlišča v drugo preprečno vozlišče istega tlakovca. Več o tej tehniki premikanja bomo povedali v poglavju 5. Brez škode za splošnost lahko sedaj poljubno začetno postavitev prevedemo na situacijo, ko je ropar na tlakovcu T_i, policist p_1 na desnem preprečnem vozlišču tlakovca T_{i-2}, policist p_2 pa na levem preprečnem vozlišču tlakovca T_{i+2}.

Glede na roparjevo pozicijo na tlakovcu T_i ločimo dva primera:

(i) Če je ropar v preprečnem vozlišču svojega tlakovca, mora za svoj pobeg gotovo narediti dodatno potezo do oboda grafa in s policistoma lahko brez težav vstopimo v levo oziroma desno preprečno vozlišče tlakovcev T_{i-1} ter T_{i+1}. Še več, ko smo vstopili v preprečni vozlišči, ki sta roparju bolj oddaljeni, imamo sedaj možnost premika čez tlakovec v roparju bližnji preprečni vozlišči omenjenih tlakovcev. Edini problem se lahko pojavi, če ropar čaka v vozlišču na obodu tlakovca s policistom in se ob policistovem premiku čez tlakovec izmuzne mimo. Vendar lahko s tem policistom preprosto ostanemo v oddaljenem preprečnem vozlišču in se dodatno približamo z drugim policistom.

(ii) Če je ropar na obodu tlakovca T_i lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da je ropar v zgornjem levem vozlišču tega tlakovca. V tem primeru s policistoma preprosto stopimo navzgor in tako roparju onemogočimo izhod po zgornjem obodu grafa. V primeru, da bi ropar želel zamenjati obod ter pobegniti po spodnjem obodu, bo v ta namen porabil vsaj dve dodatni potezi, kar zopet pomeni, da lahko s policistoma vstopimo v oddaljeni preprečni vozlišči bližnjih tlakovcev. Enako kot v prejšnjem primeru lahko sedaj ponovno naredimo premik čez tlakovca ter se premaknemo v roparju bližnji preprečni vozlišči (oziroma z enim policistom ostanemo v vozlišču ter roparju približamo drugega).

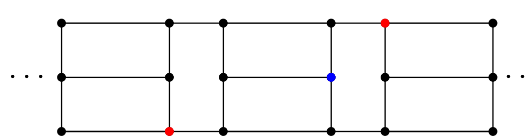
Poljubno začetno postavitev policistov ter roparja smo prevedli na pozicijo, prikazano na sliki 7. Vse preostale možnosti se morda razlikujejo le v roparjevem položaju na tlakovcu T_i.



Slika 7: Položaj, na katerega se prevedejo vse začetne postavitve roparja ter policistov.

Opomba 4.3. V opisanih primerih ima ropar možnost, da čaka bližje enemu izmed policistov (na primer v zgornjem desnem vozlišču svojega tlakovca na sliki 7) in tako načrtuje svoj pobeg, ko se bo ta policist premaknil (na primer čez tlakovec ali navzdol). V tem primeru z bližnjim policistom preprosto počakamo v preprečnem vozlišču ter se približujemo zgolj z oddaljenim policistom (ki ima sedaj veliko več manevrskega prostora). Na splošno je za roparja edina uspešna taktika, da poskuša vzdrževati enako razdaljo do obeh policistov ter v primernem trenutku (ko sta policista dovolj blizu) pobegniti.

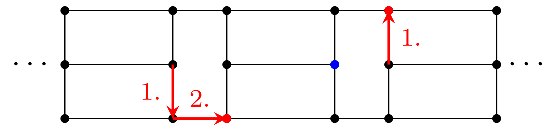
Kako policista sedaj dokončata lov? Prvi igralec prestavi policista v *diagonalno pozicijo* glede na roparjev tlakovec (prikazana na sliki 8).



Slika 8: Diagonalna pozicija roparjev ter policistov.

Brez škode za splošnost lahko prestavi policista p_1 navzdol, policista p_2 pa navzgor. Ropar ima sedaj dve smiselni možnosti:

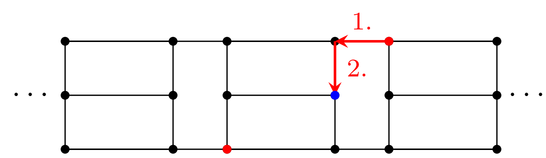
(i) ropar ostane na mestu: s policistom p_2 ostanemo na mestu, policist p_1 pa se premakne v naslednje desno vozlišče. V tem vozlišču policist nadzoruje dve pomembni vozlišči, skozi kateri bi lahko ropar pobegnil, vozlišče nad roparjem pa nadzoruje policist p_2. Situacija je prikazana na sliki 9. Če ropar tudi v naslednji potezi ostane



Slika 9: Pozicija po 2 potezah, če ropar ostane pri miru.

na mestu, se s policistom p_2 prebijemo na roparjev tlakovec v vozlišče neposredno nad roparjem in ropar nima več možnosti izhoda. V naslednji potezi ga s policistom p_2 ujamemo. V primeru, da se ropar premakne v katerokoli vozlišče (levo ali navzdol), pa je ujet takoj v naslednji potezi s policistom p_1.

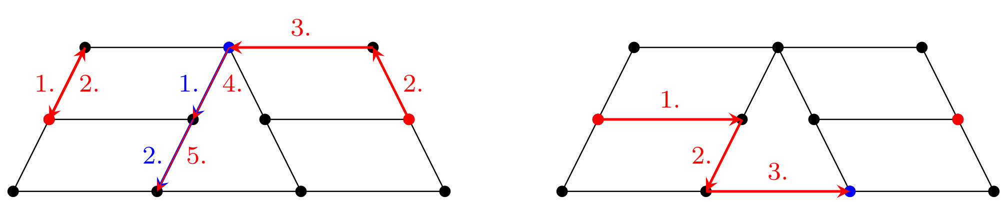
(ii) ropar se premakne navzdol: s policistom p_1 se sedaj zopet premaknemo v desno (ter tako vstopimo v roparjev tlakovec), s policistom p_2 pa se moramo premakniti nazaj navzdol (saj moramo varovati ubežno pot po spodnjem obodu grafa proti desni). V drugi potezi se je ropar prisiljen premakniti nazaj navzgor v preprečno vozlišče svojega tlakovca (sicer ga s policistom p_1 ujamemo v naslednji potezi). V tem trenutku se s policistom p_2 zopet premaknemo navzgor (policist p_1 pa ostane na mestu). Ropar je ujet v naslednjih dveh potezah s policistom p_2, kot je prikazano na sliki 10.



Slika 10: Primer končnega ulova roparja s policistom p_2.

Kaj se zgodi v primeru, ko je graf G sestavljen le iz tlakovcev HdL? Zdi se, da taki tlakovci ustrezajo roparju, saj bo lahko preko vrha trikotnika v spoju med okviroma dL ropar hitreje pobegnil. Vendar se izkaže, da to ni res. Kljub temu da taki tlakovci ustrezajo roparju, se lahko policista prilagodita in uporabita strategijo, v kateri bodo tlakovci HdL pravzaprav koristili njima, saj lahko policist sedaj preko dL spoja prestopi iz preprečnega vozlišča enega tlakovca v bližnje preprečno vozlišče naslednjega tlakovca v 2 potezah. Ponovno lahko upoštevamo, da ropar ob prehodu na drug obod zapravi 2 potezi.

Z nekoliko spretnejšim argumentom kot v primeru tlakovcev HL lahko tudi sedaj poljubno začetno postavitev roparja in policistov prevedemo na enega izmed primerov, prikazanih na sliki 11, in roparja ujamemo.



Slika 11: Zaključni koraki lova roparja v primeru tlakovcev HdL.

Trditev 4.4. *Naj bo G graf sestavljen iz tlakovcev HL ali HdL. Potem velja $c(G) = 2$.*

Ideja dokaza. V primeru mešanih okvirov moramo strategijo lova policistov nekoliko prirediti, saj se lahko zgodi, da konfiguracija tlakovcev ustreza roparju in ta lahko pobegne. Ideja strategije na takih grafih je, da sledimo premikom roparja glede na to, na katerem obodu se nahaja.

Ne glede na to, kje se ropar nahaja na začetku, bo za izhod iz svojega tlakovca moral izbrati pot po zgornjem ali spodnjem obodu grafa. S policistoma se najprej dovolj približamo roparju (t.j. na tlakovca T_{i-2} in T_{i+2}), nato pa posnemamo roparja. Če ropar ubere pot po zgornjem/spodnjem obodu, se tudi s policistoma premaknemo v naslednji tlakovec po zgornjem/spodnjem obodu ter tako blokiramo roparja. V primeru, da ropar želi zamenjati obod, pa bo vedno porabil 2 potezi. V primeru, da pred zamenjavo oboda ali po njej želi priti še na oddaljeno prečko naslednjega tlakovca, pa še dodatno potezo.

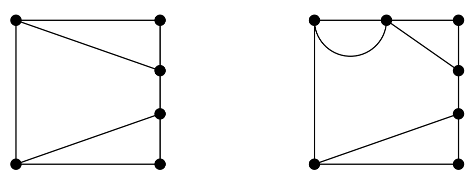
Torej lahko s policistoma vedno pridemo do bližnjega preprečnega vozlišča na naslednjem tlakovcu (za to potrebujemo 3 poteze, ropar pa do omenjene prečke prav tako 3) ali pa se premaknemo na nasprotno preprečno vozlišče po tlakovcu (za to potrebujemo eno potezo, ropar pa v najboljšem primeru 2).

Za dokončanje dokaza zadošča, da pregledamo vse možne konfiguracije treh tlakovcev, sestavljene iz ploščic H ter okvirov L in dL. □

5 Strategija preprečnih vozlišč

Preprečna vozlišča so pomembna pri oblikovanju taktike lova policistov, saj nam omogočajo, da z enim samim policistom blokiramo celotno stran grafa pred roparjevim vdorom.

Ker bo naša strategija lovljenja roparja temeljila na uporabi preprečnih vozlišč, bodo nekateri tlakovci predstavljali problem. To bodo tisti tlakovci, ki imajo na eni prečki štiri vozlišča. To so tlakovci, ki vsebujejo ploščici VA ali BA, prikazani na sliki 12 oziroma katerikoli izmed njunih rotacij.



Slika 12: Ploščici VA in BA, ki vsebujeta prečko s 4 vozlišči.

Naj bo G velik 2-prekrižno-kritičen graf, ki ne vsebuje ploščic VA ali BA. Potem veljata naslednji pomožni lemi.

Lema 5.1. *Policist se iz levega/desnega preprečnega vozlišča tlakovca lahko premakne na desno/levo preprečno vozlišče istega tlakovca v največ* 3 *potezah.*

Dokaz. Število potez bo doseženo v primeru, ko se policist premakne po tlakovcu BB. □

Lema 5.2. *Policist se iz levega/desnega preprečnega vozlišča tlakovca lahko premakne na bližnje desno/levo preprečno vozlišče naslednjega tlakovca v največ* 3 *potezah.*

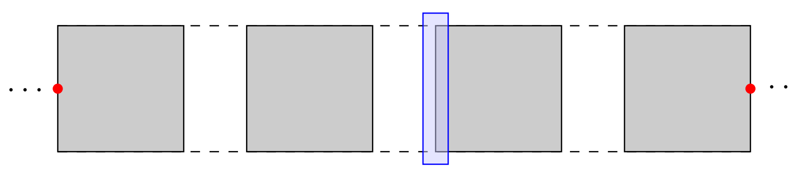
Dokaz. Število potez bo na primer doseženo, ko se policist premakne iz levega/desnega preprečnega vozlišča tlakovca na desno/levo preprečno vozlišče sosednjega tlakovca v odseku $HLHL$. □

Lemi 5.1 in 5.2 nam omogočata, da policistove premike modeliramo poljubneje, dokler je policist dovolj oddaljen od roparja. Policist se lahko vedno premakne v naslednje preprečno vozlišče (bližje roparju), če velja, da je ropar od prečke, na kateri leži omenjeno preprečno vozlišče, oddaljen najmanj 3 poteze. Z drugimi besedami, poljubno začetno postavitev policistov ter roparja lahko vedno prevedemo na primer, opisan v naslednjem izreku.

Izrek 5.3. *Naj bo G velik 2-prekrižno-kritičen graf, ki ne vsebuje tlakovcev VA ali BA. Označimo tlakovec, na katerem je ropar s T_i. Potem se lahko s policistoma približamo roparju na način, da velja:*

- *eden izmed policistov je v preprečnem vozlišču oddaljene prečke sosednjega tlakovca na eni strani roparjevega tlakovca,*
- *drugi policist pa je na oddaljeni prečki tlakovca, ki je od roparjevega tlakovca oddaljen za dva tlakovca.*

Dokaz. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je ropar v obodnem vozlišču leve prečke tlakovca T_i (vsaka druga postavitev roparja je kvečjemu slabša zanj, v primeru, da je ropar na desni prečki, pa je situacija simetrična), policist p_1 na levi strani roparja, policist p_2 pa na desni strani. Lemi 5.1 in 5.2 nam zagotavljata, da se policista lahko približata roparju na tako razdaljo, da ne bo mogel uiti v 3 korakih. V našem primeru to pomeni, da se lahko policist p_1 zagotovo premakne v preprečno vozlišče na levi prečki tlakovca T_{i-2}, policist p_2 pa v preprečno vozlišče na desni prečki tlakovca T_{i+1}.



Slika 13: Pozicija, na katero se prevede katerokoli naivno bližanje policistov.

V omenjenem primeru moramo paziti le na eno stvar. V primeru idealnih tlakovcev ima lahko ropar do desne prečke tlakovca T_{i+1} le dve potezi (če se ropar odloči premikati po zgornjem obodu). Vendar pa lahko policist p_2 to predvidi in tudi sam ubere pot (morda daljšo, še vedno pa dolgo največ 3 poteze) preko zgornjega oboda. Ker je roparjeva pot v primeru, da zamenja obod, dolga vsaj 3 poteze, je policist p_2 že v preprečnem vozlišču na omenjeni prečki in tako onemogoča roparjev izhod. □

Opomba 5.4. Strategija, opisana v izreku 5.3, je naivna in vključuje le bližanje enega policista naenkrat. V primeru roparjevega premika lahko s sočasnim premikom drugega policista zagotovimo *precej* uspešnejšo strategijo lova.

Izrek 5.5. *Iz situacije, opisane v izreku 5.3, se lahko vsaj z enim policistom premaknemo na notranjo prečko tlakovca, na katerem je ta policist.*

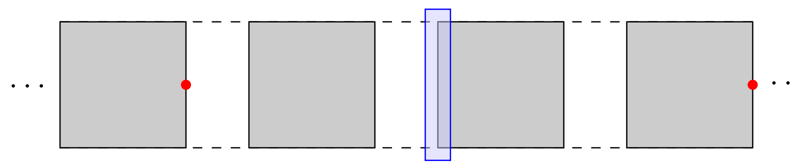
Dokaz. Ropar v najboljšem primeru potrebuje 2 potezi, da se premakne do prečke, ki vsebuje ciljno preprečno vozlišče za policista. Torej morata policista pridobiti zgolj eno potezo v primerjavi z roparjevo.

S policistoma naredimo potezo proti roparju (v primeru, da taka poteza ne obstaja, se lahko policista premakneta navzdol ali navzgor proti obodu, na katerem je ropar). V primeru, da ropar ostane na mestu, smo potrebno potezo že pridobili in eden izmed policistov (v tem primeru celo oba) se lahko v naslednjih dveh potezah mirno premakne v želeno preprečno vozlišče.

Recimo sedaj, da se je ropar premaknil. Označimo s X_1 in X_2 ciljni prečki na levi in desni strani roparja. Ne glede na roparjev premik se je vsaj ena izmed razdalj $d_G(r, X_i) := \min_{v_j \in V(X_i)}(r, v_j)$, $i \in \{1, 2\}$ povečala vsaj za 1. Torej se lahko s pripadajočim policistom p_i zopet premaknemo v ciljno preprečno vozlišče.

V primeru, da se ropar odloči za pobeg po eni strani (torej se ne vrne na začetni tlakovec), se bomo s policistom na tej strani v drugi potezi primerno prilagodili tako, da roparju onemogočimo izhod (t.j. vrnili nazaj v začetno preprečno vozlišče).

Končna pozicija policistov in roparja je prikazana na sliki 14.



Slika 14: Pozicija, na katero se prevede poljubna začetna postavitev roparja ter policistov.

□

Tekom raziskovanja različnih velikih 2-prekrižno-kritičnih grafov se oblikuje ideja, da sta dva policista dovolj. Postavimo domnevo.

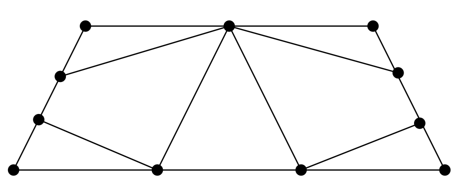
Domneva 5.6. *Naj bo G graf iz prve točke izreka 3.1. Potem velja $c(G) = 2$.*

V duhu trenutnega poglavja je smiselno postaviti tudi nekoliko šibkejšo različico zgornje domneve.

Domneva 5.7. *Naj bo G graf iz prve točke izreka 3.1, ki ne vsebuje ploščic BA, VA in njunih rotacij. Potem velja $c(G) = 2$.*

Dokaz domneve 5.6 prihranimo za nadaljne raziskovanje, oglejmo si raje primer, ko strategija preprečnih vozlišč propade.

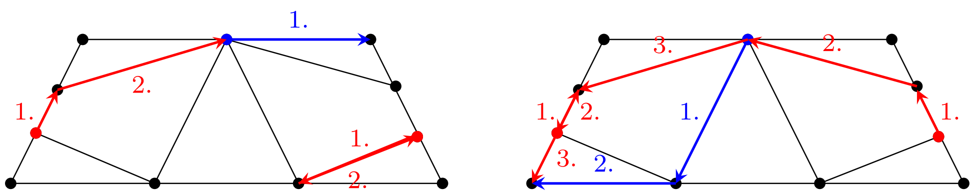
Primer 5.8. Recimo, da graf G vsebuje odsek $AVLVAL$, prikazan na sliki 15. Na takem odseku lahko ropar zadržuje policista na zunanjih prečkah. Če se ropar nahaja na notranjem trikotniku omenjenega odseka, lahko v primeru, da katerikoli izmed policistov poskuša "napredovati" proti roparju, ta pobegne. Vendar imata policista moč, da roparja prisilita, po katerem obodu se mora izmuzniti (zgornjem ali spodnjem).



Slika 15: Primer odseka, na katerem lahko ropar vzdržuje "status quo" tako, da se giblje po centralnem trikotniku glede na gibanje policistov.

Centralni trikotnik, po katerem se premika ropar, je namreč "hitrejši" (ima manj vmesnih vozlišč) od zunanjih prečk, po katerih se premikata policista. V trenutku, ko ropar preide iz enega oboda na drugega, se morata policista prilagoditi. To pa pomeni pot po zunanjih prečkah nazaj. V trenutku, ko eden izmed policistov preide iz zunaje prečke na notranji trikotnik, je to priložnost za roparja, da se izmuzne.

Kot je že omenjeno, pa imata policista nadzor nad tem, po katerem obodu bo ropar izšel iz $AVLVAL$ odseka. V ta namen se policista ne ozirata na roparjeve premike, ampak le zasedeta ključna vozlišča tako, da prisilita roparja v želen izhod. Primera strategij prikazuje slika 16.



(a) Izhod po zgornjem obodu.

(b) Izhod po spodnjem obodu.

Slika 16: Primera, ko policista prisilita roparja, da pobegne po zgornjem (a) oziroma spodnjem (b) obodu.

6 Zaključek

Spoznali smo 2-prekrižno-kritične grafe ter definirali igro policistov in roparja na poljubnem grafu. Za poljuben velik 2-prekrižno-kritičen graf smo izračunali spodnjo (2) in zgornjo (3) mejo za policijsko število. Za nekatere družine takih grafov pa smo pokazali, da je njihovo policijsko število enako 2.

Nerazrešeno ostaja vprašanje popolne karakterizacije policijskega števila za 2-prekrižno-kritične grafe.

Zahvale

Članek je v večini rezultat dela na delavnici o 2-prekrižno-kritičnih grafih, ki sta jo organizirala izr. prof. dr. Drago Bokal ter prof. dr. Sandi Klavžar julija 2021 na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani.

Avtor se zahvaljujem preostalima članoma skupine, Danielu Vitasu ter Katarini Šipec. Posebna zahvala gre Katarini Šipec za podrobno branje ter urejanje tipkarskih napak.

Avtor se zahvaljujem tudi dr. Vesni Iršič za koristne opombe in nasvete ter pomoč pri urejanju članka.

Literatura

[1] M. Aigner and M. Fromme, A game of cops and robbers, *Discrete Applied Mathematics* **8** (1984), 1–12.

[2] D. Bokal. B. Oporowski, R. B. Richter, G. Salazar, Characterizing 2-crossing-critical graphs, *Advances in Applied Mathamtics* **74** (2016), 23–208.

[3] D. Bokal et al., Properties of Large 2-Crossing-Critical Graphs, rokopis.

[4] A. Bonato and R. J. Nowakowski, The Game of Cops and Robbers on Graphs, *Student Mathematical Library* **61**, (2011).

[5] A. Bonato, *An Invitation to Pursuit-Evasion Games and Graph Theory*, volume 97, American Mathematical Society, Providence, 2022.

[6] G. Joret, M. Kamiński, D. O. Theis, The Cops and Robber Game on Graphs with Forbidden (Induced) Subgraphs, *Contributions to Discrete Mathematics* **5/2** (2010), 40–51.

[7] R. J. Nowakowski and P. Winkler, Vertex-to-vertex pursuit in a graph, *Discrete Mathematics* **43** (1983), 235–239.

[8] A. Quilliot, Discrete pursuit games, *Congressus Numerantium* **38** (1983), 227–241.

Dianoia 7 (2023) 51-69

Analysis of the inclusion of ecological topics in the curricula of Slovenian elementary and general grammar schools

Analiza vključenosti ekoloških tematik v učne načrte slovenskih osnovnih šol in splošnih gimnazij

Dejan Zemljak, Maja Kerneža
University of Maribor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Koroška cesta 160, 2000 Maribor
University of Maribor, Faculty of Education, Koroška cesta 160, 2000 Maribor

Abstract
Learning and teaching are undergoing continuous transformations, encompassing not only changes in methods and approaches but also an increased emphasis on novel content. In recent decades, environmental education has gained significant importance. Therefore, we examined the extent to which ecological topics are incorporated into the curricula of Slovenian elementary schools and general grammar schools. A systematic analysis of the curricula of the majority of subjects was conducted, with a focus on the representation of ecological themes in primary and secondary education and the extent to which knowledge differs and complements between these educational levels. The findings indicate that the subject of ecology is addressed in most subjects at the elementary and secondary levels, albeit with certain variations. The content logically complements and builds upon each other throughout the observed educational continuum. Furthermore, suggestions for future research are provided.

Key words: curricula, ecology, elementary school, general grammar school, inclusion

Povzetek
Učenje in poučevanje se vedno bolj spreminjata, kar pa se ne nanaša samo na oblike in metode dela, temveč se v ospredje postavljajo vedno nove vsebine. V zadnjih desetletjih se vedno večji pomen daje tudi okoljskemu izobraževanju. Zato smo preverili, v kolikšni meri so ekološke tematike vključene v učne načrte slovenskih osnovnih šol in splošnih gimnazij. Sistematično so bili pregledani učni načrti večine predmetov, pri čemer nas je zanimalo, v kolikšni meri so ekološke tematike zastopane v osnovni šoli, v srednji šoli in v kolikšni meri se znanje v okviru obeh izobraževalnih stopenj razlikuje in dopolnjuje. Rezultati kažejo, da je tematika ekologije zastopana pri večini osnovnošolskih in srednješolskih predmetov, pri čemer prihaja do določenih odstopanj, vsebine pa se po celotni opazovani vertikali izobraževanja smiselno dopolnjujejo in nadgrajujejo. Podane so ideje za prihodnje raziskave.

Ključne besede: ekologija, osnovna šola, splošna gimnazija, učni načrt, vključenost

1 INTRODUCTION

Teaching and learning have been increasingly subjected to changes in recent times. New forms and methods of teaching are emerging, incorporating a growing number of technologies, and the overall classroom dynamics are evolving. On the other hand, there is a growing focus on environmental concerns, environmental conservation, and the aspiration for changes to preserve the planet and ensure a better future. Naturally, one may rightfully question how to integrate the changing landscape of teaching and learning with ecological content and technological advancements.

In recent decades, there has been an increasing focus on the research of *environmental education* (EE), which encompasses education that revolves around environmental topics and issues. Concern for such research has been growing, particularly in recent years, as a heightened sense of worry regarding the state of the environment and our future becomes more apparent. [8]. Carleton-Hug and Hug [4] emphasize that the essence of environmental education is to engage people in thinking differently and acting differently in the environment, thereby

E-mail naslov: dejan.zemljak1@um.si (Dejan Zemljak), maja.kerneza1@um.si (Maja Kerneža)

resulting in a change in the environmental literacy of the population. Some authors, including [4] and [9] highlight the need to transform students' cognitive, emotional, and social skills, as well as their social competences.

2 ECOLOGY, ENVIRONMENT, AWARENESS AND SUSTAINABILITY

For a better understanding of the subsequent content, it is important to first provide definitions of certain terms.

One of the first individuals to define the term *ecology* was Haeckel, who initially introduced the concept and later, three years later, defined ecology as follows: *"the entire science of the relations of the organism to the surrounding exterior world, to which relations we can count in the broader sense all the conditions of existence"* [5]. From the first part of the provided definition, it is evident that ecology is essentially the science of relationships between organisms and their environment. It is crucial for both to exist in synergy, although this is often no longer the case today, especially when considering how humans exploit and consequently alter the environment in which they live. Therefore, promoting environmental awareness among the public and within the school environment is extremely important today [6]. In recent years, raising environmental awareness has become one of the most significant social goals, both at the societal and political levels [7]. Therefore, it is important to dedicate attention to this field in education as well.

The environment essentially encompasses all the conditions that are important and influence the development and/or growth of humans, animals, and plants. It also refers to the living and working conditions. Essentially, it is defined as the (physical) surroundings that surround organisms. It is also defined as the (social, cultural) conditions that fundamentally impact an individual organism or the entire community of organisms. As depicted in Figure 1, the environment consists of three interconnected components: *Physical Elements* (space, climate, soil, rocks), *Biological Elements* (all living organisms), and *Cultural Elements* (characteristics created by humans) [13].

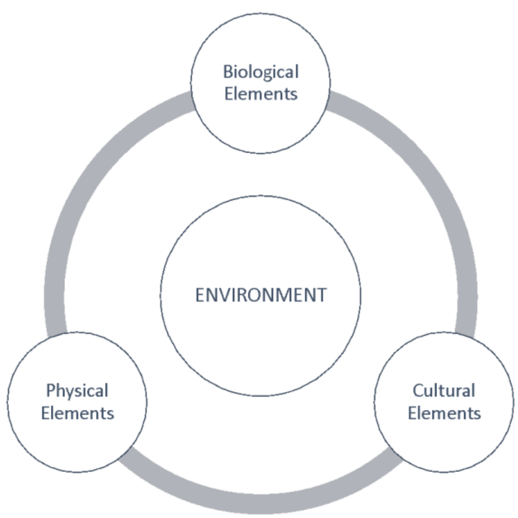


Figure 1: Components of the environment [13].

Cambridge Dictionary defines awareness as *"knowledge that something exists, or understanding of a situation or subject at the present time based on information or experience"* [3]. From the definition, it is evident that awareness involves the understanding that we possess knowledge about something, and based on information and experiences, we infer and comprehend. When it comes to environmental issues and environmental awareness, it is crucial to be aware that problems exist and to comprehend how these (currently existing) problems will impact our future lives and the lives of future generations.

It is also important to define the term *sustainability*, which focuses on three interconnected areas: economy, ecology, and equity. These areas are inherently linked to each other. To achieve sustainable development, it is crucial for all these areas to work in synergy. Sustainable development requires the development of policies and measures in the economic and ecological domains, as well as the development of society both in the present and in the future. [14]. The term was first introduced and officially recognized at the Stockholm Conference in 1972. It was presented at a global level, emphasizing the importance of environmental education in promoting responsible behavior by society and individuals towards environmental conservation and improvement. The goal was to protect the environment from further degradation. [49].

3 ENVIRONMENTAL PROBLEMS IN EDUCATION

In the context of environmental awareness, sustainability, and the numerous environmental issues and challenges we face, *environmental education (EE)* has emerged as a field within education. It is a lifelong process through which we aim to transform societal awareness and create a community that is environmentally conscious and, as a result, assumes responsibility for the environment [14]. The roots of environmental education can be traced back to the 18th century, and it continues to evolve today, gaining significance within the educational sphere [13].

Indeed, one of the early definitions of EE, known as the IUCN definition, originated in 1971: *"Environmental education is the process of recognizing values and clarifying concepts in order to develop skills and attitudes necessary to understand and appreciate the inter-relatedness among man, his culture and his biophysical surroundings. Environmental education also entails practice in decision making and self-formulation of a code of behavior a bow issues concerning environmental quality"* [10].

Education, at all levels, must strive to cultivate responsible and competent individuals who possess the following attributes:

1. *knowledge* (knowledge about the environment, environmental issues, functioning of the environment, significance of the environment for humans, impacts of human activities on the environment),
2. *skills* (means to address environmental issues and related challenges),
3. *values* (goals individuals and society aim to achieve in the realm of environmental changes).

so that they can contribute to the improvement of the environment and related fields in the future [14].

In recent years, there has been an emphasis on the responsibility and awareness of the importance of human life, health, and quality of life, not only for individuals but also for community well-being. We are part of the environment in which we live, and our actions inevitably have an impact on the environment. Such thinking has led to an increased awareness and emphasis on the importance of such a mindset. As a result, there has been a growing tendency towards education that promotes the willingness and ability of individuals and communities to participate in preserving a clean and healthy environment. This is crucial not only for the present generation but also for the well-being of future generations [2].

EE has been in existence for quite some time, as the content it encompasses has been present in curricula and teaching methods before. As depicted in Figure 2, it comprises three interrelated domains that further branch out. The coherent integration of these domains leads to successful environmental education.

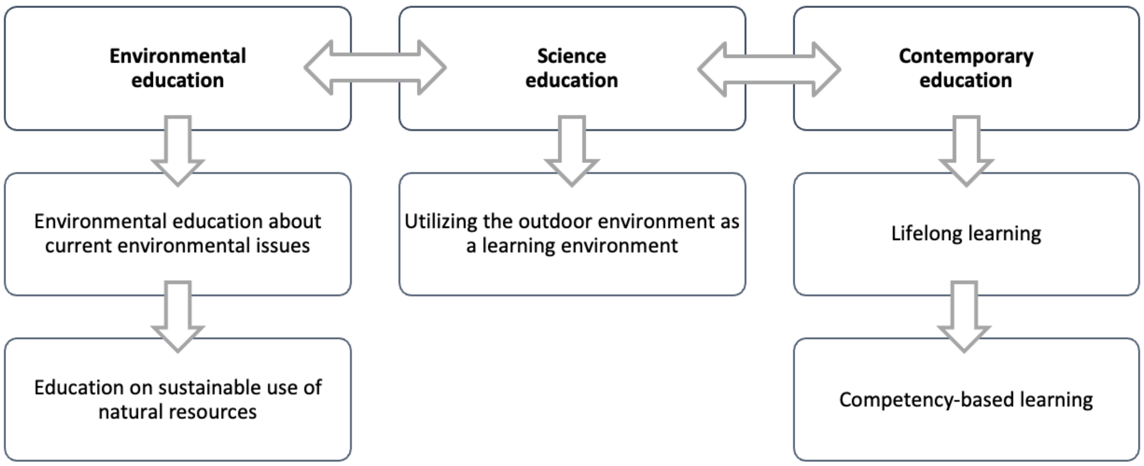


Figure 2: Areas of EE [2].

It is important to be aware that an individual develops lasting environmental attitudes through proper education, including the content, methods, and forms of teaching, among others. Only an educated and environmentally conscious individual is capable of actively participating in environmental conservation. Therefore, it is crucial that education goes beyond merely providing information to individuals but also influences their behavior (consciousness transformation) and fosters a sense of responsibility [1].
The question of effectiveness of such education is also crucial. It is effective only when it is based on life experiences. Therefore, it is important to initiate the process of awareness and promoting sustainability at an early stage, at younger ages, as it is easier to implement the process during that time, and its implementation is more effective [9]. The experiences that individuals gain through education significantly influence the shaping of their perspective on the world around them, including the environment in which they live. These experiences play a crucial role in shaping individuals' understanding and perception of the environment and their place within it [1].

The question of EE goals is also crucial. The framework of goals was established in the 1970s and 1980s, and it has been further developed over the years. This framework focuses on engaging citizens in addressing significant environmental issues and preventing the emergence of new problems that could lead to environmental deterioration. The initial goals are presented in Figure 3.

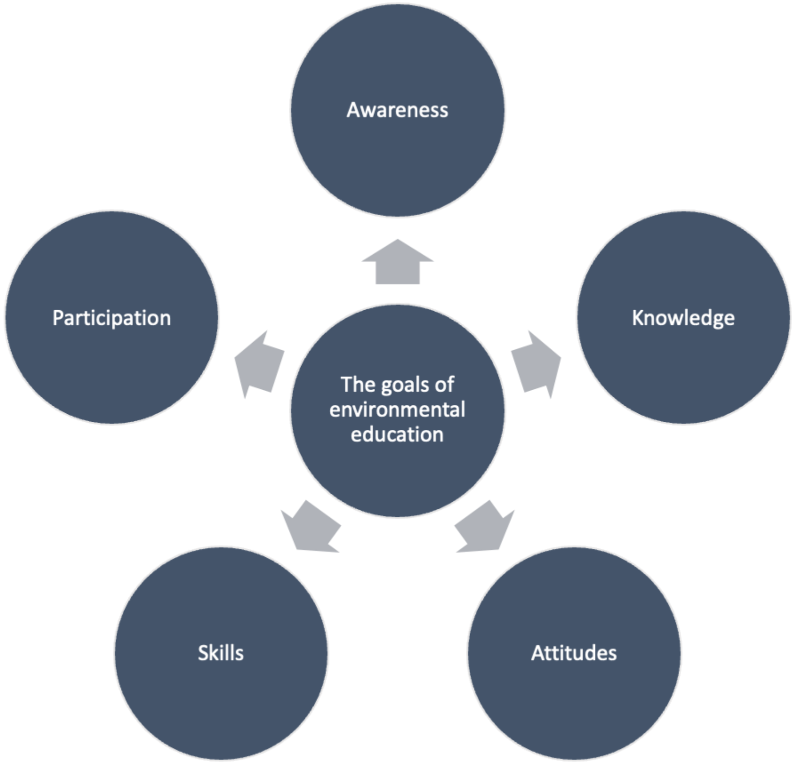


Figure 3: Goals of EE [2].

When it comes to the goal of awareness, it is important to help individuals and society develop an awareness of the environment and its problems. It is crucial for individuals to realize that they are at the center of these issues and that much depends on their actions in addressing them. Knowledge, encompassing diverse experiences and understanding of environmental issues, can assist in this process. By considering different perspectives among individuals, we shape values that influence both individual and collective motivation in addressing environmental problems. Furthermore, it is important for individuals and society to acquire the necessary skills to first identify and then address environmental issues. Collaboration is also a significant goal, as it enables active involvement in addressing environmental challenges at all levels [2].

All goals are equally important when it comes to educating people, especially the youth, about environmental issues. It is crucial to accurately recognize the scope and objectives of environmental education in higher education curricula [14]. School curricula are limited by syllabi, and the teacher himself determines which and how many contents from the curriculum he or she will link to areas related to the environment and environmental issues. The question of the teacher's pedagogical freedom and autonomy in teaching is therefore key.

4 ENVIRONMENTAL TOPICS IN CURRICULUM - A SYSTEMATIC REVIEW

Research objectives and questions

With the aim of identifying the environmental topics knowledge included in the school curricula in Slovenia, which directly or indirectly dictate the contents taught in Slovenian schools, the objective of this systematic review was to examine the curricula of elementary school and the curricula of general grammar schools due to the general knowledge acquired by students. Three research questions were formulated:

RQ1: Do Slovenian curricula for elementary school include content on environmental topics?

RQ2: Do Slovenian curricula for general grammar school include content on environmental topics?

RQ3: To what extent do Slovenian curricula for elementary and general grammar school differ and complement each other in terms of incorporating content on environmental topics?

Eligibility criteria and information sources

The systematic review included curricula for elementary school (students aged 6-14) and general grammar schools (students aged 15-18). All the curricula were freely accessible. The data were obtained from the official websites of the Government of Republic of Slovenia, specifically the curriculum section of the Ministry of education, science and sport, and Directorate for preschool education and elementary school for elementary school curricula. The curricula for secondary education were also published on the government websites, specifically the Directorate for secondary and higher education and adult education within the Ministry of education, science and sport. The included curricula were those that were valid until June 20, 2023 (inclusive). All the examined curricula are also included in the list of references (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).

Search strategy and selection process

The review of the curricula was conducted by two researchers. Among the curricula for general grammar schools, subjects that had a parallel counterpart in elementary school were selected. The curricula were examined using the search function, specifically by using the Ctrl+F option (if it was not possible to review the curriculum using that option, keyword identification was done manually), searching for the keywords is displayed in Figure 3, in all their inflected forms. In some of the cases examined, there is a strictly defined number of hours allocated to individual thematic units, while in others there isn't. This variability allows educators flexibility in planning and determining the scope of discussion, including topics related to ecology. Due to this inherent adaptability in pedagogical approaches, the number of hours dedicated to specific content was not explicitly specified in this study.

Each researcher conducted the search in alphabetical order. When a specific keyword was identified in the curriculum, a detailed reading of the surrounding text, both preceding and following the keyword, was performed. All relevant parts of the text were transcribed and collected for each curriculum in a separate document. After collecting the data for each subject, the contents were reviewed again, and duplicate data that appeared in relation to different keywords were excluded. The researchers compared the obtained results to identify differences and compared them with each other. No significant differences were found, except for variations in wording and unchanged content of the same data. Each researcher reviewed and read the resulting records once again and wrote their own summary for each curriculum of each subject. These summaries were then compared and reviewed by the researchers together, and they collectively formed the final summary.

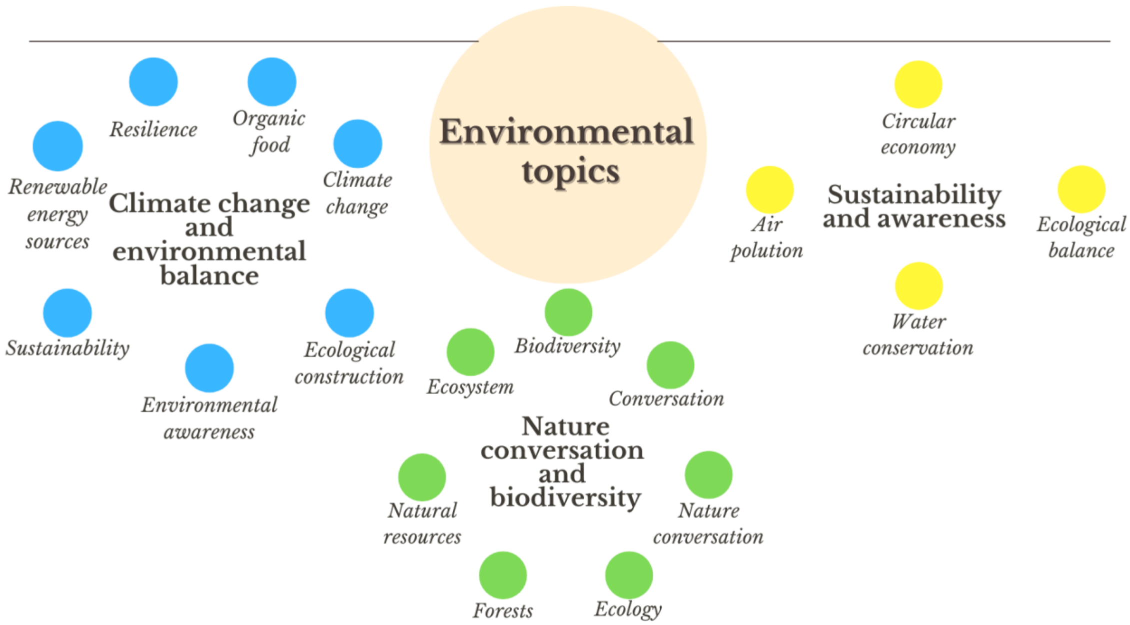


Figure 3: Concept of observed keywords (Source: Own)

4. 1 Analysis of extracted data about environmental topics in elementary school curriculums

Table 1 summarizes the analysis of the extracted data about environmental topics in elementary school curriculums.

Table 1: Environmental topics in elementary school curriculum - short summary

Environmental topics in elementary school curriculums
Environment learning [41] | Grade 1-3
The subject of Environment learning promotes education for sustainable development by appropriately addressing interconnected environmental, economic, and social issues. The goal of education for sustainable development involves raising awareness of current and future environmental and social issues facing humanity, as well as the preservation of the natural environment and sustainable management of it. Within the framework of environmental education, students learn about the impact of humans on nature and actively contribute to environmental conservation and the management of their living environment. They also become familiar with waste, consumerism, and major pollutants affecting water, air, and soil. The curriculum highlights sports as an interdisciplinary connection, specifically in the form of environmental awareness.
Art education [34] | Grade 1-9
There are no curriculum contents in the syllabus for Art education that correspond to the specified concepts.
Italian as a second language [24] | Grade 1-9

The curriculum for Italian as a second language suggests a thematic unit where students would take the initiative to improve the environment as their own contribution to environmental conservation.
Mathematics [35] | Grade 1-9
Mathematics does not encompass ecological content, but it suggests empirical investigation where children explore air pollution.
Musical art [31] | Grade 1-9
One of the general objectives of the subject is to educate students about creating and maintaining a healthy sonic environment, as well as preventing sound pollution, while raising awareness about the ecology of the sonic space.
Slovene [39] | Grade 1-9
There are no curriculum contents in the syllabus for Slovene that correspond to the specified concepts.
Sport [40] | Grade 1-9
In Sport, students are encouraged to form and develop attitudes, habits, and behaviors related to ecological issues associated with sports activities. The theoretical content of hiking includes environmental awareness. The curriculum also recommends that schools, within the scope of outdoor education, familiarize students with ecological issues.
Foreign language in 2nd and 3rd grade of elementary school [43] | Grade 2-3
The curriculum for foreign language in the 2nd and 3rd grade of elementary school suggests that students become familiar with and learn about the main pollutants and consequences of water, air, and soil pollution.
English as a first foreign language [25] | Grade 4-5
English language instruction in grades 4-5 is connected to the field of ecology through interdisciplinary topics. The curriculum emphasizes environmental education and education for sustainable development. It suggests promoting the efficient use of energy and natural resources in everyday life, understanding the consequences of excessive energy and resource consumption, and fostering a responsible attitude towards the environment, both living and non-living nature, natural resources, and environmental pollution.
Science and technology [37] | Grade 4-5
In the subject of Science and Technology, students develop a positive attitude towards nature and technology, as well as a critical approach towards interventions in nature. Awareness of the importance of sustainable development is strengthened. Students learn to make prudent changes to the environment and understand the need to conserve natural resources. This includes preserving the diversity and variety of nature by avoiding irreversible processes that reduce and eliminate natural differences. In relation to pollution, they learn about water, soil, and air, and explore people's attitudes towards pollution in these contexts. Through interdisciplinary connections, students learn about environmental education and acquire an understanding that humans are responsible for sustainable development. Interdisciplinary

connections address pollution related to households, packaging care, the consequences of human settlements and the shrinking of animal habitats, aspects of water pollution, electricity conservation, harnessing wind power, and the consequences of strong winds. The curriculum emphasizes that current topics such as ecology, environmental education, and sustainable development can be incorporated into almost all subject areas.
Society [27] | Grade 4-5
Students acquire knowledge about natural processes and phenomena, as well as the importance of sustainable development. They explore how technological and social advancements impact the environment and people's quality of life. The concept of sustainable development and its significance in decision-making and planning are introduced. Despite the social sciences focus of the subject, the content is interconnected with the natural environment. Students evaluate human interventions in the environment from the perspective of sustainable development and the preservation of natural and cultural heritage. This evaluation extends to everyday actions and decisions made by individuals within their school, local community, municipality, Slovenia, and beyond. Additionally, the subject of Social Studies is integrated with the natural sciences, specifically addressing natural substances such as water (water pollution and purification), soil (characteristics and soil pollution), and air (clean and polluted air).
German as the first foreign language [38] | Grade 4-9
In German lessons as the first foreign language, the teacher is supposed to include current topics, including ecology, in order to develop sensitivity, explore the interests of individuals and groups, and foster the ability to act appropriately. Interdisciplinary connections with environmental education are encouraged in the lessons.
Home economics [32] | Grade 5-6
The subject of Home Economics addresses ecological topics within the context of the principle of environmental sustainability, which the teacher promotes by fostering responsibility for the maintenance and preservation of both the immediate and broader environment, as well as developing responsibility towards essential natural resources such as water, air, and soil. It covers the subject of environmentally conscious consumption, wherein students contemplate proper waste management, understand the causes of environmental pollution, and learn about ecological cleaning practices. The module on living environment and housing also considers the impact of everyday use of cleaning products on the environment. Additionally, there is a significant emphasis on interdisciplinary connections related to topics such as ecological consumption, packaging, waste reduction, reuse, recycling, and purchasing products that adhere to ecological criteria.
Geography [30] | Grade 6-7
In geography, students develop skills to assess contradictions in the modern world and learn about the necessity of sustainable development and responsibility for preserving living conditions for future generations. Emphasis is placed on the interdependence within ecosystems and values that promote care for environmental quality and balanced resource use. They raise awareness about the importance of environmental conservation for sustainable societal development and critically evaluate their own role and the role of others

in this regard. Students learn about ecology and sustainability in their local and broader environments, and they confront the principles of co-responsible sustainable development during fieldwork and excursions. Geography establishes interdisciplinary connections, such as with biology (water conservation, fauna, flora) and chemistry (artificial fertilizers, pesticides, environmental pollution).
Natural science [36] | Grade 6-7
Students develop an attitude and perspectives towards the environment and recognize the importance of responsible behavior for safety and health. By acquiring practical knowledge in natural sciences and developing experimental and research skills, they cultivate complex and critical thinking as well as innovation. The content encompasses the impact of human activities on the environment, exploitation of natural resources, waste management, and the influence of humans on ecosystems, biodiversity, and natural resources.
Technology and engineering [42] | Grade 6-8
In the subject of Technology and Engineering, students acquire skills and knowledge that enable them to design and evaluate solutions and products from an ecological and sustainable perspective. The acquired knowledge relates to fossil fuels, wood as a renewable natural resource, attitudes towards wood, and the significance of forests for the environment and people. Students should also be able to justify the importance of environmentally friendly paper production. The curriculum includes interdisciplinary connections and shared themes for sustainable development, including environmental education.
History [44] | Grade 6-9
In history lessons, students evaluate the importance of preserving and protecting cultural heritage based on local historical examples and develop a responsible attitude towards the environment. Interdisciplinary connections are made with science subjects.
Homeland and civic culture, and ethics [28] | Grade 7-8
There are no curriculum contents in the syllabus for Homeland and Civic Culture and Ethics that correspond to the specified concepts.
Biology [26] | Grade 8-9
The biology curriculum covers the impact of human activities on the environment, including harmful effects on humans and nature, biodiversity, sustainable development principles, and the need for monitoring and preventing harmful changes in soil, water, and air, in grade 9. It also includes topics on nature and environmental conservation, ethical considerations, and the importance of responsible attitudes towards life, nature, and sustainable development. Students develop awareness of personal responsibility and opportunities for environmental action, as well as knowledge of local, national, and global conservation issues and relevant legislation.
Chemistry [33] | Grade 8-9
Chemistry, or chemical knowledge, is indispensable in modern society and forms the foundation of active citizenship in ensuring a high level of comprehensive chemical safety and sustainable societal development. The content is oriented towards education for

sustainable development of nature, the environment, society, individuals, and the social environment, including topics such as thermal pollution and the impact of various substances and new technologies on the environment. Narrow ecological themes and related elements are addressed within the framework of the hydrocarbon family with polymers, seeking connections with physics, geography, and history. Key substances are examined as important sources that significantly influence environmental pollution and sustainable development.
Physics [29] | Grade 8-9
Within the subject of Physics, students explore sources of air pollution and possible measures to reduce pollution. Environmental topics are addressed in the chapter on work and energy, where students investigate energy production, become familiar with various energy sources, categorize them as renewable and non-renewable, and examine their impact on the environment and pollution. The definition of the subject emphasizes the active and responsible involvement of individuals in societal development, focusing on higher-order thinking processes, knowledge, understanding, values, attitudes, commitment, and skills necessary for environmental protection and thoughtful, responsible change. Physics, as a fundamental natural science, is closely linked to other natural science subjects and environmental sciences. The curriculum also addresses ecological topics through optional content that teachers can cover if they believe it would interest the students.

The analyses have found that elementary school curricula in Slovenia also emphasize environmental topics. They are addressed starting from the lower grades as further developed at the subject-specific level. Through interdisciplinary connections, efforts are made to enhance awareness of environmental topics.

4. 2 Analysis of extracted data about environmental topics in general grammar school curriculums

Table 2 presents the analysis of the extracted data about environmental topics in general grammar school curriculums.

Table 2: Environmental topics in general grammar school curriculum – short summary

Environmental topics in general grammar school curriculums
Art education [21] | Year 1
The curriculum for visual arts encourages teachers to take students into nature as often as possible, where they can create with natural materials and connect the activity with the opportunity for careful observation of forms shaped by time and climate conditions, as well as artificial forms resulting from human thinking and activity. While exploring artistic practices that allow intentional observation and reflection on the ethical and moral aspects of human intervention in nature, students become acquainted with the artist's sensitive attitude towards nature. This provides an opportunity for students to transform any passive attitude towards nature into an active one.
Music [18] | Year 1

No specific content is proposed, but interdisciplinary links with social and natural sciences are emphasized.
Biology [16] | Year 1-3
The content and objectives of the biology subject are extensively interconnected with ecology in both broader and narrower senses. Ecology is given a significant number of hours, during which the teacher presents concepts based on examples from specific ecosystems and utilizes examples of organisms and ecosystems from the Slovenian region. These concepts are then further expanded upon with content on ecological themes, biodiversity, and evolution. Within their autonomy, the teacher plans interdisciplinary connections that are mentioned in the framework of most other subjects. These connections are aimed at utilizing prior knowledge from other subjects in exploring and understanding biological concepts, as well as solving selected complex problems. They involve the application and development of various skills and abilities, as well as the consideration of cross-curricular topics.
Chemistry [20] | Year 1-3
The curriculum for chemistry, within the framework of general goals and competencies, emphasizes the ability to responsibly and actively participate in problem-solving and sustainable development. The goals of ecology in chemistry are highlighted through an experimental and investigative approach within the subject itself and through numerous interdisciplinary connections with subjects such as geography, environmental education, biology, etc. This includes addressing the consequences of climate change on ice melting, awareness of the biosphere, energy flow, environmental education, care for natural resources, renewable energy sources, human impact, and its consequences. The acquired knowledge can be both general and specific, for example: natural and synthetic antioxidants, the structure and properties of polymers (energy flow and substance cycling in ecosystems and human impact on the global ecosystem), solutions (biogeochemical cycling of substances, bioaccumulation, the importance of water cycling for self-purification ability of water, etc.).
Geography [17] | Year 1-3
The subject of geography is strongly connected to the field of ecology, and its content is included in multiple areas. Based on the objectives, content, cross-curricular topics, interdisciplinary connections, and didactic recommendations, we can summarize that students learn about climate change, including understanding weather reports, the link to increased greenhouse gas emissions, and the impact of climate change on natural resources and disasters. They also explore topics related to sustainable development, spatial planning, and evaluating activities from a sustainability perspective, as well as professions related to environmental management. They develop an awareness of solving sustainability problems at the local, regional, and global levels, and are educated to care for balanced land use and the preservation of natural and social environments. The protection of the geographical environment is also addressed, along with the advantages of different types of development in terms of environmental issues, and the necessity of sustainable development and responsibility for preserving the environment for future generations. The content is also related to the impacts of human interventions in ecosystems, identifying sources of air pollution, assessing water quality, and recognizing causes of pollution. Teaching approaches include case studies, problem-based discussions, learning simulations, experiments, and fieldwork. Students develop an awareness of sustainable development, the ability to evaluate spatial issues, as well as self-confidence and belief in their own abilities.

Physics [45] | Year 1-3
The curriculum for physics sets general objectives in terms of acquiring knowledge and skills necessary for the protection and sustainable use of the environment, as well as understanding natural phenomena and processes in everyday life. It also aims to cultivate a respectful attitude towards nature and awareness of the inevitable interdependence between individuals, society, and nature, along with their shared responsibility for the existence of life. It recommends incorporating the study of climate change. The teacher is given the opportunity to guide the lessons with everyday life and problem-solving, including topics related to the environment, energy, renewable energy sources, and ecology. Within the framework of developing their own attitudes towards life, students develop a respectful and responsible attitude towards nature, and an awareness of the interconnection between individuals, society, and nature, as well as an understanding of their individual responsibility for preserving life on Earth. Physics lessons provide students with the knowledge and skills necessary to understand the human impact and natural phenomena and processes in everyday life, as well as the awareness of how the natural sciences and technological development affect the environment and living conditions, and how they help humans in solving current problems such as energy, drinking water, food, health, etc. Within the scientific method of studying natural phenomena, students are made aware of the importance of science in achieving environmental protection successes. The curriculum also includes concrete integration of ecology, for example, linking the law of entropy with ecological issues.
English [15] | Year 1-4
The curriculum highlights environmental education within interdisciplinary topics, emphasizing the need to connect biology lessons with ecology.
German as a second language [23] | Year 1-4
The curriculum, in the development of communicative abilities, recommends topics related to nature and environmental protection.
History [48] | Year 1-4
During history lessons, students explain and compare ways of life, mentalities, scientific achievements, and their impact on economic processes, social relations, and the environment in different historical periods. They analyze ecological issues and methods of solving them within the context of science and technology in the 20th century. The curriculum includes content on anti-nuclear and environmental movements. By connecting to science and technology in the 21st century, students are encouraged to evaluate the validity of different approaches to solving ecological issues.
Italian as a second language [19] | Year 1-4
Within the interdisciplinary topics, the curriculum highlights environmental education at the content level (texts in the second/foreign language) and working with specialized texts, acquiring vocabulary from natural sciences (e.g., studying chapters from an Italian textbook).
Mathematics [22] | Year 1-4
The mathematics curriculum, in connection with natural science subjects, promotes the development of scientific and mathematical abilities for complex thinking, including the

ability to responsibly and actively participate in problem-solving and sustainable development. It emphasizes the supportive role of mathematics in natural-technical and socio-humanistic sciences, as mathematics is encountered in most areas of human life and creation. The connection is also concrete - within the interdisciplinary connections, the curriculum highlights data processing tools and measures of central tendency and dispersion in the context of air pollution.
Slovene [46] | Year 1-4
There are no curriculum contents in the syllabus for Slovene that correspond to the specified concepts.
Sport [47] | Year 1-4
The curriculum for sport relates to ecology through sports days, which should also be connected to natural science or environmental topics.

Table 2 provides an overview of the analysis of how environmental topics are incorporated into the curricula of various subjects in general grammar schools. The analysis highlights the integration of environmental themes within interdisciplinary connections, emphasizing environmental education, sustainable development, and responsible behavior towards nature. The curriculum aims to develop students' awareness of ecological issues, their understanding of the impact of human activities on the environment, and the importance of preserving natural resources. Various teaching approaches, such as experiments, fieldwork, and problem-solving, are utilized to foster students' knowledge, skills, and attitudes related to ecology.

5 CONCLUSIONS

Environmental topics are primarily present in the curriculum for Biology, Physics, Geography, Home economics, Chemistry, Science and technology, Science, Environment learning, and Technology and engineering in elementary school (RQ1). The topics are appropriately developed, interconnected, and complemented throughout elementary education. In language classes, environmental education is included as one of the topics that can be covered. The identified keywords were not found in the curricula for Homeland and civic culture and ethics, Art education, and Slovene. Based on the analysis conducted, it can be concluded that environmental topics are important part of the curricula in Slovenian elementary schools, emphasizing awareness and responsible behavior towards the environment. Students have the opportunity to explore and understand the impact of human activities on the environment, the importance of sustainable development, and the need for natural resource conservation. However, there is space for further improvement and increased inclusion of environmental topics in the curricula to further promote environmental awareness among the younger generations.

The analysis of the general grammar school curricula (RQ2) also reveals that environmental education included in various subjects. In most cases, environmental topics are linked to Biology, Geography, Chemistry, and Physics, while other disciplines such as Music, art, and Sports incorporate environmental topics in an interdisciplinary manner. The identified themes and connections demonstrate the promotion of environmental education, sustainable development, and responsibility towards nature in general grammar schools. The analysis highlights the importance of a comprehensive approach to ecology that goes beyond individual subjects and encourages the integration of environmental education- and understanding of environmental issues in different contexts. This ensures that students acquire a broad knowledge base and develop the skills to actively address environmental challenges in the modern world. Similarly to elementary school, the topic of environment does not appear in the curriculum for Slovene language classes in general grammar schools.

Both in elementary and general grammar school, it has been observed that environmental topics are not represented in the curriculum. However, it should be noted that the Slovene language subject, which covers various areas, including nature, the environment, and ecology, provides opportunities for integration. For example, students can read and analyze literature that addresses environmental themes, write essays, compositions, or discussions on ecological topics, engage in conversations, debates, or presentations on environmental issues, conduct environmental research, and utilize language to describe environmental phenomena. This connection with the Slovene language allows for a comprehensive approach to environmental education, encompassing both linguistic and content aspects. It promotes environmental awareness, language development, and interdisciplinary learning among students.

The content analysis also addresses research question 3. Slovenian curricula for elementary and general grammar schools differ and complement each other to a certain extent in terms of incorporating environmental issues and the themes of the environment. In elementary school, the emphasis on environmental education is intertwined with multiple subjects, enabling a holistic understanding of environmental topics and their impacts. In general grammar school, the treatment of environmental content deepens and continues, and the connections between subjects and their mutual complementarity allow for comprehensive and in-depth exploration of environmental issues. Through the integration and complementarity between the curricula of elementary and general grammar school, a comprehensive approach to environmental topics is established, enabling individuals to develop a comprehensive understanding of the environment and its value in various fields of knowledge.

The analysis underscores the integration of environmental topics across various subjects in the curricula of elementary and general grammar schools. This integration ensures that students are exposed to environmental concepts and issues from multiple angles, fostering a comprehensive understanding of the environment. The inclusion of environmental themes in different subjects promotes interdisciplinary learning. By exploring environmental topics in subjects like biology, geography, chemistry, and physics, students can make connections between different disciplines and develop a holistic perspective on environmental issues. The presence of environmental content in the curricula signifies the importance placed on environmental education and raising awareness among students. It emphasizes the need for responsible behavior towards the environment, sustainable development, and the conservation of natural resources. The analysis reveals opportunities for students to develop various skills through the study of environmental topics. These skills include critical thinking, research skills, language proficiency, and the ability to analyze and understand the impact of human activities on the environment. The complementarity between the curricula of elementary and general grammar schools ensures a progressive and comprehensive approach to environmental education. As students transition from elementary school to general grammar school, the treatment of environmental content deepens and expands, enabling a more detailed exploration of environmental issues.

In line with the findings, broader research topics emerge. The curriculum for the Slovene language does not include environmental themes, but that does not mean that the topic is not addressed in Slovene language classes. Therefore, it would be meaningful to examine textbooks and workbooks for the Slovene language. Additionally, concerns arise regarding the implementation of the curriculum's objectives. While the curricula are well-designed in terms of environment education, the extent and manner in which the objectives are achieved depend on the interpretation and autonomy of each individual teacher. This can significantly impact the incorporation of environmental topics in teaching. From this perspective, it would be beneficial to study the experiences and practices of teachers in teaching environmental topics and their perception of the importance of environmental education. This would provide a better understanding of the current state and potential challenges in integrating environmental education into lessons, both at the elementary level and in the general grammar school context. Within this context, another concern arises. Most curricula do not strictly define the number of hours for individual thematic units, allowing educators flexibility in planning and scope of discussion, including ecological topics. Due to this adaptability in teaching approaches, the hours dedicated to specific content were not detailed in this study. While such flexibility can be advantageous in allowing educators to tailor their lessons to the needs and interests of their students, it also presents potential drawbacks. The absence of a clearly defined number of hours for specific thematic units can lead to inconsistencies in the depth and breadth of content coverage across different educational institutions. This variability might result in certain essential topics being inadequately addressed or even omitted in some settings. Furthermore, without standardized guidelines, there's a risk of subjective interpretations of the curriculum, which can compromise the uniformity and comprehensiveness of ecological education. It is crucial for curricula to strike a balance between adaptability and structure to ensure consistent and thorough instruction across all educational levels and environments.

The analysis contributes to our understanding of how environmental education is incorporated into the curricula of Slovenian schools. They highlight the strengths and potential areas for improvement in terms of promoting environmental awareness and understanding among students. By recognizing the significance of curriculum integration, interdisciplinary learning, and the development of skills, these findings can inform educational policymakers and curriculum designers in creating more effective and robust environmental education programs.

Acknowledgements

Authors want to thank the research program P5-0433; Digital Restructuring of Deficit Occupations for Society 5.0 (Industry 4.0). The research program is financed by the Slovenian Research Agency (ARRS).

Literature

[1] Altin, A., Tecer, S., Tecer, L., Altin, S., & Kahraman, B. F. (2014). Environmental awareness level of secondary school students: A case study in Balıkesir (Türkiye). *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *141*, 1208–1214. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.05.207

[2] Archie, M., & McCrea, E. (1998). Environmental education in the United States: Definition and direction. In M. Archie (Ed.), Environmental education in the United States – Past, present, future. *Collected Papers of the 1996 National Environmental Education Summit*.

[3] Cambridge Dictionary (n. d.).
https://dictionary.cambridge.org/dictionary/english/awareness

[4] Carleton-Hug, A., & Hug, J. W. (2009). Challenges and opportunities for evaluating environmental education programs. *Evaluation and Program Planning, 33*(2), 159–164.

[5] Friederichs, K. (1958). A definition of ecology and some thoughts about basic concepts. *Ecology*, *39*(1), 154–159. https://doi.org/10.2307/1929981

[6] Hadzigeorgiou, Y., & Skoumios, M. (2013). The development of environmental awareness through school science: Problems and possibilities. *International Journal of Environmental & Science Education*, *8*, 405–426. http://dx.doi.org/10.12973/ijese.2013.212a

[7] Ham, M., Mrčela, D., & Horvat, M. (2016). Insights for measuring environmental awareness. *Ekonomski vjesnik*, *29*(1), 159-176. https://hrcak.srce.hr/161021

[8] Hart, P., & Nolan, K. (1999). A critical analysis of research in environmental education. *Studies in Science Education*, *34*(1), 1–69.

[9] Herič, J., Zemljak, D., & Aberšek, B. (2019). Human awareness and ecological footprint. In: Sahin Uyaver (ed.). *International Conference on Sustainable Energy and Energy Calculations (ICSEEC)*, 12-14 April 2019, Koycegiz, Mugla, Turkey, p. 44–54. https://doi.org/10.5281/zenodo.3597797

[10] IUCN (1971). *Education and the environment.* Papers of the Nevada Conference of 1970 and the Zurich Conference of December 1971. IUCN Publication New Series.

[11] Jaušovec, N. (2010). Motivacija in kako motivirati [Motivation and how to motivate], *Vodenje v vzgoji in izobraževanju*, *8*(2), 51–66.

[12] Juriševič, M. (2009). Motivacija za učenje kot pedagoški izziv: kaj, kako, kdaj in zakaj? [Motivation for learning as a pedagogical challenge: what, how, when, and why?] *Razredni pouk: revija Zavoda RS za šolstvo,* 25–27.

[13] Mubita, K., Milupi, I., Monde, P. N., & Simooya, S. M. (2022). Understanding environmental education: Conceptualization, definitions, history, and application. *Journal of Lexicography and Terminology*, *6*(2), 116-127.

[14] Oguz, D. Çakci, I., & Kavas, S. (2010). Environmental awareness of University Students in Ankara, Turkey. *African Journal of Agricultural Research*, *5*(19), 2629–2636.

[15] *Učni načrt. Angleščina: gimnazija: splošna, klasična, strokovna gimnazija: obvezni ali izbirni predmet in matura (420 ur)* [Curriculum. English: grammar school: general, classical, vocational grammar school: compulsory or elective subject and baccalaureate (420 hours)]. (2008). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[16] *Učni načrt. Biologija: gimnazija: splošna gimnazija: obvezni predmet (210 ur), izbirni predmet (35, 70, 105 ur), matura (105 + 35 ur)* [Curriculum. Biology: grammar school: general grammar school: compulsory subject (210 hours), elective subject (35, 70, 105 hours), baccalaureate (105 + 35 hours)]. (2008). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[17] *Učni načrt. Geografija: gimnazija: splošna, klasična, ekonomska gimnazija: obvezni predmet (210 ur), matura (105 ur)* [Curriculum. Geography: grammar school: general, classical, economics grammar school: compulsory subject (210 hours), baccalaureate (105 hours)]. (2008). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[18] *Učni načrt. Glasba: gimnazija: splošna, klasična, strokovna gimnazija: obvezni predmet (70 ur)* [Curriculum. Music: grammar school: general, classical, vocational grammar school: compulsory subject (70 hours)]. (2008). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[19] *Učni načrt. Italijanščina kot drugi jezik na narodno mešanem območju Slovenske Istre: gimnazija: splošna, klasična, strokovna gimnazija: kot tuji jezik: obvezni, izbirni, matura (420 ur): kot drugi jezik na narodno mešanem območju Slovenske Istre: splošna gimnazija: obvezni, matura (350 ur), strokovna gimnazija: obvezni, matura (420 ur)* [Curriculum. Italian as a second language in the ethnically mixed area of Slovene Istria: grammar school: general, classical, vocational grammar school: as a foreign language: compulsory, optional, matriculation (420 hours): as a second language in the ethnically mixed area of Slovene Istria: general grammar school: compulsory, matriculation (350 hours), vocational grammar school: compulsory, matriculation (420 hours)]. (2008). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[20] *Učni načrt. Kemija: gimnazija: splošna gimnazija: obvezni predmet (210 ur), izbirni predmet (3 x 35 ur), matura (105 + 35 ur)* [Curriculum. Chemistry: grammar school: general grammar school: compulsory subject (210 hours), elective subject (3 x 35 hours), baccalaureate (105 + 35 hours)]. (2008). Ministrstvo za šolstvo in šport: Zavod RS za šolstvo.

[21] *Učni načrt. Likovna umetnost: gimnazija: splošna, klasična, strokovna gimnazija: likovno snovanje, obvezni, izbirni predmet (35 ur), umetnostna zgodovina: obvezni, izbirni predmet (35 ur)* [Curriculum. Fine arts: grammar school: general, classical, vocational grammar school: art design, compulsory, elective course (35 hours), art history: compulsory, elective course (35 hours)]. *(*2008). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[22] *Učni načrt. Matematika: gimnazija: splošna, klasična in strokovna gimnazija: obvezni predmet in matura (560 ur)* [Curriculum. Mathematics: grammar school: general, classical and vocational grammar school: compulsory subject and baccalaureate (560 hours)]. (2008). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[23] *Učni načrt. Nemščina: gimnazija, splošna, klasična, strokovna gimnazija: obvezni predmet in matura (420 ur), izbirni predmet (140 ur)* [Curriculum. German: grammar school, general, classical, vocational grammar school: compulsory subject and Baccalaureate (420 hours), elective subject (140 hours)]. (2008). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[24] *Učni načrt. Osnovna šola s slovenskim učnim jezikom na narodnostno mešanem območju slovenske Istre. Italijanščina kot drugi jezik* [Curriculum. Primary school with Slovene as the language of instruction in the ethnically mixed area of Slovene Istria. Italian as a second language]. (2011). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[25] *Učni načrt. Program osnovna šola. Angleščina* [Curriculum. Primary school curriculum. English]. (2016). Ministrstvo za izobraževanje, znanost in šport, Zavod RS za šolstvo.

[26] *Učni načrt. Program osnovna šola. Biologija* [Curriculum. Primary school curriculum. Biology]. (2011). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[27] *Učni načrt. Program osnovna šola. Družba* [Curriculum. Primary school curriculum. Society]. (2011). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[28] *Učni načrt. Program osnovna šola. Državljanska in domovinska vzgoja ter etika* [Curriculum. Primary school curriculum. Civic and patriotic education and ethics]. (2011). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[29] *Učni načrt. Program osnovna šola. Fizika* [Curriculum. Primary school curriculum. Physics]. (2011). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[30] *Učni načrt. Program osnovna šola. Geografija* [Curriculum. Primary school curriculum. Geography]. (2011). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[31] *Učni načrt. Program osnovna šola. Glasbena vzgoja* [Curriculum. Primary school curriculum. Music education]. (2011). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[32] *Učni načrt. Program osnovna šola. Gospodinjstvo* [Curriculum. Primary school curriculum. Home economics]. (2011). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[33] *Učni načrt. Program osnovna šola. Kemija* [Curriculum. Primary school curriculum. Chemistry]. (2011). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[34] *Učni načrt. Program osnovna šola. Likovna vzgoja* [Curriculum. Primary school programme. Art education]. (2011). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[35] *Učni načrt. Program osnovna šola. Matematika* [Curriculum. Primary school curriculum. Mathematics]. (2011). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[36] *Učni načrt. Program osnovna šola. Naravoslovje* [Curriculum. Primary school curriculum. Science]. (2011). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[37] *Učni načrt. Program osnovna šola. Naravoslovje in tehnika* [Curriculum. Primary school curriculum. Science and technology]. (2011). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[38] *Učni načrt. Program osnovna šola. Nemščina* [Curriculum. Primary school curriculum. German]. (2016). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[39] *Učni načrt. Program osnovna šola. Slovenščina* [Curriculum. Primary school curriculum. Slovene]. (2018). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[40] *Učni načrt. Program osnovna šola. Športna vzgoja* [Curriculum. Primary school curriculum. Sport]. (2011). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[41] *Učni načrt. Program osnovna šola. Spoznavanje okolja* [Curriculum. Primary school curriculum. Environment learning]. (2011). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[42] *Učni načrt. Program osnovna šola. Tehnika in tehnologija* [Curriculum. Primary school curriculum. Engineering and technology]. (2011). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[43] *Učni načrt. Program osnovna šola. Tuji jezik v 2. in 3. razredu* [Curriculum. Primary school curriculum. Foreign language in Grades 2 and 3]. (2013). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[44] *Učni načrt. Program osnovna šola. Zgodovina* [Curriculum. Primary school curriculum. History]. (2011). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[45] *Učni načrt. Program srednja šola. Fizika: gimnazija: splošna gimnazija: obvezni predmet (210 ur), izbirni predmet (35, 70, 105 ur), matura (105 + 35 ur*) [Curriculum. Secondary school programme. Physics: grammar school: general grammar school: compulsory subject (210 hours), elective subject (35, 70, 105 hours), baccalaureate (105 + 35 hours)]. (2015). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[46] *Učni načrt. Slovenščina: gimnazija: splošna, klasična, strokovna gimnazija: obvezni predmet in matura (560 ur)* [Curriculum. Slovene: grammar school: general, classical, vocational grammar school: compulsory subject and baccalaureate (560 hours)]. (2008). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[47] *Učni načrt. Športna vzgoja: gimnazija: splošna, klasična, strokovna gimnazija: obvezni predmet (420 ur)* [Curriculum. Sport education: grammar school: general, classical, vocational grammar school: compulsory subject (420 hours)]. (2008). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[48] *Učni načrt. Zgodovina: gimnazija: splošna gimnazija: obvezni predmet (280 ur)* [Curriculum. History: grammar school: general grammar school: compulsory subject (280 hours)]. (2008). Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

[49] UNESCO (1972). *The Stockholm declaration.* The United Nations Conference on the Human Environment, 5-16 June, Stockholm.

[50] Zwanzig, S. D., Lian, Y., & Brehob, E. G. (2013). Numerical simulation of phase change material composite wallboard in a multi-layered building envelope. *Energy Convers. Manage, 69*, 27-40.

VABILO AVTORJEM

Dianoia (grško διάνοια) po Platonu označuje védenje, razmišljanje o modelih stvarnosti, o naravoslovno-matematičnih in tehničnih temah. Uporabljajo ga matematiki (modeliranje) in znanstveniki (formuliranje problema), inženirji (načrtovanje sistema). Opredeljuje kompetenco, proces ali rezultat diskurzivnega razmišljanja, za razliko od neposrednega razumevanja obravnavane tematike. Aristotel to védenje naprej razdeli na teoretično (episteme) in praktično (phronesis).

Dianoia po Platonu torej označuje vmesni nivo človeškega spoznanja, prehod od intuitivnih občutkov do najglobljega spoznanja dejanskosti. Tako je idealna oznaka za objave v pričujoči reviji, ki povezujejo teoretična, znanstvena izhodišča z njihovo uporabno namembnostjo. Študentje, avtorji teh člankov, ste na prehodu od učenja k delu, od teoretičnega h konkretnemu, ki vas bo pripeljalo do kruha, do dela, s katerim boste odigrali svojo vlogo v družbi. Na tem prehodu pa poleg znanja, ki ga ponuja redno izobraževanje, potrebujete tudi izkušnje s konkretnih izzivov in mehke kompetence sodelovanja v ekipah delodajalcev, k čemur vas spodbuja in vam pri tem pomaga revija Dianoia.

V reviji bomo objavljali poljudne in strokovne članke s področja naravoslovja, matematike ali znanosti, ki uporabljajo znanja teh področij. Ciljna publika bralcev so v prvi vrsti delodajalci, ki tovrstna znanja potrebujejo in želijo izvedeti, kaj je kdo zanimivega razmislil na njihovem področju. V drugi vrsti so ciljna publika študentje, ki iščejo zamisli za svojo poklicno pot in lahko v reviji najdejo navdih za lastna raziskovanja in iskanje stikov s trgom dela.

Za kakovost izdelkov bo skrbel uredniški odbor in uredniški svet, v katerih so vrhunski strokovnjaki, povezani s področji, ki jih revija obravnava. Članki bodo anonimno recenzirani, o objavi pa na podlagi recenzije odloča uredniški odbor. Priporočljivo je, da avtorji besedilo spremenijo v skladu s priporočili recenzentov in da popravljeni članek z utemeljitvijo sprejema ali zavrnitve sprememb ponovno pošljejo v pregled. Uredništvo lahko objavo članka zavrne, če vsebinsko ali po merilih kakovosti ne ustreza standardom revije, o čemer avtorje obvestimo v najkrajšem možnem času.

S prispevkom v reviji bodo avtorji spodbujali širjenje znanja s področja naravoslovja in matematike ter tehnike oziroma izobraževanja teh področij in svoje poglede prenašali na trg dela in na prihajajoče generacije.

NAVODILA AVTORJEM

Avtorje prosimo, da pri pripravi članka upoštevajo naslednja navodila.

Če je članek napisan v slovenščini, naj ima angleški prevod naslova, povzetka in ključnih besed. Veseli bomo tudi prispevkov v angleščini, ki pa morajo imeti naslov, razširjen povzetek v obsegu 300 – 400 besed in ključne besede v slovenščini. Ključnih besed naj bo do šest.

Prispevki naj bodo zanimivi za širši krog bralcev. Ključna je intuitivna predstavitev zamisli in rezultatov, podrobnosti pa lahko ostanejo prihranjene za morebitni znanstveni članek, ki bi bil nadgradnja članka, objavljenega v reviji Dianoia.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (avtorjev) in sedež ustanove, kjer avtor(ji) dela(jo). Sledi naj povzetek, z največ 150 besedami, seznam ključnih besed in besedilo, ki ne presega 3000 besed. Besedilo naj bo zapisano v urejevalniku besedil MS Word 2010 oz. kasnejši ali LaTeX in naj uporablja objavljeno predlogo. Slike in tabele morajo biti oštevilčene in imeti natančen opis, da jih lahko razumemo brez preostalega besedila. Slike v elektronski obliki naj bodo visoke kakovosti v formatu PNG ali JPEG.

Prispevek v PDF obliki pošljite na naslov dianoia@um.si z zadevo: »Za revijo Dianoia«. Če bo sprejet v objavo, vas bomo prosili za izvorno obliko prispevka.