



Univerza v Mariboru

Fakulteta za naravoslovje
in matematiko



διάνοια

D I A N O I A

REVIJA ZA UPORABO NARAVOSLOVNO-MATEMATIČNIH ZNANOSTI

ISSN	2536-3565
Naslov publikacije/Title	DIANOIA , revija za uporabo naravoslovnih in matematičnih znanosti DIANOIA , journal for applications of natural and mathematical sciences
Letnik/Volume	6
Leto/Year	2022 (april)
Številka/Number	1
Založnik in izdajatelj/ Published & Issued by	Univerzitetna založba Univerze v Mariboru, Slomškov trg 15, 2000 Maribor, Slovenija, http://press.um.si/ , zalozba@um.si
Uredništvo/Editorial board	<i>odgovorni urednik/editor in chief</i> Mitja Slavinec <i>glavni urednik/executive editor</i> Drago Bokal <i>izvršna urednica/managing editor</i> Janja Jerebic <i>urednici za področje biologije/editors for biological sciences</i> Nina Šajna, Sonja Škornik <i>urednik za področje didaktike/editor for didactical sciences</i> Samo Repolusk <i>urednika za področje fizike/editors for physical sciences</i> Robert Repnik, Aleš Fajmut <i>urednika za področje matematike/editors for mathematical sciences</i> Igor Pesek, Janja Jerebic <i>urednik za področje tehnike/editor for technical sciences</i> Mateja Ploj Vrtič <i>tehnična urednica/technical editor</i> Polona Kren
Mednarodni uredniški svet/ International advisory board	Igor Emri (Fakulteta za strojništvo Univerze v Ljubljani, član SAZU), Matej Brešar (FNM, član SAZU), Sergey Pasechnik (Državna fakulteta v Moskvi), Vlad Popa-Nita (Fakulteta za fiziko Univerze v Bukarešti), Blaž Zmazek (FNM), Samo Kralj (FNM), Franci Janžekovič (FNM), Nataša Vaupotič (FNM), Mitja Kaligarič (FNM), Boris Aberšek (FNM), Andrej Šorgo (FNM), Bojan Mohar (Simon Fraser University, Vancouver), Matjaž Perc (FNM), Ivica Aviani (Naravoslovno matematična fakulteta Split), Fahriye Altınay (Univerza v Nikoziji), Andreas M. Hinz (Univerza Ludwig-Maximilians, München)
Oblikovanje/Design	Amadeja Bratuša
Lektoriranje/Proofreading	Ljudmila Bokal
Sedež uredništva/Address	FNM UM, Koroška cesta 160, 2000 Maribor
e-mail	dianoia@um.si
internet/web	www.fnm.um.si
Tisk/Printed by	FNM UM
Leto izida/Year	2022
Datum natisa/Published	2022
Naklada/Nr. of Copies	100 izvodov

Revija izhaja dvakrat letno, predvidoma aprila in septembra.

Kazalo / Table of Contents

Namesto uvodnika: pogovor pesnikov	5
Fraktali - čudež narave Fractals - miracle of nature	
<i>Borut Bončina, Kanisaja Nika Kovačič, Luka Svenšek, Timotej Vičar, Simon Brezovnik</i>	9
Molekularni deskriptorji in metoda prerezov Molecular descriptors and the cut method	
<i>Niko Tratnik</i>	27
Periodni sistem lihih sestavljenih števil in rešeta za iskanje praštevil Periodic system of odd composite numbers and sieves for searching primes	
<i>Srečko Lampret</i>	39
Dominacija v grafih in njena uporaba v vsakdanjem življenju Domination in graphs and its applications in everyday life	
<i>Jasmina Ferme, Daša Štesl</i>	57

Namesto uvodnika: pogovor pesnikov*

SONET IX/12

Državo mora vsak rojak ceníti,
ki je s krvjó in žúlji priborjêna!
Nihčè nam je ne more podaríti –
na roda volji čvrsti je zgrajêna!

Slovenski narod sam jo je ustvaril,
na karantanskih têmeljih zgradí jo;
sovrág po njej je mnogokrat rovaril,
uspel pa níkdar, da si pokorí jo!

Če kdo trdí drugače, tá se láže!
Kdor sliši klic srcá iz globočine,
resnico čuva, da se ne umaže!

Slovenec, ki srcá ima vrline,
čast do države svoje naj izkaže,
a prva naj bo skrb do domovine!

STOLETJE SOLDATOV

Ko bil sem fantek, pet let star,
sem prosil: Mama, kruha!
Počakaj, mi je šepnila,
krompirček se že kuha.

Ko bil sem toliko let star,
da znal sem šteti leta,
sem z materjo ob rakvi stal
in pokropil očeta.

Ko bil sem štirinajst let star,
sem v cerkvi zavetišča
že klel boga in gledal kri
in bežal v zaklonišča.

Ko sem imel čez dvajset let,
sem sam po cestah taval,
premišljal in spet vonjal kri
in s strahom obupaval.

Ko bo moj sinko pet let star,
povpraša: Kje je ata?
in mamici vzbudi spomin
na padlega soldata.

Srečko Lampret,
diplomant OMR FNM UM 2003 [3]

Janez Menart [2]

*Nekatere dileme lahko razrešimo z besedami. Za druge so potrebna dejanja, poskusi. Modri ljudje se slišijo, spore razrešijo z besedami in v dejanjih, poskusih sodelujejo. Nespametni pa imajo v besedah vedno prav, dejanja in poskusi pa so namenjeni pridobivanju samo zase. Se pa tudi zgodi, da modri nimajo sreče, ali pa imajo nespametni srečo. (Pripis D.B.)

Literatura

- [1] A. Goričan: Proces izdaje nove številke revije Dianoia. *Dianoia* 1 (2017) 109–112.
- [2] Kovič, K., Zlobec, C., Menart, J., Pavček, T.: *Pesmi štirih*. Ljubljana: Cankarjeva založba, 1988. (Faks. izv. izd.: V Ljubljani: Slovenski knjižni zavod, 1953).
- [3] Lampret, S.: *Slovenski narod: sonetni venec sonetnih vencev*. Celjska Mohorjeva družba; Društvo Mohorjeva družba; Kulturno društvo Vuzenica, 2020.

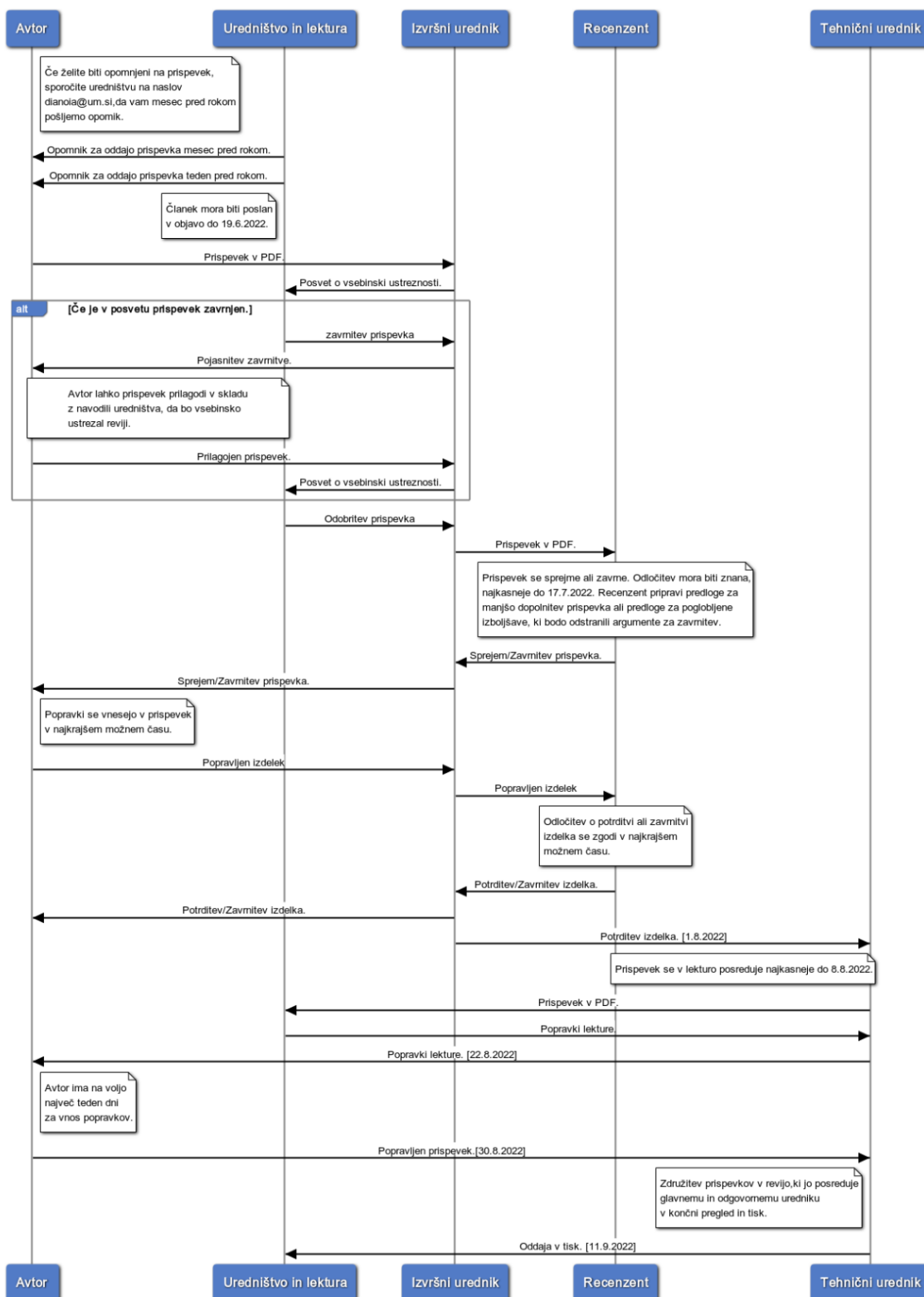


Figure 1: Proces izdaje naslednje številke revije Dianoia.

Fraktali - čudež narave

Fractals - miracle of nature

Borut Bončina, Kanisaja Nika Kovačič, Luka Svenšek, Timotej Vičar, Simon Brezovnik^a*

^a Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Koroška cesta 160, Maribor, Slovenija

Povzetek

Fraktali so matematični objekti, s katerimi lahko sorazmerno dobro aproksimiramo nekatere objekte v naravi, ki imajo strukturo z neskončno podrobnostmi. Natančneje, so neprazne kompaktne podmnožice nekega metričnega prostora, ki vsebujejo neskončno podrobnosti. Fraktali običajno premorejo neko vrsto sebi-podobnosti. Takšno posebno družino, pri kateri je faktor sebi-podobnosti konstanten, imenujemo sebi-podobni fraktali. V članku pokažemo, da ima Cantorjeva množica res sebi-podobno fraktalno strukturo. V nadaljevanju predstavimo postopek računanja sebi-podobnostne dimenzije, dimenzije štetja škatlic ter izračunamo omenjeni karakteristiki na konkretnih primerih, med drugim tudi na praproti, ki smo jo za ta namen poiskali v bližnji okolici. Nadalje smo prikazali postopek računanja obsegov in ploščin fraktalnih množic in ugotovili, da obstajajo takšne s končno ploščino, a neskončnim obsegom. V programu POV-RAY smo zapisali algoritem, s katerim smo generirali nove fraktale z zanimivim izgledom.

Ključne besede: fraktali, sebi-podobnost, fraktalna dimenzija, obsegi in ploščine fraktalov.

Abstract

Fractals are mathematical objects, which can relatively well approximate many objects in nature that have a structure with infinite details. Specifically, they are nonempty compact subsets of some metric space that contain infinite details. Fractals usually possess some kind of self-similarity. Such a special family in which the self-similarity factor is constant is called self-similar family of fractals. In the article, we show that the Cantor set really has a self-similar fractal structure. In the following, we present the process of calculating the self-similarity dimension, the dimensions of counting boxes and calculate the mentioned characteristics on specific cases, including the fern, which we found for this purpose in the vicinity. We further presented the process of calculating the perimeters and areas of fractal sets and found that there are those with a finite area but an infinite perimeter. In the POV-RAY program, we wrote an algorithm with which we generated new fractals with an interesting appearance.

Key words: fractals, self-similarity, fractal dimension, perimeters and areas of fractals.

1 Uvod

Objekti, ki nakazujejo fraktalno obliko, so povsod okoli in znotraj nas. To so npr. cvet sončnice, človeška pljuča, brokoli, pa tudi morska obala, lunini kraterji, snežinke in izgled jutranje zarje.

*corresponding author

E-mail naslovi: borut.boncina1@gmail.com (Borut Bončina), kanisaja.nika5@gmail.com (Kanisaja Nika Kovačič), iluka4205@gmail.com (Luka Svenšek), timotej.vicar@gmail.com (Timotej Vičar), simon.brezovnik2@um.si (Simon Brezovnik^a)

Prvič v zgodovini zasledimo začetek obravnave oblik, podobnih fraktalnim oblikam, leta 1525 v Albrecht Dürerjevi knjigi *The Painter's Manual*. Gre za pojav Dürerjevih petkotnikov, ki predstavljajo posredne zametke nastanka tematskega polja fraktalov [1]. Prva ideja, neposredno vezana na fraktale, pa je privrela na dan v 17. stoletju. Nemški matematik Gottfried Wilhelm Leibniz je opisal koncept samopodobnosti [11], ki pravi, da ko pobližje pogledamo posamezen delec vzorca, vidimo v tem pobližje pogledanem delcu ponovno podoben vzorec, kot smo ga videli v predhodnem vzorcu.

Naslednji večji premik na področju fraktalov je napravil Karl Weierstrass leta 1872 s prikazom Weierstrassove funkcije [11]. Weierstrassova funkcija ima fraktalno strukturo, saj gre za zvezno ne-odvedljivo funkcijo, razprostrto po Evklidski ravnini, s posebnostjo, da ko povečamo posamezen poljuben del grafa funkcije, ima ta poljubno povečan del podobno obliko kot del grafa, ki smo ga opazovali pred povečavo.

Ta posebnost Weierstrassove funkcije se sklada s konceptom Leibniza ter je vzrok za opredeljevanje strukture te funkcije kot fraktalne strukture. Eno bolj znanih fraktalnih krivulj je generiral Helge Koch leta 1904, ponaša se z imenom Kochova krivulja [11]. Dandanes obstajajo različne posplošitve Kochove krivulje.

Nadaljnji razvoj področja fraktalov je omogočil Felix Hausdorff s svojo predstavitvijo koncepta fraktalnih dimenzij. Koncept fraktalnih dimenzij, predstavljen leta 1918 [9], je razširil definicijo dimenzije in s tem omogočil razumevanje likov z dimenzijo, ki ni naravno število. Besedo fraktal, ki izhaja iz latinske besede *fractus*, kar pomeni zlomljen oziroma nepravilen, je leta 1975 prvi uporabil francosko-ameriški matematik Benoit Mandelbrot. Le-ta je ob svoji izdaji članka ob odkritju Mandelbrotove množice priložil računalniško generirane slike fraktalov. Grafično predstavljanje fraktalov je zelo zahtevno, kar je pred računalniško dobo predstavljalo velik problem. Mandelbrot je med odpravljanjem problematike komunikacijskega šuma pri toku podatkov po telefonskih linijah podjetja IBM odkril, da če ilustrira komunikacijski šum kot graf turbulence, opazi samopodobnostno fraktalno lastnost grafa. Ne glede na to, ali je skala grafa prikazovala časovno obdobje enega meseca, enega dne, ene ure ali pa ene sekunde, je bil vzorec komunikacijskega šuma presenetljivo podoben. S pomočjo računalnika je obdelal predpis grafa ter dobil fraktal v obliki žužka [12]. S tem je odprl vrata v računalniško generiranje fraktalov, ki omogoča njihovo vizualizacijo.

V članku smo stopili na matematično področje, ki še posebej lepo modelira svet v vsej njegovi privlačnosti in skrivnostnosti. Avtorji smo se najprej seznanili z osnovami metričnih prostorov in kompaktnih množic, kar je predpogoj za razumevanje strukture osnovnih gradnikov fraktala. V nadaljevanju smo predstavili konkretne fraktale, natančneje Kochovo krivuljo in snežinko, piramido Sierpinskega ter Cantorjevo množico. Pokazali smo, da ima Cantorjeva množica fraktalno strukturo. Pogoj za to je, da je omejena, zaprta in neprazna

podmnožica nekega metričnega prostora. V nadaljevanju smo generirali fraktale v splošnem, pri čemer smo faktor skrčitve ves čas ohranjali konstanten. Predstavili smo postopek računanja sebi podobnosti dimenzije in dimenzije štetja škatlic. Ugotovili smo, da obstajajo objekti z dimenzijami, ki niso nujno naravna števila. V naslednjem poglavju smo prikazali postopek računanja obsegov in ploščin fraktalnih množic. Pri tem smo si pomagali z znanjem konvergence oz. divergence neskončne geometrijske vrste. Spoznali smo matematične objekte, ki premorejo končno ploščino, a imajo neskončen obseg. V zadnjem poglavju smo s člani skupine v programu POV-RAY ustvarili še neznane fraktale.

2 Osnove metričnih prostorov

Za začetek si pogledjmo nekaj osnovnih definicij, ki bodo pomagale razumeti, kakšno strukturo imajo fraktali, in posledično omogočile, da jih bomo generirali na pravi način. Definicije so povzete po [7].

Definicija 1. Naj bo M neprazna množica. Preslikava $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ se imenuje **metrika (razdalja)**, če zadošča pogojem:

- $\forall x, y \in M : d(x, y) \geq 0$ in $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- $\forall x, y \in M : d(x, y) = d(y, x)$,
- $\forall x, y, z \in M : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Urejeni par množice in metrike (M, d) imenujemo **metrični prostor**.

Poglejmo si nekaj znanih metrik, ki nastopajo v različnih metričnih prostorih.

1. *Evklidska metrika d'* , definirana na množici $\mathbb{R}$, ni nič drugega kot razdalja med dvema točkama na številski premici. Formalno jo definiramo na naslednji način:

$$d'(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

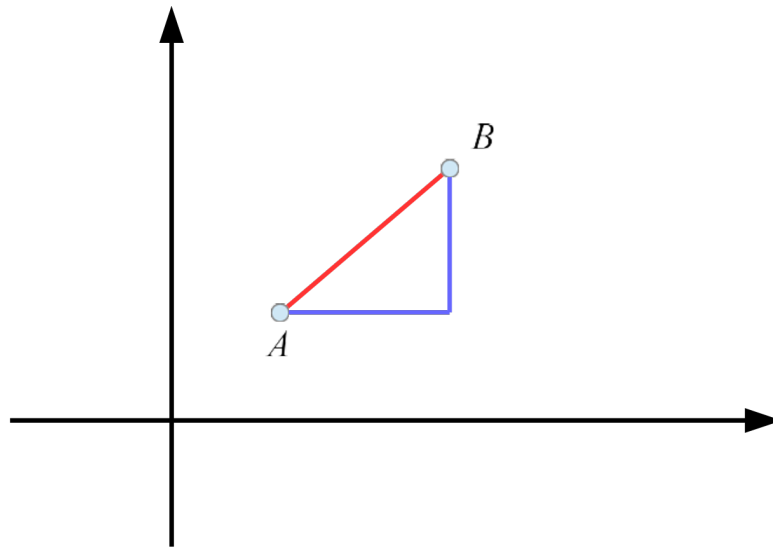
2. *Evklidska metrika d''* , definirana na množici $\mathbb{R}^2$, predstavlja dolžino daljice med dvema poljubnima točkama v ravnini in je definirana s predpisom:

$$d''((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

3. *Evklidska metrika d* , definirana na množici $\mathbb{R}^n$, predstavlja posplošitev Evklidske metrike na številski premici in v ravnini in je definirana kot

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2},$$

za poljubna elementa $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ in $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ iz množice $\mathbb{R}^n$.



Slika 1: Dolžina modrih daljic predstavlja Manhattan razdaljo med točkama, dolžina rdeče pa Evklidsko razdaljo med točkama A in B v realni ravnini.

4. *Manhattan metrika* d''' je metrika, definirana na množici $\mathbb{R}^2$ in ima naslednji predpis:

$$d'''((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|, \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Na sliki 1 vidimo, kakšni sta razdalji med dvema točkama v Evklidski in Manhattan metriki realne ravnine.

Osnovni objekt metričnega prostora, ki bo igral pomembno vlogo v nadaljevanju, je odprta krogla. Pa si pogledjmo njeno definicijo.

Definicija 2. Naj bo (X, d) metrični prostor, $a \in X$ in $r > 0$. Množico $B(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$ imenujemo **odprta krogla** s središčem a in polmerom r .

Definicija 3. Naj bo (X, d) metrični prostor in $S \subseteq X$. Množica S je **omejena**, če obstaja tak $a \in X$ in $R > 0$, da je $d(a, x) < R$ za vsak $x \in S$.

Preprosto povedano, neka množica je omejena, kadar obstaja takšna odprta krogla, ki vsebuje vse elemente te množice.

Da bomo razumeli, kdaj je poljubna množica nekega metričnega prostora zaprta, si moramo prej pogledati definicijo limite zaporedja, limitne točke in zaprtja množice.

Definicija 4. Zaporedje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ metričnega prostora (X, d) konvergira k elementu $x \in X$, če

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : d(x_n, x) < \varepsilon, \forall n > n_0.$$

Element x imenujemo **limita zaporedja** in ga označimo kot $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Definicija 5. Naj bo (X, d) metrični prostor in $S \subseteq X$. Točka $x \in X$ je **limitna točka** množice S , če obstaja tako zaporedje $\{x_n\} \subseteq S \setminus \{x\}$, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Definicija 6. **Zaprte** množice S , ki ga označimo s $\bar{S}$, je unija množice S z vsemi njenimi limitnimi točkami. Množica S je **zaprta**, če je $S = \bar{S}$.

Sedaj imamo vse potrebno, da lahko definiramo osrednji pojem tega poglavja, tj. pojem kompaktne množice, ki predstavlja potreben pogoj, da lahko neki množici rečemo fraktal. Zaradi kompleksnosti same definicije kompaktne množice, smo se omejili na prostor $\mathbb{R}^n$, saj se bomo v nadaljevanju ukvarjali predvsem s takimi vrstami fraktalov. V tem primeru lahko kompaktnost definiramo s pomočjo Haine-Borelovega izreka.

Izrek 1. Naj bo $(\mathbb{R}^n, d)$ metrični prostor in $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Tedaj velja:

$$S \text{ je kompaktna} \iff S \text{ je omejena in zaprta.}$$

3 Fraktali

Osnovne ideje in definicije tega poglavja so vzete iz virov [8], [10] in [6]. Kot smo že omenili, formalna definicija fraktala ni podana oziroma je preveč splošna, da bi jo formulirali matematično korektno. Kljub temu fraktale opisujemo na naslednji način.

Množico F imenujemo **fraktalna množica**, če ima naslednje lastnosti:

- (i) ima prefinjeno (drobno) strukturo, vidno pri poljubni povečavi,
- (ii) je preveč zapletena (lokalno in globalno), da bi jo lahko obravnavali z uporabo klasičnih geometrijskih metod,
- (iii) pogosto premore neko vrsto samopodobnosti, morda le približno ali naključno,
- (iv) v večini obravnavanih primerov lahko F definiramo na dokaj preprost način (recimo rekurzivno).

Če zahtevamo, da ima fraktalna množica sebipodobno strukturo, lahko njene lastnosti lažje matematično opišemo. Zato oblikujemo naslednjo definicijo.

Definicija 7. Fraktalno množico F imenujemo **sebipodobna fraktalna množica**, če jo sestavlja neskončno samopodobnih delov, tako da vsaka povečava za nek enolično določen faktor razkrije novo kopijo predhodne oblike.

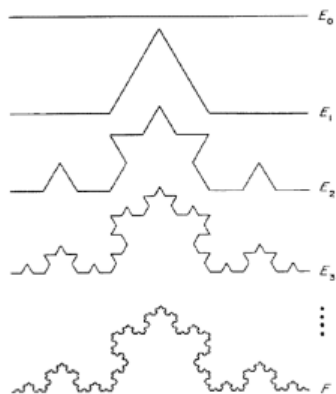
V nadaljevanju si pogledjmo nekaj najbolj znamenitih sebipodobnih fraktalov.

Najprej si pogledjmo primer sebipodobnega fraktala, ki je prikazan na sliki 2. Začnemo z enotsko daljico, ki jo na prvem koraku skrčimo s faktorjem $\frac{1}{3}$ in vzamemo štiri takšne kopije. Kopije postavimo tako, da na sredini nastane enakostranični trikotnik. Nato na

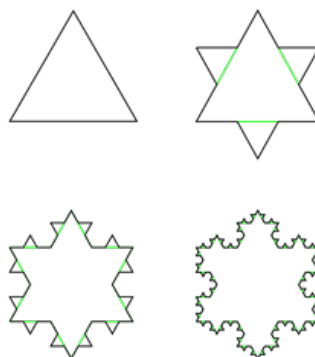
vsakem izmed naslednjih korakov postopek ponovimo. Struktura, ki nastane po neskončno izvedenih korakih, se imenuje Kochova krivulja.

Če bi pri generiranju Kochove krivulje na začetku namesto enotske daljice izbrali enakostranični trikotnik, bi dobili sebipodoben fraktal, ki ga poznamo pod imenom Kochova snežinka in ga prikazuje slika 3.

To sta primera fraktalnih množic v metričnem prostoru $\mathbb{R}^2$.

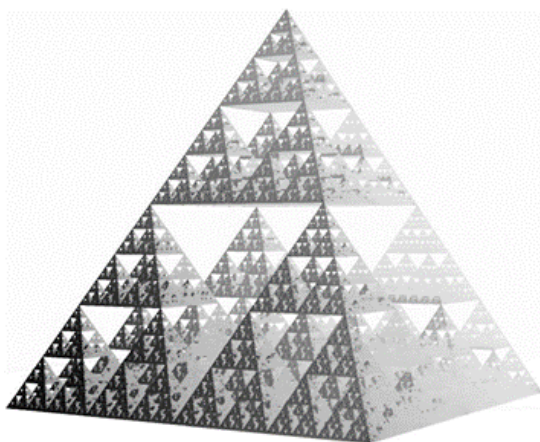


Slika 2: Postopek generiranja fraktala Kochove krivulje [3].



Slika 3: Postopek generiranja fraktala Kochove snežinke [4].

Na sliki 4 je prikazan primer fraktala, ki se imenuje piramida Sierpinskega. Piramido Sierpinskega generiramo tako, da na prvem koraku iz začetnega enotskega tetraedra na sredini izrežemo njegovo pomanjšano kopijo, skrčeno za faktor $\frac{1}{2}$. Postopek ponavljamo na vsakem od novo nastalih tetraedrov in po neskončno izvedenih korakih dobimo piramido Sierpinskega. V tem primeru je fraktalna množica podmnožica realnega metričnega prostora $\mathbb{R}^3$.



Slika 4: Piramida Sierpinskega [5].

Primer fraktala, ki je kompaktna podmnožica metričnega prostora $\mathbb{R}$, je t. i. *Cantorjeva množica* in jo vidimo na sliki 5. V nadaljevanju bomo pokazali, da je množica res fraktal, zato si podrobneje pogledajmo njeno generiranje. Cantorjevo množico dobimo po naslednjem postopku. Začnemo z enotskim intervalom $E_0 = [0, 1]$. Na naslednjem koraku temu enotskemu intervalu izrežemo srednjo tretjino daljice, vendar pustimo obe robni točki. Rezultat je unija dveh intervalov dolžine $\frac{1}{3}$, ki ju označimo z E_1 . Na naslednjem koraku vsaki od preostalih daljic izrežemo srednjo tretjino, rezultat, ki je unija štirih daljic dolžine $\frac{1}{9}$, pa označimo z E_2 . Postopek ponavljamo: na k -tem koraku izrežemo srednje tretjine intervalov množice E_{k-1} in kot rezultat dobimo množico točk E_k , ki jo sestavlja 2^k intervalov dolžine 3^{-k} .

V nadaljevanju bomo s pomočjo prej usvojenega znanja o metričnih prostorih pokazali, da je Cantorjeva množica dejansko fraktal.

Izrek 2. Cantorjeva množica je sebipodobni fraktal.

Dokaz. Glede na postopek konstrukcije Cantorjeve množice opazimo, da le-ta gotovo vsebuje vsaj element 1, torej je neprazna. Da je Cantorjeva množica kompaktna, bomo dokazali s pomočjo Haine-Borelovega izreka, torej bo dovolj dokazati, da je omejena in zaprta. Da je Cantorjeva množica omejena, ni težko opaziti, saj vemo, da je generirana na intervalu realnih števil med 0 in 1. Potem jo lahko v gotovosti zaobjamemo z odprto kroglo $B(0, 2) = [-2, 2]$.

Za dokaz dejstva, da je Cantorjeva množica zaprta, bomo uporabili alternativno definicijo zaprte množice. Za to se moramo najprej poučiti o tem, kdaj je neka množica odprta.

Definicija 8. Naj bo (X, d) metrični prostor in $S \subseteq X$. S je **odprta množica**, če za vsak $x \in S$ obstaja tak $\varepsilon > 0$, da je

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\} \subseteq S.$$

Če bi preprosteje povzeli zgornji zapis, bi lahko rekli, da je neka množica odprta natanko tedaj, ko lahko za poljubno točko te množice narišemo odprto kroglo, ki ima središče v tej točki in v celoti leži znotraj te množice.

Pri dokazu dejstva, da je Cantorjeva množica kompaktna, se bomo oprli na naslednjo uporabno lastnost.

Izrek 3. [7] Naj bo (X, d) metrični prostor. Množica $A \subseteq X$ je zaprta v (X, d) , če je njen komplement A^c odprta množica v (X, d) .

Če si sedaj še enkrat pogledamo konstrukcijo Cantorjeve množice, opazimo, da na vsakem koraku iz preostanka (ki je unija zaprtih intervalov) odrežemo neko končno množico odprtih intervalov. Torej je komplement naše fraktalne množice tudi unija neskončno mnogo

odprtih intervalov. Ker je vsak odprt interval komplementa fraktala odprta množica, je tudi njihova unija odprta množica. To pa pomeni, da je fraktalna množica po izreku 3 zaprta.

S tem smo torej pokazali, da je Cantorjeva množica zaprta in omejena, torej tudi kompaktna. Ker je neprazna in vsebuje neskončno mnogo samopodobnosti, je tudi fraktal in je s tem dokaz zaključen. $\square$



Slika 5: Prvih šest korakov generiranja Cantorjeve množice [2].

3.1 Dimenzije fraktalov

Različni objekti imajo lahko različne dimenzije. Črta je enodimenzionalna, kvadrat dvodimenzionalen, kocka pa je tridimenzionalna. Videli bomo, da dimenzija objektov ni nujno celo število.

Kvadrat s stranico dolžine tri ima devetkrat večjo ploščino kot kvadrat s stranico ena, ker lahko večji kvadrat razdelimo na devet skladnih kopij manjšega. Kvadrat je dvodimenzionalen, saj lahko s povečanjem stranice za faktor 3 dobljen kvadrat razdelimo na $3^2 = 9$ kopij starega.

Podobno lahko povemo, da je kocka tridimenzionalna, ker s povečavo za faktor 3 dobimo $3^3 = 27$ kopij stare.

V splošnem definiramo dimenzijo fraktalov na naslednji način.

Definicija 9. Naj bo N število r -krat pomanjšanih kopij nekega sebipodobnega fraktala F , ki jih potrebujemo, da pokrijemo začetni lik. Potem definiramo d tako, da velja

$$\left(\frac{1}{r}\right)^d = N,$$

in ta d imenujmo **dimenzija sebipodobnosti** fraktala F .

Iz zgornje enačbe lahko izrazimo naš d :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{r}\right)^d &= N \\
\ln\left(\frac{1}{r}\right)^d &= \ln(N), \\
d \cdot \ln\left(\frac{1}{r}\right) &= \ln(N), \\
d &= \frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}.
\end{aligned}$$

Potem lahko zapišemo alternativno definicijo dimenzije sebipodobnosti.

Definicija 10. Naj bo N število r -krat pomanjšanih kopij nekega sebipodobnega fraktala F , ki jih potrebujemo, da pokrijemo začetni lik. Potem definiramo d tako, da velja

$$d = \frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}$$

in ta d imenujmo dimenzija sebipodobnosti fraktala F .

Na primeru Kochove snežinke si pogledajmo, kako dimenzije izgledajo pri sebipodobnih fraktalih. Spomnimo se, da pri koraku sestavljanja Kochove snežinke dobimo štiri kopije prvotne daljice, ki so od prve manjše za faktor $\frac{1}{3}$. Če lahko lik sestavimo iz manjših kopij, jih bomo potrebovali 3^d (npr. $3^2 = 9$ pri kvadratu). Za Kochovo snežinko potrebujemo štiri kopije, torej bo veljalo $3^d = 4$. Če enačbo logaritmiramo in izrazimo d , vidimo, da ima snežinka dimenzijo približno 1,26.

Dimenzijo sebipodobnih fraktalov si oglejmo na še enem primeru (glej sliko 6).

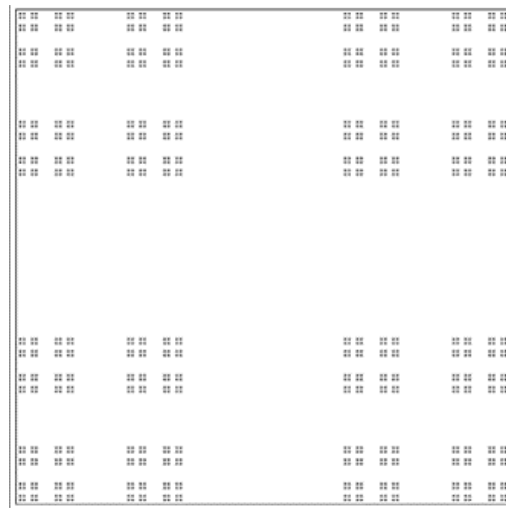
V vsakem koraku je faktor skrčitve $\frac{1}{3}$ (torej tudi na prvem), da sestavimo lik pa na prvem koraku potrebujemo štiri manjše kopije. Dimenzija tega fraktala je torej $d = \frac{\ln(4)}{\ln(3)}$, kar je približno 1,26.

Seveda pa velja, da niso vsi fraktali sebipodobni. Nekateri imajo skozi konstrukcijo različne faktorje skrčitve, torej ne moremo izračunati njihove dimenzije na tak način kot prej. Primer fraktala, ki ni sebipodoben, je prikazan na sliki 7. V takih primerih uporabimo dimenzijo štetja škatlic. V ta namen si pogledjmo naslednjo definicijo.

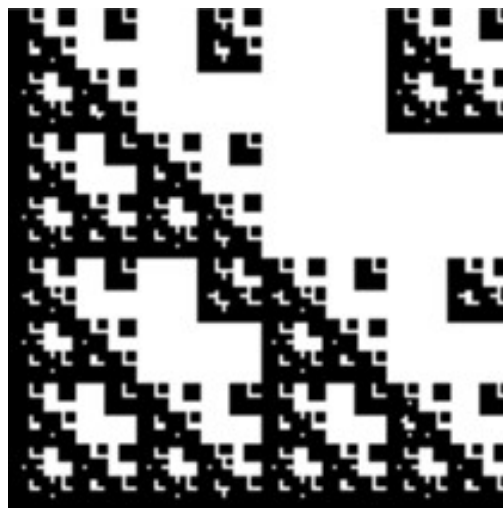
Definicija 11. Pokrijmo prostor $\mathbb{R}^m$, v katerem leži množica S s škatlicami, ki imajo dolžino stranice r . Naj $N_r(S)$ označuje število škatlic, ki imajo z S neprazen presek. Če obstaja

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N_r(S)}{\ln r},$$

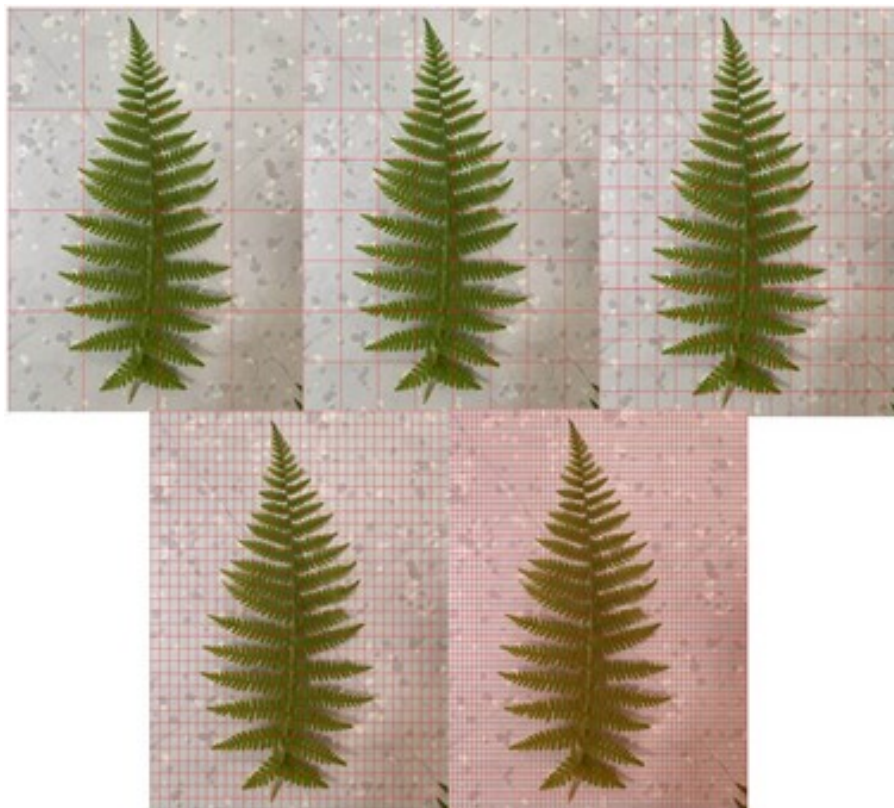
potem D imenujemo **dimenzija štetja škatlic** množice S .



Slika 6: Primer fraktala, ki ima sebi podobnostno dimenzijo $d = \frac{\ln(4)}{\ln(3)}$ [14].



Slika 7: Primer fraktala, za katerega ni mogoče izračunati sebi podobnostne dimenzije, saj ima desni zgornji del na vsakem koraku generiranja fraktala drugačen faktor skrčitve kot preostali deli fraktala [14].



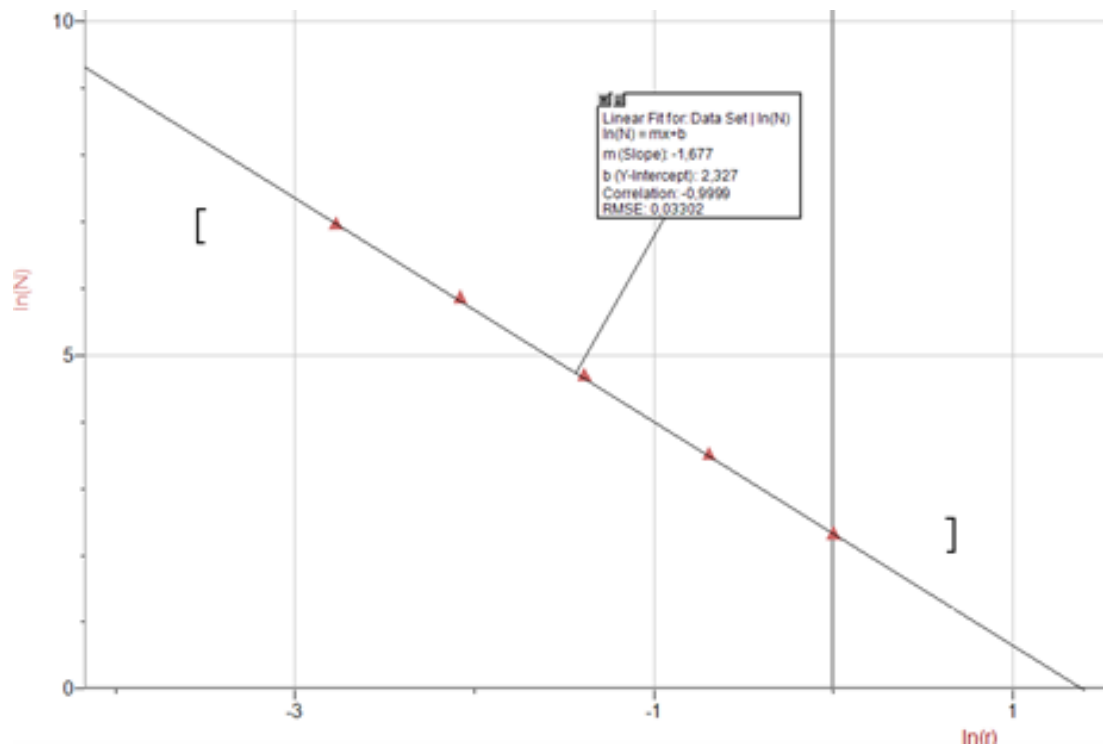
Slika 8: Prikaz praprota v mrežah s kvadrati različnih dimenzij.

Kot vidimo, je razlika med sebi podobnostno dimenzijo in dimenzijo štetja škatlic v tem, da pri prvi štejemo število sebi podobnih delov, pri drugi pa se ne omejimo več na dejstvo, da morajo biti deli sebi podobni, ampak jih ne glede na njihov izgled "pakiramo" v odprte škatle, ki niso nič drugega kot zaprti intervali v $\mathbb{R}$, kvadrati v $\mathbb{R}^2$ oziroma kocke v $\mathbb{R}^3$.

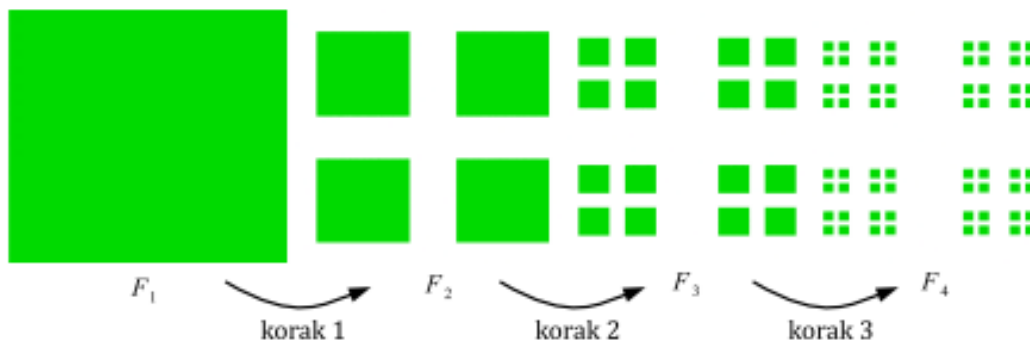
V nadaljevanju bomo prikazali, kako lahko izračunamo dimenzijo štetja škatlic poljubne fraktalne množice, ki sama po sebi nima sebi podobne strukture. V ta namen smo odšli na bližnji travnik, kjer smo našli praprot. Izdelali smo njeno fotografijo in s pomočjo prostodostopnega programa Proportion Grid Maker izdelali različno velike mreže, v katere smo postavili to praprot (glej sliko 8). S pomočjo programa Logger Pro smo aproksimirali graf odvisnosti števila škatlic, ki pokrijejo krivuljo in faktorja skrčitve teh škatlic. Za podrobnosti glej sliko 9. Po definiciji dimenzije štetja škatlic nam smerni koeficient grafa te funkcije ponudi dimenzijo same krivulje. Torej je dimenzija roba naše praproti enaka 1,677.

3.2 Ploščine in obsegi fraktalov

V nadaljevanju si bomo pogledali postopek računanja ploščine in obsega nekega fraktala. Za začetek si pogledajmo primer sebi podobnega fraktala, ki smo ga generirali s pomočjo programa POV-RAY, postopek njegove konstrukcije pa prikazuje slika 10.



Slika 9: Prikaz logaritemske odvisnosti števila kvadratkov, ki jih na nekem koraku potrebujemo, da pokrijemo celotno krivuljo roba praproti, in dolžine stranice posameznega kvadrata.



Slika 10: Postopek konstrukcije primera sebi podobnega fraktala, na katerem smo izračunali obseg in ploščino.

Fraktal F smo generirali tako, da smo na vsaki iteraciji skrčili kvadrat za $\frac{1}{3}$ in štiri kopije postavili blizu kotov. Poglejmo najprej, kakšen je njegov obseg. Brez škode za splošnost predpostavimo, da je stranica množice F_1 enaka 1. Torej je $o(F_1) = 4$. Stranica množice F_2 je enaka $\frac{1}{3}$, saj ima naš postopek generiranja fraktala prav takšen faktor skrčitve. Torej je $o(F_2) = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 4 = 5.\bar{3}$. Množico F_3 oblikujemo tako, da je stranica posameznega dela enaka $\frac{1}{9}$. Zato je obseg $o(F_3) = \frac{4^3}{3^2} = 7.\bar{1}$. Na podoben način dobimo $o(F_4) = \frac{4^4}{3^3} = 9.4\bar{81}$. Vidimo lahko, da se obseg z vsako iteracijo večja. V splošnem je $o(F_n) = \frac{4^n}{3^{n-1}}$, kjer je n poljuben korak skrčitve delov predhodne množice za faktor $\frac{1}{3}$. Da dobimo obseg fraktala, moramo izvesti neskončno korakov takšnih skrčitev. To pomeni, da je

$$o(F) = o(F_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} o(F_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 \cdot \left(\frac{4}{3} \right)^{n-1} \right) = \infty,$$

saj geometrijsko zaporedje, ki ima kvocient večji od ena, divergira. To pomeni, da ima naš fraktal neskončen obseg.

Sedaj pa pogledajmo še njegovo ploščino. Spet predpostavimo, da je stranica množice F_1 enaka 1. Dobimo, da je $S(F_1) = 1$. Stranice kvadratov, ki sestavljajo F_2 , so dolžine $\frac{1}{3}$. Torej je $S(F_2) = \frac{1}{9} \cdot 4 = 0.\bar{4}$. Množico F_3 oblikujemo tako, da je stranica posameznega kvadrata enaka $\frac{1}{9}$. Zato je ploščina $S(F_3) = \frac{1}{9^2} \cdot 4^2 \approx 0.198$. Na podoben način dobimo $S(F_4) = \frac{1}{9^3} \cdot 4^3 \approx 0.088$. Vidimo lahko, da se ploščina z vsako iteracijo manjša. Opazimo, da je na n -tem koraku skrčitve ploščina nastalega lika enaka $S(F_n) = \frac{4^{n-1}}{9^{n-1}}$. Ker je fraktal F dobljen po neskončno korakih, je

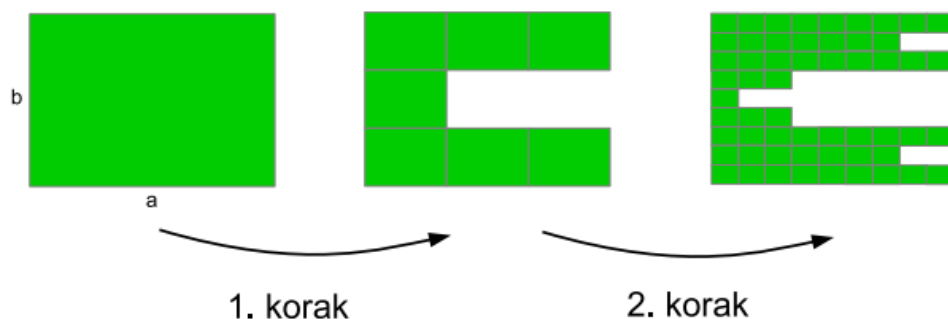
$$S(F) = S(F_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(F_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n-1}}{9^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{9} \right)^{n-1} = 0,$$

saj geometrijsko zaporedje, ki ima kvocient strogo med vrednostima nič in ena, konvergira proti 0. To pomeni, da ima naš fraktal ploščino enako nič.

Našli smo torej fraktal F , ki premore neskončen obseg, njegova ploščina pa je enaka 0.

Poglejmo si še en primer fraktala, katerega ploščina je končna. Definirajmo fraktal po vzorcu, ki ga prikazuje slika 11.

Brez škode za splošnost predpostavimo, da je začetni lik enotski kvadrat, ki ga na vsakem

Slika 11: Postopek konstrukcije fraktala F' .

koraku skrčimo za faktor $\frac{1}{3}$. Potem je ploščina dobljenega lika na vsakem koraku:

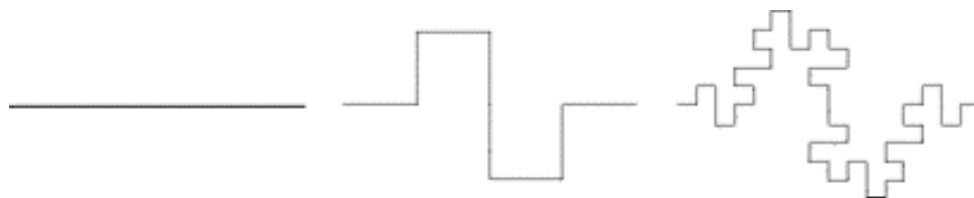
$$\begin{aligned}
 S_1 &= 1 \\
 S_2 &= 1 - \frac{2}{9} \\
 S_3 &= 1 - \frac{2}{9} - \frac{2}{9^2} \cdot 3 \\
 S_3 &= 1 - \frac{2}{9} - \frac{2}{9^2} \cdot 3 - \frac{2}{9^3} \cdot 3^2 + \dots \\
 S_\infty &= S_{F'} = 1 - \frac{2}{9} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) = \\
 &= 1 - \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} = 1 - \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

Fraktal F' ima torej ploščino enako dvema tretjinama ploščine začetnega enotskega kvadrata. Hitro bi lahko ugotovili tudi, da je obseg takšnega lika neskončen.

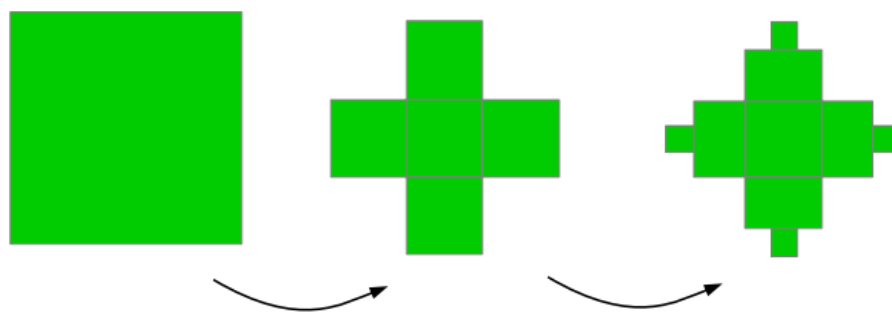
Kot zanimivost si pogledjmo fraktal, ki ga dobimo po postopku, ki ga nakazuje slika 12. Na vsakem koraku vsako od daljic skrčimo za faktor $\frac{1}{4}$ in 8 novonastalih pomanjšanih kopij postavimo v nek izbran vrstni red. Fraktalu, ki ga dobimo z izbranim nizanjem pomanjšanih stranic, bomo rekli *zmajeva krivulja*. Če sklenemo skupaj štiri zmajeve krivulje, dobimo t. i. *zmajev lik*. Pri računanju ploščine zmajevega lika hitro ugotovimo, da na vsakem koraku izločimo enako število "kvadratkov", kot jih dodamo v množico. Torej ostane ploščina konstantna skozi celoten postopek generiranja fraktala. Zato je ploščina tako konstruiranega zmajevega lika enaka kar ploščini začetne množice.

V prikazanih primerih smo opazili, da je lahko ploščina posameznega fraktala enaka 0, lahko pa je tudi neka konkretna, od nič različna vrednost. Pogoji omejenosti množice nam onemogoča, da bi bila ploščina fraktala enaka neskončno.

Intuitivno gledano bi lahko na podlagi zgornjih primerov sklepali, da je obseg poljubnega fraktala neskončen. Kljub temu pa lahko hitro najdemo tak fraktal, ki temu ne zadošča.



Slika 12: Postopek konstrukcije zmajeve krivulje.



Slika 13: Postopek konstrukcije primera sebipodobnega fraktala, ki ima končen obseg.

Eden takih primerov je prikazan na sliki 13. Na vsakem koraku opazimo, da je obseg nove množice enak obsegu predhodne (torej začetne). Zato je obseg tega fraktala enak obsegu kvadrata, s katerim postopek začnemo.

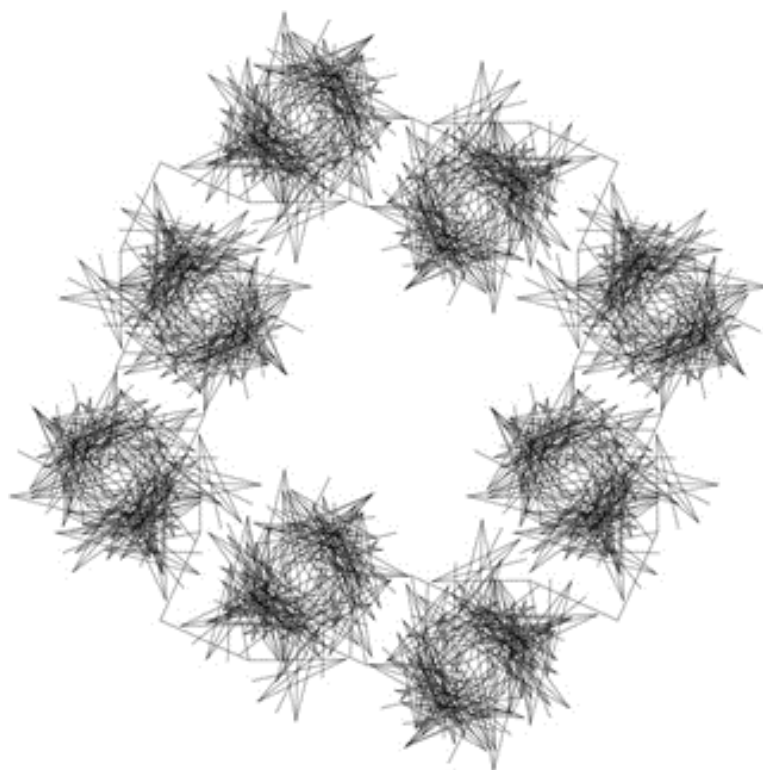
3.3 Izdelava fraktalov s programom POV-RAY in s pomočjo spletnega generatorja

Persistence of Vision Ray Tracer, krajše POV-Ray je program, s katerim lahko preko zapisa programa uporabnik izdela večdimenzionalno sliko matematičnega objekta. Program prav tako omogoča izdelavo animacij, ki jih dobimo z vrtenjem ali približevanjem oz. oddaljevanjem izdelanih matematičnih oblik.

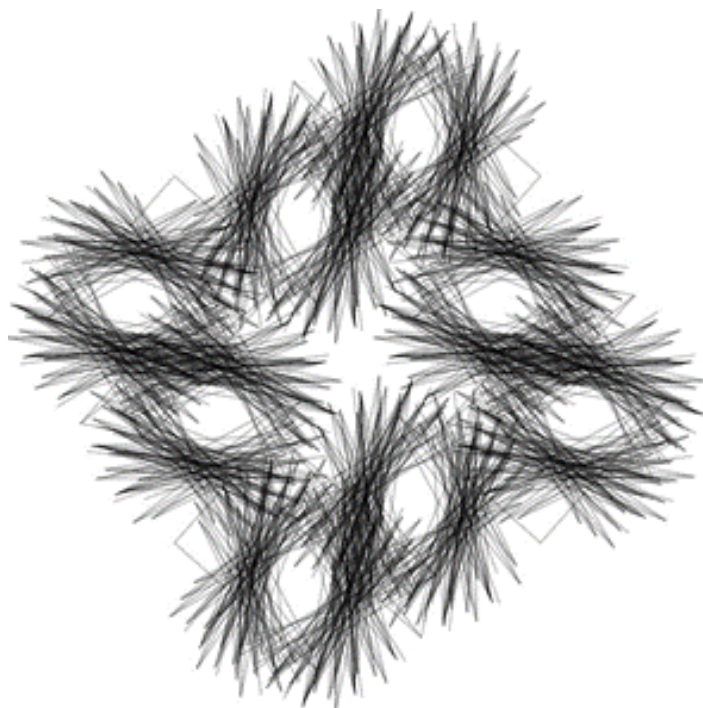
V zaključku tega članka predstavljamo primere fraktalov, ki smo jih narisali v programu POV-RAY in so plod naše domišljije. V programu smo na začetku generiranja fraktala izbirali različne začetne množice in nastali so najrazličnejši fraktali z zanimivimi oblikami. Prav tako smo si v generatorju, ki je dostopen na [13], izbrali neke začetne množice in generirali fraktale z zanimivimi podobami. Nekatere od "kreacij" si bralec lahko ogleda na slikah 14, 15, 16 in 17.



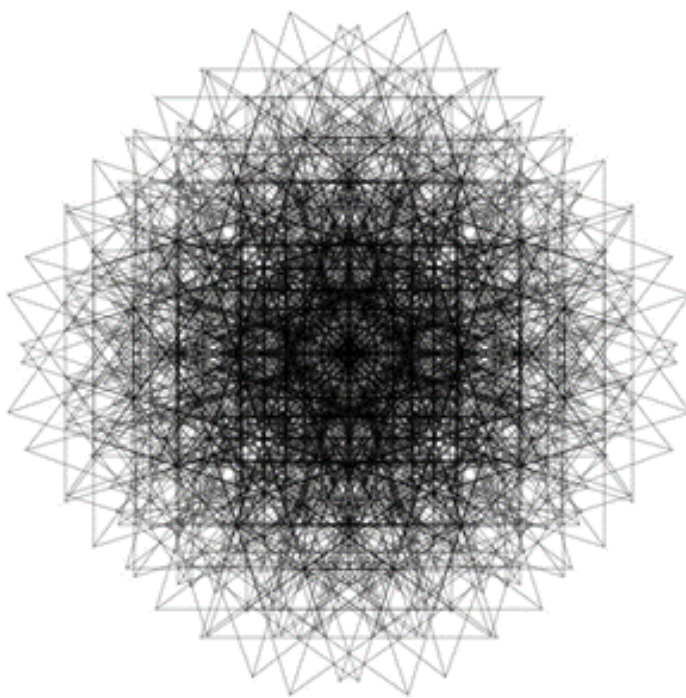
Slika 14: Fraktal "smajko".



Slika 15: Fraktal "šopki rož".



Slika 16: Fraktal "Picasso".



Slika 17: Fraktal "pletenje".

Literatura

- [1] Dürerjevi petkotniki (29.7.2021). Pridobljeno iz: <https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/pentagon/Durer.html>
- [2] Fotografija Cantorjeve množice (29. 7. 2021). Pridobljeno iz: https://sl.wikipedia.org/wiki/Cantorjeva_mno%C5%BEica#/media/Slika:Cantor_set_in_seven_iterations.svg
- [3] Fotografija genriranja Kochove krivulje. (29. 7. 2021). Pridobljeno iz: https://www.researchgate.net/figure/Construction-of-the-von-Koch-curve-F-At-each-stage-the-middle-third-of-each-interval_fig5_26365833
- [4] Fotografija Kochove snežinke. (29. 7. 2021). Pridobljeno iz: https://en.wikipedia.org/wiki/Koch_snowflake#/media/File:KochFlake.svg
- [5] Fotografija piramide Sierpinskega. (29. 7. 2021). Pridobljeno iz: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b4/Sierpinski_pyramid.png
- [6] H. O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, E. Maletsky, T. Perciante, L. Yunker (auth.), *Fractals for the Classroom - Strategic Activities*, Vol. 1, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [7] J. Globevnik, M. Brojan, *Analiza I*, DMFA, Ljubljana, 2016.
- [8] K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, Second Edition, John Wiley & Sons, New Jersey, 2003.
- [9] Leto predstavitve koncepta fraktalnih dimenzij (29.7.2021). Pridobljeno iz: <https://www.britannica.com/science/fractal>
- [10] Michael F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Dover Publications, New York, 2012.
- [11] Osnova zgodovinske podlage področja fraktalov. Pridobljeno iz: J. Sheppard, C. Lee. *Fractals and the Koch snowflake*, University of Leicester, Mathematics BSc, 2020.
- [12] Ozadje zgodovine Mandelbrotovega generiranja fraktalov z računalnikom (29.7.2021). Pridobljeno iz: <https://www.ibm.com/ibm/history/ibm100/us/en/icons/fractal/>
- [13] Spletni generator fraktalov. (29. 7. 2021). Pridobljeno iz: <https://sciencevmagic.net/fractal/#0060,0090,1,1,0,0,1>
- [14] Viri primerov za računanje dimenzij, obsegov in ploščin fraktalov. (29.7.2021). Pridobljeno iz: https://users.math.yale.edu/public_html/People/frame/Fractals/IntroToFrac/InvProb/IFSExerc/IFSExerc.html.

Molekularni deskriptorji in metoda prerezov

Molecular descriptors and the cut method

Niko Tratnik

Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Koroška cesta 160, Maribor, Slovenija
Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko, Jadranska ulica 19, Ljubljana, Slovenija

Povzetek

V članku predstavimo osnovne koncepte raziskovalnega področja znotraj kemijske teorije grafov, ki se ukvarja z molekularnimi deskriptorji in z učinkovitimi metodami za njihovo računanje. Obravnavamo Wienerjev indeks, szegedski indeks in mostarski indeks, ki sodijo med zelo znane molekularne deskriptorje oziroma topološke indekse, definirane s pomočjo razdalje v grafu. Dokazano je, da lahko za benzenoidni graf omenjene indekse izračunamo kot vsoto ustreznih indeksov uteženih kvocientnih dreves. Vključen je tudi primer, ki prikazuje, kako lahko s pomočjo takšnih formul zelo enostavno izračunamo topološke indekse. Na koncu predstavimo posplošitev omenjenih rezultatov, ki velja za poljuben povezan graf. Opomnimo, da so rezultati v tem članku zbrani iz različnih znanstvenih člankov.

Ključne besede: molekularni deskriptor, topološki indeks, benzenoidni graf, metoda prerezov.

Abstract

In this paper, we present basic concepts of a research area in chemical graph theory, which studies molecular descriptors and efficient methods for calculating such descriptors. We consider the Wiener index, the Szeged index, and the Mostar index, which are well-known distance-based molecular descriptors or topological indices. It is proved that for a benzenoid graph, the mentioned indices can be computed as the sum of corresponding indices of weighted quotient trees. Moreover, we include an example showing how such formulas can be used to calculate topological indices very easily. Finally, generalization of these results to any connected graph is presented. Note that the results of this paper are collected from several scientific papers.

Key words: molecular descriptor, topological index, benzenoid graph, cut method.

1 Uvod

Teorija grafov je zelo uporabno področje matematike, saj grafe uporabljamo za modeliranje raznih sistemov in procesov v računalništvu, kemiji, fiziki, prometu, ekonomiji ter v družboslovnih vedah. V tem članku se bomo osredotočili na uporabo teorije grafov v kemiji. Natančneje, obravnavali bomo molekularne deskriptorje, ki se bolj splošno imenujejo tudi topološki indeksi, ter spoznali učinkovite metode za njihovo računanje [10].

V naslednjem poglavju je podanih nekaj najbolj osnovnih definicij iz teorije grafov, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju. V poglavju 3 definiramo benzenoidne grafe, ki predstavljajo matematični model za molekule, imenovane benzenoidni ogljikovodiki. V sledečem poglavju nato formalno vpeljemo tri znane topološke indekse, ki so definirani s pomočjo razdalje v grafih: Wienerjev indeks, szegedski indeks in mostarski indeks. Poglavji 5 in 6 sta namenjeni pripravi teoretične podlage za metodo prerezov, ki je opisana

v poglavju 7. V tem poglavju nato dokažemo, da lahko omenjene tri indekse na benzenoidnem grafu izračunamo kot vsoto ustreznih indeksov treh uteženih kvocientnih dreves. Zadnje poglavje je namenjeno kratki predstavitvi posplošene metode prerezov, ki se lahko uporabi na poljubnem povezanem grafu in torej ne le na benzenoidnih grafih. Ker je v tem primeru izpeljava precej bolj zapletena, je rezultat naveden brez dokaza.

2 Osnovno o grafih

V tem poglavju bomo predstavili nekaj osnovnih definicij iz teorije grafov, več informacij pa lahko najdemo na primer v [8].

Osnovni objekt v teoriji grafov je *graf* $G = (V(G), E(G))$, ki je urejen par množice *vozlišč* $V(G)$ (vozlišča rišemo kot točke) in množice *povezav* $E(G)$ (povezave rišemo kot črte med vozlišči). Množica vozlišč je lahko poljubna neprazna množica, množica povezav pa je sestavljena iz neurejenih parov vozlišč (vsak neurejen par je sestavljen iz dveh različnih vozlišč). Povezave običajno označujemo kot $e = uv$, kjer sta $u, v \in V(G)$ vozlišči grafa. V takem primeru pravimo, da sta vozlišči u in v *sosednji* ter ju imenujemo *krajišči* povezave e .

Naj bosta G in H grafa. Če velja $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$, pravimo, da je graf H *podgraf* grafa G .

Pot v grafu G med vozliščema v_1 in v_n je zaporedje povezav oblike $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_{n-1}v_n$, pri čemer so vozlišča $v_1, \dots, v_n$ paroma različna. *Dolžina poti* je enaka številu njenih povezav.

Cikel v grafu G je zaporedje povezav oblike $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$, pri čemer so vozlišča $v_1, \dots, v_n$ paroma različna.

Graf G je *povezan*, če za poljubni vozlišči u in v obstaja pot med u in v . Če graf ni povezan, je *nepovezan*. Vsak maksimalni povezan podgraf grafa G imenujemo *povezana komponenta* grafa G . Povezan graf brez ciklov se imenuje *drevo*.

Naj bo G graf ter u in v njegovi vozlišči v isti povezani komponenti. *Razdalja* od u do v v grafu G , ki jo označimo kot $d_G(u, v)$, je definirana kot dolžina najkrajše poti med u in v v grafu G .

Graf G je *ravninski*, če ga lahko narišemo v ravnini tako, da se nobeni dve povezavi ne sekata (razen v ustreznih vozliščih). Taka slika se imenuje *ravninska vložitev* grafa G . Ravninska vložitev grafa G razdeli ravnino na območja, ki jih imenujemo *lica* grafa G . Eno od lic je neomejeno in ga imenujemo *zunanje lice*, ostala lica so *notranja*.

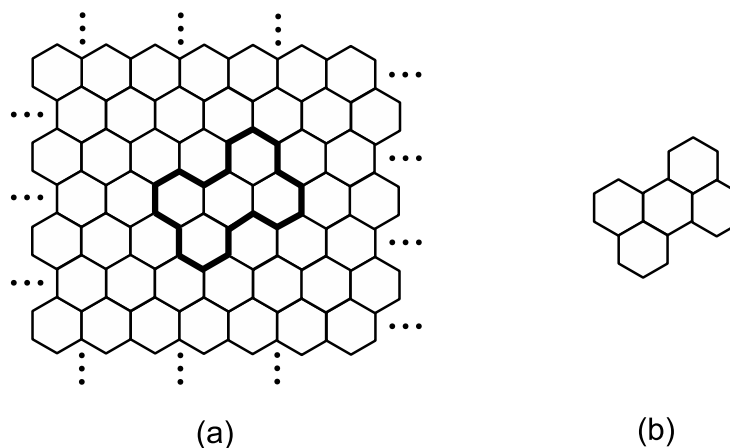
3 Kemijska teorija grafov in benzenoidni grafi

Kot že omenjeno, se bomo v tem članku osredotočili na uporabo teorije grafov v kemiji. Področje matematike, ki se ukvarja s takšnimi temami, se imenuje *kemijska teorija grafov* [12].

Na podlagi dane molekule zlahka tvorimo graf na naslednji način: vozlišča grafa so (nekateri) atomi dane molekule, pri tem je med dvema vozliščema v grafu povezava natanko takrat, ko med ustreznima atomoma obstaja vez. Na ta način dobljen graf imenujemo *kemijski graf* ali tudi *molekularni graf*. Kemijska teorija grafov je torej področje teorije grafov, ki obravnava kemijske grafe in z njimi povezane matematične koncepte, ki so uporabni v kemiji.

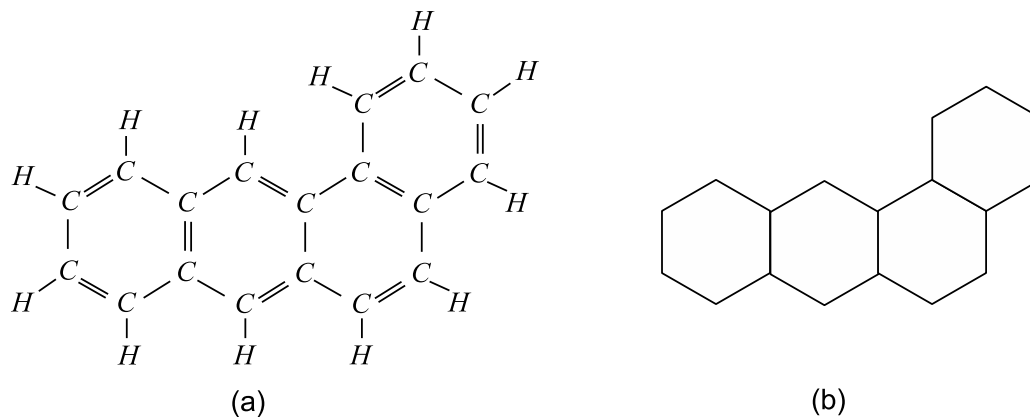
Mi se bomo posebej osredotočili na družino kemijskih grafov, ki jih imenujemo benzenoidni grafi, obravnavani pa so bili že v članku [5]. Omenjene grafe običajno definiramo

tako, da v neskončni in pravilni šestkotni mreži najprej izberemo poljuben cikel C . *Benzenoidni graf* je nato določen z vsemi vozlišči in povezavami, ki ležijo na ciklu C ali v njegovi notranjosti, glej sliko 1. Omenjeni grafi so še posebej pomembni, saj z njihovo pomočjo modeliramo benzenoidne ogljikovodike. V tem članku bo benzenoidni graf vedno vложен v ravnino, in sicer tako, da bodo njegova lica sami pravilni šestkotniki.



Slika 1: (a) Neskončna šestkotna mreža s ciklom C in (b) pripadajoči benzenoidni graf.

Benzenoidni ogljikovodiki so aromatski ogljikovodiki, sestavljeni samo iz benzenovih obročev. Osnovni gradnik teh ogljikovodikov je torej benzen C_6H_6 , molekule pa vsebujejo enega ali več takih obročev, ki so povezani med seboj. Če iz molekule benzenoidnega ogljikovodika tvorimo kemijski graf in pri tem zanemarimo vodikove atome, dobimo ravno benzenoidni graf. Na sliki 2 je prikazan primer benzenoidnega ogljikovodika, imenovanega tetrafen, in njegovega benzenoidnega grafa. Dogovorimo se, da pri benzenoidnih grafih vozlišč ne bomo označevali z debelimi pikami (kot je to sicer običajno), saj so vozlišča vedno oglišča šestkotnikov. Več informacij o benzenoidnih grafih lahko najdemo v knjigi [3].



Slika 2: (a) Benzenoidni ogljikovodik tetrafen in (b) njegov benzenoidni graf.

4 Topološki indeksi in molekularni deskriptorji

Topološki indeksi (imenovani tudi *topološki deskriptorji*) so numerični parametri grafa, ki karakterizirajo topologijo grafa in jih običajno uvrščamo med grafske invariante (kar pomeni, da ima topološki indeks dveh izomorfnih grafov zmeraj enako vrednost). Preprosto povedano torej topološki indeks vsakemu grafu iz neke družine grafov priredi določeno realno število, ki nam nekaj pove o sami strukturi oziroma topologiji grafa ali omrežja. Topološki indeksi, ki so definirani na določenih družinah molekularnih grafov in za katere je dokazano, da dobro napovedujejo vsaj eno lastnost molekul, se imenujejo tudi *molekularni deskriptorji*.

Eden izmed najstarejših in najbolj znanih molekularnih deskriptorjev je *Wienerjev indeks*, ki ga je vpeljal H. Wiener leta 1947 [1]. Za poljuben povezan graf G je definiran kot

$$W(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} d_G(u,v),$$

kjer $d_G(u,v)$ označuje razdaljo (število povezav na najkrajši poti) med vozliščema u in v grafa G . Wienerjev indeks je torej definiran kot vsota razdalj med vsemi neurejenimi pari vozlišč danega grafa. V že omenjenem članku [1] je Wiener pokazal, da lahko ta indeks uporabimo pri napovedovanju vrelišč alkanov, kasneje pa so odkrili še več drugih aplikacij Wienerjevega indeksa.

Izkaže se, da lahko Wienerjev indeks za poljubno drevo T izračunamo tudi s pomočjo vsote po vseh povezavah na naslednji način:

$$W(T) = \sum_{e=uv \in E(T)} n_u(e|T)n_v(e|T), \quad (4.1)$$

kjer $n_u(e|T)$ označuje število vozlišč grafa T , ki so bližje vozlišču u kot vozlišču v , podobno pa $n_v(e|T)$ označuje število vozlišč grafa T , ki so bližje vozlišču v kot vozlišču u . Zapisana enakost sledi iz dejstva, da je število (najkrajših) poti v drevesu T , ki potekajo preko povezave $e = uv$, enako $n_u(e|T)n_v(e|T)$, saj v drevesu med poljubnima vozliščema obstaja natanko ena pot.

Na podlagi omenjenega dejstva je I. Gutman [2] vpeljal *szegedski indeks* poljubnega povezanega grafa G na naslednji način:

$$Sz(G) = \sum_{e=uv \in E(G)} n_u(e|G)n_v(e|G).$$

Tudi za ta indeks so ugotovili dobre korelacije z raznimi fizikalno-kemijskimi lastnostmi molekul.

Nazadnje omenimo še *mostarski indeks*, ki je za povezan graf G definiran kot

$$Mo(G) = \sum_{e=uv \in E(G)} |n_u(e|G) - n_v(e|G)|.$$

Ta indeks so vpeljali leta 2018 [13], uporablja pa se kot mera za perifernost v molekularnih grafih in omrežjih.

V tem poglavju smo predstavili le tri pomembne molekularne deskriptorje, omeniti pa je treba, da obstaja še veliko drugih. Več o topoloških indeksih in molekularnih deskriptorjih najdemo na primer v knjigi [7].

5 Topološki indeksi uteženih grafov

Naj bo G poljuben graf. Funkcija $w : V(G) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ je *utež na vozliščih* grafa G , funkcija $w' : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ pa *utež na povezavah* grafa G . Urejeni par (G, w) je *vozliščno-uteženi graf*, trojica (G, w, w') pa *vozliščno-povezavno-uteženi graf*.

Wienerjev indeks vozliščno-uteženega povezanega grafa (G, w) je definiran s formulo [14]

$$W(G, w) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} w(u)w(v)d_G(u, v).$$

Naj bo G graf in $e = uv$ njegova povezava. Vpeljimo naslednji oznaki:

$$N_u(e|G) = \{x \in V(G) \mid d_G(x, u) < d_G(x, v)\},$$

$$N_v(e|G) = \{x \in V(G) \mid d_G(x, v) < d_G(x, u)\}.$$

Zapisani oznaki torej predstavljata množici vozlišč grafa G , ki ležijo bližje vozlišču u kot v oziroma bližje vozlišču v kot u . Zato velja $n_u(e|G) = |N_u(e|G)|$ in $n_v(e|G) = |N_v(e|G)|$. Za povezavo $e = uv \in E(G)$, ki pripada vozliščno-uteženemu grafu (G, w) , definiramo tudi oznaki za vsoto vseh uteži vozlišč, ki ležijo v eni izmed zgornjih množic:

$$n_u(e|(G, w)) = \sum_{x \in N_u(e|G)} w(x), \quad n_v(e|(G, w)) = \sum_{x \in N_v(e|G)} w(x).$$

Sedaj lahko definiramo še szegedski indeks in mostarski indeks povezanega in uteženega grafa (G, w, w') kot

$$Sz(G, w, w') = \sum_{e=uv \in E(G)} w'(e)n_u(e|(G, w))n_v(e|(G, w)),$$

$$Mo(G, w, w') = \sum_{e=uv \in E(G)} w'(e) |n_u(e|(G, w)) - n_v(e|(G, w))|.$$

Opazimo naslednje: če je $w(u) = 1$ za vse $u \in V(G)$ in $w'(e) = 1$ za vse $e \in E(G)$, potem je $W(G, w) = W(G)$, $Sz(G, w, w') = Sz(G)$ in $Mo(G, w, w') = Mo(G)$.

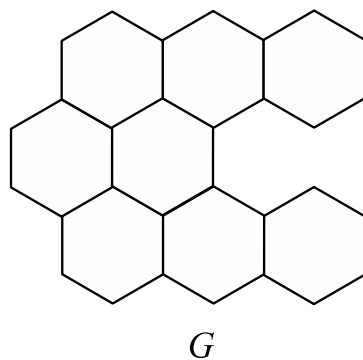
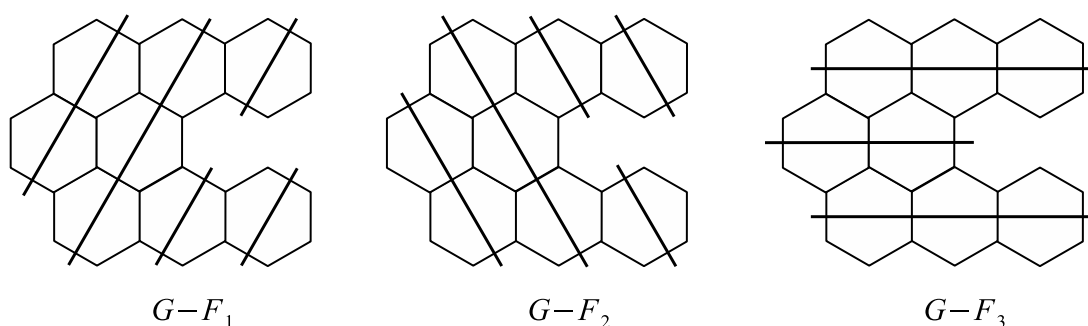
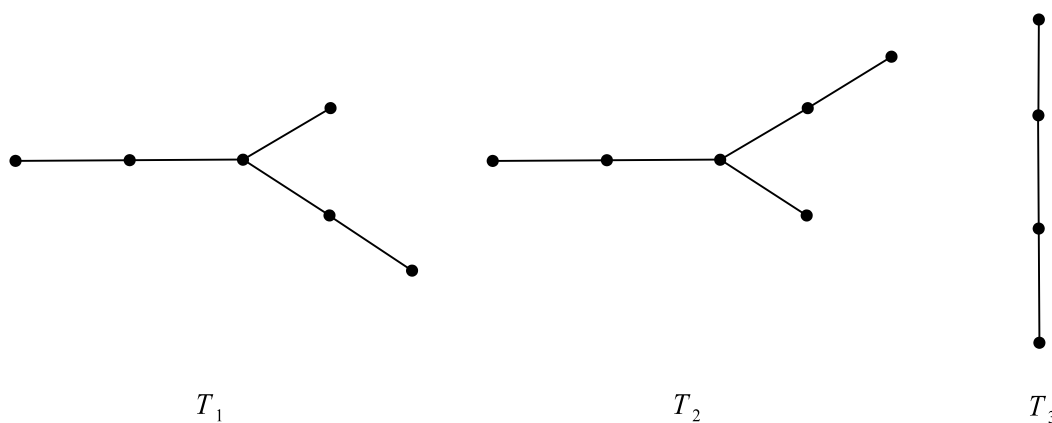
6 Uteženi kvocientni grafi

Naj bo G graf in $F \subseteq E(G)$ podmnožica njegovih povezav. *Kvocientni graf* G/F je definiran kot graf, katerega vozlišča so vse povezane komponente grafa $G - F$ (to je graf, ki ga dobimo iz G tako, da odstranimo povezave iz F); pri tem sta dve takšni komponenti X in Y sosednji v G/F natanko tedaj, ko je neko vozlišče iz X v grafu G sosednje z nekim vozliščem iz Y .

Za poljuben benzenoidni graf G označimo s F_1 , F_2 in F_3 množice povezav, ki imajo enako smer (so vzporedne). Potem se izkaže, da so za vsak $i \in \{1, 2, 3\}$ povezane komponente grafa $G - F_i$ poti, kvocientni grafi G/F_i pa so drevesa, ki jih bomo označevali tudi kot T_i (več informacij najdemo v [15]).

Naj bo G benzenoidni graf, ki je prikazan na sliki 3. Povezave v množicah F_1 , F_2 in F_3 so prikazane na sliki 4, ustrezna kvocientna drevesa T_1 , T_2 in T_3 pa na sliki 5.

Poljubna povezava benzenoidnega grafa, ki leži na zunanem (neskončnem) licu, se imenuje *mejna povezava*. *Elementarni prerez* C benzenoidnega grafa G je daljica, ki se

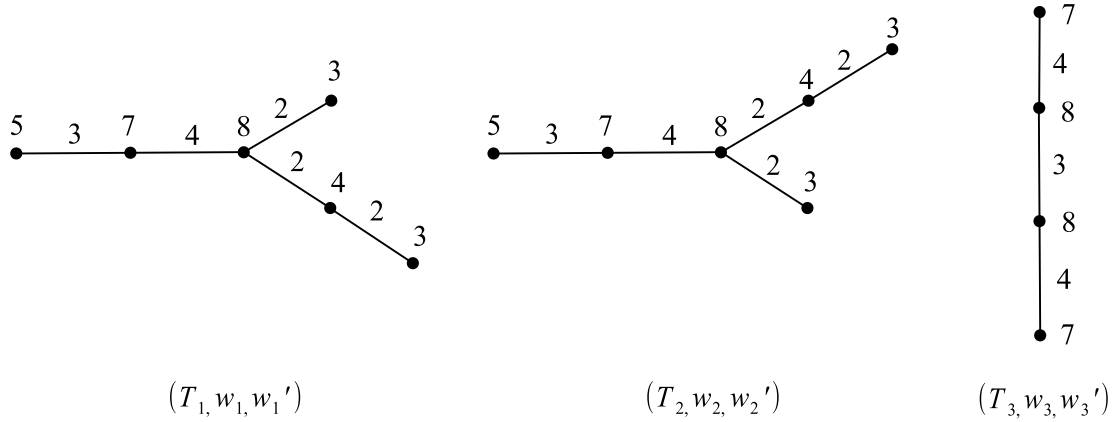
Slika 3: Benzenoidni graf G .Slika 4: Grafi $G - F_1$, $G - F_2$ in $G - F_3$.Slika 5: Kvocientna drevesa za benzenoidni graf G .

začne v središču neke mejne povezave grafa G in poteka pravokotno na to povezavo do prve naslednje mejne povezave (zaradi preglednosti na slikah elementarne prereze rišemo kot daljice, ki gredo nekoliko preko mejnih povezav). V nadaljevanju bomo isto ime in oznako uporabljali tudi za množico vseh povezav grafa G , ki jih seka dani elementarni prerez. Opazimo, da so v množici F_i vse povezave grafa G , ki ležijo na vzporednih elementarnih prerezih (glej sliko 4). Prav tako velja, da vsak elementarni prerez, ki vsebuje povezave iz množice F_i , predstavlja natanko eno povezavo v kvocientnem drevesu T_i , $i \in \{1, 2, 3\}$. Na tem mestu opomnimo, da ime za metodo prerezov izhaja prav iz elementarnih prerezov.

Za izpeljavo metode prerezov v naslednjem poglavju bomo potrebovali še utežena kvocientna drevesa (T_i, w_i, w'_i) , $i \in \{1, 2, 3\}$, ki jih definiramo na naslednji način:

- za $X \in V(T_i)$ naj bo $w_i(X)$ število vozlišč v povezani komponenti X grafa $G - F_i$,
- za $E = XY \in E(T_i)$ naj bo $w'_i(E)$ število povezav med komponentama X in Y (torej število povezav v elementarnem prerezu, ki predstavlja povezavo E).

Utežena kvocientna drevesa za benzenoidni graf G iz slike 3 so prikazana na sliki 6.



Slika 6: Utežena kvocientna drevesa za benzenoidni graf G .

7 Metoda prerezov za benzenoidne grafe

V tem poglavju bo predstavljena metoda prerezov za Wienerjev, szegedski in mostarski indeks benzenoidnih grafov. Za poljuben benzenoidni graf naj bodo utežena kvocientna drevesa definirana tako kot v razdelku 6. Da lahko zapišemo prvi izrek, potrebujemo še eno dodatno definicijo in lemo.

Naj bo G benzenoidni graf in $i \in \{1, 2, 3\}$. Za poljubno vozlišče $u \in V(G)$ bomo z oznako $\alpha_i(u)$ označili tisto povezano komponento grafa $G - F_i$, ki vsebuje u . Izkazuje se, da za razdalje v benzenoidnem grafu velja naslednji zanimiv rezultat [15].

Lema 7.1. [15] Naj bo G benzenoidni graf in $u, v \in V(G)$ njegovi vozlišči. Potem je

$$d_G(u, v) = d_{T_1}(\alpha_1(u), \alpha_1(v)) + d_{T_2}(\alpha_2(u), \alpha_2(v)) + d_{T_3}(\alpha_3(u), \alpha_3(v)).$$

Dokaz. Opisali bomo le skico dokaza iz članka [15]. Naj bo P poljubna najkrajša pot v grafu G med vozliščema u in v . Vsaka povezava poti P pripada enemu elementarnemu prerezu grafa G . Ker je P najkrajša pot, dve različni povezavi poti P ne moreta pripadati istemu elementarnemu prerezu. Povezave na poti P torej pripadajo natanko tistim elementarnim prerezom, ki ločijo vozlišči u in v (torej taki elementarni prerezi, katerih odstranitev povzroči, da sta u in v v različnih povezanih komponentah). Očitno je, da premik po eni povezavi poti P , ki pripada množici F_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, predstavlja premik čez en elementarni prerez in zato tudi premik po eni povezavi v kvocientnem drevesu T_i . Opazimo tudi, da $d_{T_i}(\alpha_i(u), \alpha_i(v))$ predstavlja število elementarnih prerezov povezav iz F_i , ki ločijo vozlišči u in v . Zato je število povezav na poti P enako vsoti $d_{T_1}(\alpha_1(u), \alpha_1(v)) + d_{T_2}(\alpha_2(u), \alpha_2(v)) + d_{T_3}(\alpha_3(u), \alpha_3(v))$, s čimer je dokaz zaključen. $\square$

Z uporabo navedene leme lahko zapišemo metodo prerezov, ki omogoča izračun Wienerjevega indeksa poljubnega benzenoidnega grafa.

Izrek 7.2. [14] Naj bo G benzenoidni graf. Potem je

$$W(G) = W(T_1, w_1) + W(T_2, w_2) + W(T_3, w_3).$$

Dokaz. Predstavili bomo dokaz iz članka [14]. Z upoštevanjem definicije Wienerjevega indeksa in leme 7.1 dobimo

$$\begin{aligned} W(G) &= \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} d_G(u,v) \\ &= \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} \sum_{i=1}^3 d_{T_i}(\alpha_i(u), \alpha_i(v)) \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} d_{T_i}(\alpha_i(u), \alpha_i(v)) \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{\{X,Y\} \subseteq V(T_i)} (|V(X)| \cdot |V(Y)|) d_{T_i}(X,Y) \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{\{X,Y\} \subseteq V(T_i)} w_i(X) w_i(Y) d_{T_i}(X,Y) \\ &= \sum_{i=1}^3 W(T_i, w_i). \end{aligned}$$

Pri četrti enakosti smo upoštevali, da za $X, Y \in V(T_i)$ in poljubna $u_1, u_2 \in V(X)$ ter poljubna $v_1, v_2 \in V(Y)$ velja $d_{T_i}(X, Y) = d_{T_i}(\alpha_i(u_1), \alpha_i(v_1)) = d_{T_i}(\alpha_i(u_2), \alpha_i(v_2))$. Dokaz je torej zaključen. $\square$

Opazimo torej, da lahko Wienerjev indeks benzenoidnega grafa izračunamo kot vsoto Wienerjevih indeksov uteženih kvocientnih dreves. Za lažji izračun Wienerjevega indeksa poljubnega vozliščno-uteženega drevesa (T, w) lahko uporabimo naslednjo formulo:

$$W(T, w) = \sum_{e=uv \in E(T)} n_u(e|(T, w)) n_v(e|(T, w)). \quad (7.1)$$

Zapisana formula je bila v bolj splošni obliki dokazana v članku [9] in predstavlja naravno posplošitev formule (4.1).

Za izpeljavo metode prerezov za szegedski in mostarski indeks bomo potrebovali naslednjo lemo.

Lema 7.3. Naj bo G benzenoidni graf in $e = uv \in E(G)$. Recimo, da je $e \in F_i$ za $i \in \{1, 2, 3\}$. Naj bo še $U = \alpha_i(u)$ in $V = \alpha_i(v)$. Potem je $E = UV \in E(T_i)$ povezava v kvocientnem drevesu in velja

$$n_u(e|G) = n_U(E|(T_i, w_i))$$

in

$$n_v(e|G) = n_V(E|(T_i, w_i)).$$

Dokaz. Naj bo C elementarni prerez, ki vsebuje povezavo $e \in F_i$. Očitno sta u in v v različnih povezanih komponentah grafa $G - F_i$, zato je $E = UV$ povezava grafa T_i , ki ustreza elementarnemu prerezu C . Najprej opazimo, da so vozlišča grafa G , ki ležijo bližje vozlišču u kot v , ravno tista vozlišča, ki pripadajo vozliščem grafa T_i (torej povezanim komponentam grafa $G - F_i$), ki so bližje U kot V . Po drugi strani tudi število $n_U(E|(T_i, w_i))$ predstavlja število vseh tistih vozlišč grafa G , ki pripadajo vozliščem grafa T_i , ki so bližje U kot V . Zato je $n_u(e|G) = |N_u(e|G)| = n_U(E|(T_i, w_i))$. Podobno utemeljimo tudi, da je $n_v(e|G) = |N_v(e|G)| = n_V(E|(T_i, w_i))$. $\square$

Sledi zadnji rezultat tega razdelka, ki omogoča učinkovito računanje szegedskega in mostarskega indeksa poljubnega benzenoidnega grafa.

Izrek 7.4. [14, 4] Naj bo G benzenoidni graf. Potem je

$$\begin{aligned} Sz(G) &= Sz(T_1, w_1, w'_1) + Sz(T_2, w_2, w'_2) + Sz(T_3, w_3, w'_3), \\ Mo(G) &= Mo(T_1, w_1, w'_1) + Mo(T_2, w_2, w'_2) + Mo(T_3, w_3, w'_3). \end{aligned}$$

Dokaz. Opazimo, da je $E(G) = F_1 \cup F_2 \cup F_3$. Če z oznako $\mathcal{C}_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$, označimo množico vseh elementarnih prerezov, ki vsebujejo povezave iz F_i , potem očitno velja

$$F_i = \bigcup_{C \in \mathcal{C}_i} C.$$

Po drugi strani vsak elementarni prerez $C \in \mathcal{C}_i$ predstavlja natanko eno povezavo $E = UV$ kvocientnega drevesa T_i . Če množico vseh povezav grafa G , ki pripadajo elementarnemu prerezu C , označimo kar z E , potem velja

$$F_i = \bigcup_{E=UV \in E(T_i)} E.$$

Z uporabo te formule in leme 7.3 lahko zapišemo

$$\begin{aligned} Sz(G) &= \sum_{e=uv \in E(G)} n_u(e|G) n_v(e|G) \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{e=uv \in F_i} n_u(e|G) n_v(e|G) \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{E=UV \in E(T_i)} \sum_{e=uv \in E} n_u(e|G) n_v(e|G) \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{E=UV \in E(T_i)} \sum_{e=uv \in E} n_U(E|(T_i, w_i)) n_V(E|(T_i, w_i)) \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{E=UV \in E(T_i)} |E| n_U(E|(T_i, w_i)) n_V(E|(T_i, w_i)) \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{E=UV \in E(T_i)} w'_i(E) n_U(E|(T_i, w_i)) n_V(E|(T_i, w_i)) \\ &= \sum_{i=1}^3 Sz(T_i, w_i, w'_i). \end{aligned}$$

Zelo podobno sklepamo tudi v primeru mostarskega indeksa:

$$\begin{aligned}
 Mo(G) &= \sum_{e=uv \in E(G)} |n_u(e|G) - n_v(e|G)| \\
 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{e=uv \in F_i} |n_u(e|G) - n_v(e|G)| \\
 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{E=UV \in E(T_i)} \sum_{e=uv \in E} |n_u(e|G) - n_v(e|G)| \\
 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{E=UV \in E(T_i)} \sum_{e=uv \in E} |n_U(E|(T_i, w_i)) - n_V(E|(T_i, w_i))| \\
 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{E=UV \in E(T_i)} w'_i(E) |n_U(E|(T_i, w_i)) - n_V(E|(T_i, w_i))| \\
 &= \sum_{i=1}^3 Mo(T_i, w_i, w'_i).
 \end{aligned}$$

S tem je dokaz zaključen. □

Ob koncu razdelka bomo s pomočjo izrekov 7.2 in 7.4 izračunali vse tri topološke indekse za benzenoidni graf G iz slike 3. Pri izračunu bomo uporabili utežena kvocientna drevesa, prikazana na sliki 6.

Z uporabo formule (7.1) izračunajmo Wienerjeve indekse posameznih dreves:

$$\begin{aligned}
 W(T_1, w_1) &= 5 \cdot 25 + 12 \cdot 18 + 27 \cdot 3 + 23 \cdot 7 + 27 \cdot 3 = 664, \\
 W(T_2, w_2) &= W(T_1, w_1) = 664, \\
 W(T_3, w_3) &= 7 \cdot 23 + 15 \cdot 15 + 23 \cdot 7 = 547.
 \end{aligned}$$

Po izreku 7.2 torej dobimo

$$W(G) = 664 + 664 + 547 = 1875.$$

Podobno računamo tudi za szegedski indeks

$$\begin{aligned}
 Sz(T_1, w_1, w'_1) &= 3 \cdot 5 \cdot 25 + 4 \cdot 12 \cdot 18 + 2 \cdot 27 \cdot 3 \\
 &\quad + 2 \cdot 23 \cdot 7 + 2 \cdot 27 \cdot 3 = 1885, \\
 Sz(T_2, w_2, w'_2) &= Sz(T_1, w_1, w'_1) = 1885, \\
 Sz(T_3, w_3, w'_3) &= 4 \cdot 7 \cdot 23 + 3 \cdot 15 \cdot 15 + 4 \cdot 23 \cdot 7 = 1963
 \end{aligned}$$

in za mostarski indeks

$$\begin{aligned}
 Mo(T_1, w_1, w'_1) &= 3 \cdot |5 - 25| + 4 \cdot |12 - 18| + 2 \cdot |27 - 3| \\
 &\quad + 2 \cdot |23 - 7| + 2 \cdot |27 - 3| = 212, \\
 Mo(T_2, w_2, w'_2) &= Mo(T_1, w_1, w'_1) = 212, \\
 Mo(T_3, w_3, w'_3) &= 4 \cdot |7 - 23| + 3 \cdot |15 - 15| + 4 \cdot |23 - 7| = 128.
 \end{aligned}$$

Po izreku 7.4 končno dobimo

$$\begin{aligned} Sz(G) &= 1885 + 1885 + 1963 = 5733, \\ Mo(G) &= 212 + 212 + 128 = 552. \end{aligned}$$

8 Posplošena metoda prerezov

V zadnjih letih je bila metoda prerezov, ki smo jo predstavili v razdelku 7, bistveno posplošena, tako da jo lahko uporabimo tudi za druge povezane grafe. Za prikaz take posplošitve bomo potrebovali binarno relacijo Θ na množici povezav nekega povezanega grafa. Omenjena relacija se imenuje tudi *Djoković-Winklerjeva relacija*.

Naj bo G povezan graf. Povezavi $e = xy$ in $f = ab$ grafa G sta v relaciji Θ , $e\Theta f$, če velja $d_G(x, a) + d_G(y, b) \neq d_G(x, b) + d_G(y, a)$. Izkazuje se, da je Θ refleksivna in simetrična relacija, ki ni nujno tranzitivna [6]. Tranzitivno zaprtje relacije Θ (to je najmanjša relacija, ki vsebuje Θ) označimo kot Θ^* . Očitno je potem relacija Θ^* ekvivalenčna relacija, zato razbije množico $E(G)$ na ekvivalenčne razrede, ki jih imenujemo Θ^* -razredi in označimo kot $E_1, \dots, E_k$. Množica $\{E_1, \dots, E_k\}$ se imenuje Θ^* -razbitje množice $E(G)$.

Razbitje $\{F_1, \dots, F_r\}$ množice $E(G)$ je *bolj grobo* kot Θ^* -razbitje, če je vsaka množica F_i , $i \in \{1, \dots, r\}$, unija enega ali več Θ^* -razredov. Kvocientni graf G/F_i bomo na kratko označili kot G_i in na enak način kot v razdelku 6 definiramo uteži w_i ter w'_i .

Zapišemo lahko naslednji izrek, ki ga ne bomo dokazali.

Izrek 8.1. [11, 16, 4] Naj bo G povezan graf in $\{F_1, \dots, F_r\}$ razbitje množice $E(G)$, ki je bolj grobo kot Θ^* -razbitje. Potem velja

$$\begin{aligned} W(G) &= \sum_{i=1}^r W(G_i, w_i), \\ Sz(G) &= \sum_{i=1}^r Sz(G_i, w_i, w'_i), \\ Mo(G) &= \sum_{i=1}^r Mo(G_i, w_i, w'_i). \end{aligned}$$

Opazimo, da v benzenoidnem grafu vsak elementarni prerez ustreza natanko enemu Θ -razredu in da je $\Theta = \Theta^*$ (v benzenoidnih grafih je torej relacija Θ tranzitivna), zato Θ -razbitje sestavljajo vsi elementarni prerezi [6]. Razbitje $\{F_1, F_2, F_3\}$, kjer so F_1, F_2, F_3 množice vzporednih povezav, je torej bolj grobo kot Θ -razbitje. Sledi, da sta izreka 7.2 in 7.4 zgolj posebna primera izreka 8.1.

Literatura

- [1] H. Wiener, Structural determination of paraffin boiling points, *J. Amer. Chem. Soc.* **69** (1947), 17–20.
- [2] I. Gutman, A formula for the Wiener number of trees and its extension to graphs containing cycles, *Graph Theory Notes N. Y.* **27** (1994), 9–15.
- [3] I. Gutman, S. J. Cyvin, *Introduction to the Theory of Benzenoid Hydrocarbons*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

- [4] N. Tratnik, Computing the Mostar index in networks with applications to molecular graphs, *Iranian J. Math. Chem.* **12** (2021), 1–18.
- [5] N. Tratnik, P. Žigert Pleteršek, Kemijska teorija grafov in resonančni grafi, *Dianoia* **2** (2018), 12–34.
- [6] R. Hammack, W. Imrich, S. Klavžar, *Handbook of Product Graphs, Second Edition*, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2011.
- [7] R. Todeschini, V. Consonni, *Handbook of Molecular Descriptors*, Wiley-VCH, Weinheim, 2000.
- [8] R. J. Wilson, J. J. Watkins (prevod: Janez Žerovnik), *Uvod v teorijo grafov*, DMFA, Ljubljana, 1997.
- [9] S. Klavžar, I. Gutman, Wiener number of vertex-weighted graphs and a chemical application, *Discrete Appl. Math.* **80** (1997), 73–81.
- [10] S. Klavžar, M. J. Nadjafi-Arani, Cut method: update on recent developments and equivalence of independent approaches, *Curr. Org. Chem.* **19** (2015), 348–358.
- [11] S. Klavžar, M. J. Nadjafi-Arani, Wiener index in weighted graphs via unification of Θ^* -classes, *European J. Combin.* **36** (2014), 71–76.
- [12] S. Wagner, H. Wang, *Introduction to Chemical Graph Theory*, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2019.
- [13] T. Došlić, I. Martinjak, R. Škrekovski, S. Tipurić Spužević, I. Zubac, Mostar index, *J. Math. Chem.* **56** (2018), 2995–3013.
- [14] V. Chepoi, S. Klavžar, The Wiener index and the Szeged index of benzenoid systems in linear time, *J. Chem. Inf. Comput. Sci.* **37** (1997), 752–755.
- [15] V. Chepoi, On distances in benzenoid systems, *J. Chem. Inf. Comput. Sci.* **36** (1996), 1169–1172.
- [16] X. Li, M. Zhang, A Note on the computation of revised (edge-)Szeged index in terms of canonical isometric embedding, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **81** (2019), 149–162.

Periodni sistem lihih sestavljenih števil in rešeta za iskanje praštevil

Periodic system of odd composite numbers and sieves for searching primes

Srečko Lampret

Pohorska cesta 110, 2367 Vuzenica, Slovenija

Povzetek

V članku predstavljamo *periodni sistem lihih sestavljenih števil* in nekaj lastnosti tega sistema ter predstavimo tri algoritme za iskanje praštevil, nakar še izboljšavo oz. hitrejšo različico enega od teh. V nadaljevanju obravnavamo še *enolični periodni sistem lihih sestavljenih števil* in novo različico algoritma za iskanje praštevil, ki ima to lastnost, da vsako liho sestavljeno število črta le enkrat. Bistvo članka pa leži v samem periodnem sistemu, ki postane osnova za številne algoritme za iskanje praštevil, vključno z dobro znanimi, predstavljeni pa so tudi nekateri novi in unikatni algoritmi.

Ključne besede: liha sestavljena števila, periodni sistem lihih sestavljenih števil, enolični periodni sistem lihih sestavljenih števil, praštevila, algoritmi za iskanje praštevil, praštevilska rešeta

Abstract

In this article we present the *periodic system of odd composite numbers* and some characteristics of this system. We also present three algorithms for searching primes together with an improved version of one among them. We continue by presenting the *exact periodic system of odd composite numbers* and a new version of the algorithm for searching primes with the property of crossing out each odd composite number only once. The main essence of this article, however, is in the periodic system itself which becomes the basis for many elementary algorithms for searching primes, including some well-known, and also some new and unique are presented.

Key words: odd composite numbers, periodic system of odd composite numbers, exact periodic system of odd composite numbers, primes, algorithms for searching primes, prime sieves

1 Uvod

Praštevila so naravna oz. pozitivna cela števila, ki imajo natanko dva delitelja, namreč število 1 in samega sebe (prvih nekaj praštevil: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ...). S svojo skrivnostnostjo so vedno navduševala matematike, a zaradi svoje zapletenosti mnoge spravila tudi na rob obupa.

Številni matematiki se že stoletja trudijo poiskati vzorec, po katerem bi si praštevila sledila. Popolnega in natančnega vzorca ni uspelo odkriti še nikomur. Morda je ta preveč zapleten ali pa morda takega vzorca sploh ni. Vzorec, ki pravilno opisuje približni delež praštevil znotraj vseh naravnih števil, je koncem 18. stoletja odkril francoski matematik Legendre in kmalu za njim neodvisno od njega še nemški matematik Gauss, dokazuje pa so

kasneje podali drugi matematiki. Vpeljali so porazdelitveno funkcijo $\Pi(n)$, ki opisuje število praštevil do poljubnega naravnega števila n , izrek o porazdelitvi praštevil pa pove, da za »dovolj velike« n velja: $\Pi(n) \approx \frac{n}{\ln(n)}$, pri čemer $\ln(n)$ pomeni naravni logaritem števila n . Več o tem najdete v [2].

Posebna skupina naravnih števil so t. i. sestavljena števila. Poleg 1 in samega sebe imajo ta še vsaj en drug naravni delitelj, skupaj torej vsaj tri. Razen števila 1 so vsa naravna števila bodisi praštevila bodisi sestavljena števila. Pri sestavljenih številih pa je najbolj zanimivo to (od tod tudi takšno ime), da so v resnici sestavljena, in sicer iz praštevil. Vsako sestavljeno število se da namreč zapisati kot zmnožek samih praštevil, npr. $4 = 2^2$, $6 = 2 \cdot 3$, $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, $10 = 2 \cdot 5$, $12 = 2^2 \cdot 3$, $14 = 2 \cdot 7$, $15 = 3 \cdot 5$, $16 = 2^4$, $18 = 2 \cdot 3^2$, $20 = 2^2 \cdot 5$, ...

Če napravimo primerjavo s kemijo, bi na praštevila lahko gledali kot na atome, na sestavljena števila pa kot na molekule, ki so sestavljene iz teh atomov, torej iz praštevil. Kot so atomi gradniki vseh molekul, so tudi praštevila gradniki vseh sestavljenih števil. Zato so praštevila tudi tako zelo pomembna, saj so razen števila 1 vsa naravna števila bodisi praštevila bodisi zgrajena iz dveh ali več praštevil.

Če so sestavljena števila zmnožek »velikih« praštevil, je zelo težko hitro ugotoviti, iz katerih praštevil so sestavljena, kar se v praksi s pridom izkorišča pri kodiranju. Tudi varnost naših bančnih računov često temelji na »kompliciranosti« praštevil in zaenkrat ne kaže, da je ta varnost ogrožena.

Ruskemu kemiku Dimitriju Mendelejevu je leta 1869 uspelo vse takrat znane kemijske elemente oz. atome zložiti v tabelo, pri čemer si elementi po stolpcih in vrsticah pravilno sledijo po nekem vzorcu glede na lastnosti elementov [1]. To tabelo poznamo pod imenom periodni sistem elementov. Zastavimo si lahko vprašanje, ali bi bilo kaj podobnega mogoče napraviti tudi za sestavljena števila, če že za praštevila doslej še nihče ni odkril natančnega vzorca.

Razen 2, ki je edino sodo praštevilo, so vsa nadaljnja soda števila sestavljena, saj so poleg z 1 in s samim seboj deljiva vsaj še s številom 2 in imajo tako najmanj tri delitelje. Tu je vzorec zelo preprost, saj je vsako nadaljnje število za 2 večje od predhodnega: 4, 6, 8, 10, 12, ... Pri lihih sestavljenih številih tako preprostega vzorca ni, saj so nekatera liha števila praštevila, druga sestavljena (9, 15, 21, 25, 27, 33, 35, 39, 45, 49, 51, ...). Kljub temu boste v tem članku spoznali, da je odgovor na prejšnje vprašanje pritrdilen. Predstavljamo vam namreč »**periodni sistem lihih sestavljenih števil**«. Ta postane podlaga za številna praštevilska rešeta oz. algoritme za iskanje praštevil, vključno z nekaterimi dobro znanimi, v tem članku pa predstavljamo tudi nekaj unikatnih in še nikjer objavljenih.

2 Periodni sistem lihih sestavljenih števil

Naj $\mathbf{N}$ označuje množico vseh naravnih števil. Definirajmo zgoraj trikotno tabelo naravnih števil na naslednji način:

- za vsak $k \in \mathbf{N}$ naj bo diagonalni element v k -ti vrstici oblike $(2k + 1)2$;
- za vsak $k \in \mathbf{N}$ naj nadaljnji elementi v tej vrstici tvorijo aritmetično zaporedje z diferenco $4k + 2$.

Naj bo za vsaka $k, i \in \mathbf{N}$, pri čemer $i \geq k$, $a_{k,i}$ element v k -ti vrstici in v i -tem stolpcu te

tabele. Potem velja:

$$a_{k,i} = (2k + 1)^2 + (i - k)(4k + 2)$$

Dobimo naslednjo tabelo 1:

	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4	i = 5	i = 6	i = 7	i = 8	i = 9	i = 10	i = 11	...
k = 1	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	69	...
k = 2		25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	...
k = 3			49	63	77	91	105	119	133	147	161	...
k = 4				81	99	117	135	153	171	189	207	...
k = 5					121	143	165	187	209	231	253	...
k = 6						169	195	221	247	273	299	...
k = 7							225	255	285	315	345	...
k = 8								289	323	357	391	...
k = 9									361	399	437	...
k = 10										441	483	...
k = 11											529	...
.												
:												
.												

Razmislimo, da je vsako število v tabeli 1 liho in sestavljeno.

Če je $a_{k,i}$ poljuben element te tabele v k -ti vrstici in v i -tem stolpcu za neki naravni števili k in i , kjer je $i \geq k$, potem velja: $a_{k,i} = (2k + 1)^2 + (i - k)(4k + 2) = (2k + 1)^2 + (i - k)2(2k + 1) = (2k + 1)(2k + 1 + 2(i - k)) = (2k + 1)(2k + 1 + 2i - 2k) = (2k + 1)(2i + 1)$. Ker je $2k + 1 > 1$ in $2i + 1 > 1$, je število sestavljeno, kot zmnožek dveh lihih števil pa tudi liho.

Velja pa tudi obratno. Vzemimo poljubno liho sestavljeno število, ki je kot liho nujno oblike $2m + 1$ za neko naravno število m , in pokažimo, da se nahaja v tabeli 1. Ker je sestavljeno, ga je mogoče napisati kot zmnožek dveh od 1 različnih naravnih števil, ki pa sta tudi lihi, saj bi $2m + 1$ sicer bilo sodo. Torej obstajata $u, v \in \mathbf{N}$, tako da je $2m + 1 = (2u + 1)(2v + 1)$, pri čemer naj bo $u \geq v$. Torej velja: $2m + 1 = (2v + 1)(2u + 1) = (2v + 1)(2v + 1 + 2u - 2v) = (2v + 1)(2v + 1 + 2(u - v)) = (2v + 1)(2v + 1) + (2v + 1)2(u - v) = (2v + 1)^2 + (4v + 2)(u - v) = a_{v,u}$. To je število, ki je v tabeli 1 v v -ti vrstici in u -tem stolpcu.

Tako smo dokazali naslednji izrek:

Izrek 2.1: V tabeli 1 so natanko vsa liha sestavljena števila.

Tabelo 1 bomo odslej imenovali **periodni sistem lihih sestavljenih števil**.

Videli smo že, da je vsak element periodnega sistema lihih sestavljenih števil oblike

$a_{k,i} = (2k + 1)(2i + 1)$, kar za vsa naravna števila i , pri čemer je $i \geq k$, pomeni natanko vse lihe večkratnike števila $2k + 1$, ki so večji ali enaki od $(2k + 1)^2$. Tako smo dokazali posledico izreka 2.1:

Posledica 2.2: Za poljuben $k \in \mathbb{N}$ k -ta vrstica vsebuje natanko vse lihe večkratnike števila $2k + 1$ od vključno $(2k + 1)^2$ dalje.

3 Nekatere lastnosti periodnega sistema lihih sestavljenih števil

Trditev 3.1: Naj bo i poljubno naravno število, večje od 1. Potem i -ti stolpec periodnega sistema lihih sestavljenih števil predstavlja niz v aritmetičnem zaporedju z diferenco $4i + 2$.

Dokaz: Naj bosta $a_{k,i}$ in $a_{k+1,i}$ dva zaporedna elementa i -tega stolpca za poljubna $k, i \in \mathbb{N}$ in $i \geq k + 1$. Potem velja:

$$\begin{aligned} a_{k+1,i} - a_{k,i} &= \\ &= (2(k+1) + 1)^2 + (i - (k+1))(4(k+1) + 2) - ((2k+1)^2 + (i-k)(4k+2)) = \\ &= (2k+3)^2 + (i-k-1)(4k+6) - (2k+1)^2 - (i-k)(4k+2) = \\ &= 4k^2 + 12k + 9 + 4ki + 6i - 4k^2 - 6k - 4k - 6 - 4k^2 - 4k - 1 - 4ki - 2i + 4k^2 + 2k = \\ &= 4i + 2 \end{aligned}$$

□

Vpeljimo naslednja zaporedja, ki predstavljajo diagonale našega periodnega sistema:

$$(d_1) = (a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3}, a_{4,4}, \dots) = (9, 25, 49, 81, \dots)$$

$$(d_2) = (a_{1,2}, a_{2,3}, a_{3,4}, a_{4,5}, \dots) = (15, 35, 63, 99, \dots)$$

$$(d_3) = (a_{1,3}, a_{2,4}, a_{3,5}, a_{4,6}, \dots) = (21, 45, 77, 117, \dots) \text{ itd., skratka:}$$

$(d_j) = (a_{1,j}, a_{2,j+1}, a_{3,j+2}, a_{4,j+3}, \dots)$ za poljubno naravno število j . Torej je k -ti člen diagonale (d_j) enak $a_{k,k+j-1}$.

V zaporedju $(d_1) = (9, 25, 49, 81, \dots)$ si po vrsti oglejmo razlike med dvema sosednjima členoma. Dobimo novo zaporedje: $(16, 24, 32, \dots)$. Vidimo, da je zaporedje razlik aritmetično z diferenco 8. Takšnim zaporedjem, kjer zaporedje razlik med členi tvori aritmetično zaporedje, pravimo **hiperaritmetična zaporedja**.

Oglejmo si zaporedje razlik poljubne diagonale (d_j) za neko naravno število j . Naj bodo $a_1 = a_{k,k+j-1}$, $a_2 = a_{k+1,k+j}$ in $a_3 = a_{k+2,k+j+1}$ trije poljubni zaporedni členi zaporedja (d_j) za neko naravno število k . Potem velja:

$$\begin{aligned} (a_3 - a_2) - (a_2 - a_1) &= a_3 - 2a_2 + a_1 = a_{k+2,k+j+1} - 2a_{k+1,k+j} + a_{k,k+j-1} = \\ &= (2(k+2) + 1)(2(k+j+1) + 1) - 2(2(k+1) + 1)(2(k+j) + 1) + (2k+1)(2(k+j-1) + 1) = \\ &= (2k+5)(2k+2j+3) - 2(2k+3)(2k+2j+1) + (2k+1)(2k+2j-1) = \\ &= 4k^2 + 4kj + 6k + 10k + 10j + 15 - 8k^2 - 8kj - 4k - 12k - 12j - 6 + 4k^2 \\ &+ 4kj - 2k + 2k + 2j - 1 = 8 \end{aligned}$$

Dokazali smo naslednjo trditev:

Trditev 3.2: Za vsako naravno število j je zaporedje (d_j) hiperaritmetično z diferenco 8.

Vpeljimo še nize oz. končna zaporedja, ki predstavljajo nasprotne diagonale v periodnem sistemu lihih sestavljenih števil:

$$(\delta_1) = (a_{1,5}, a_{2,4}, a_{3,3}) = (33, 45, 49)$$

$$(\delta_2) = (a_{1,6}, a_{2,5}, a_{3,4}) = (39, 55, 63)$$

$$(\delta_3) = (a_{1,7}, a_{2,6}, a_{3,5}, a_{4,4}) = (45, 65, 77, 81) \text{ itd.,}$$

za poljubno naravno število j pa naj bo k -ti element niza (δ_j) enak $a_{k,j-k+5}$ za vsako naravno število k , pri čemer mora seveda veljati, da je $k \leq j - k + 5$ in od tod $k \leq \frac{j+5}{2}$.

Brez dokaza, ki ga prepuščamo bralcu, razmislek pa je podoben kot pri sklepu prejšnje trditve, zapišimo še naslednjo trditev:

Trditev 3.3: Za vsako naravno število j je (δ_j) niz v hiperaritmetičnem zaporedju z diferenco -8 .

4 1. rešeto za iskanje praštevil

Sklicujoč se na izrek 2.1, ki nam zagotavlja njegovo pravilnost, opišimo algoritem za iskanje praštevil:

Opomba 4.1: Algoritem izvajamo tako dolgo, dokler je $(2k + 1)^2 \leq n$ za neko izbrano naravno število n , do katerega želimo poiskati vsa praštevila. Iz te neenakosti dobimo:

$$k \leq \frac{\sqrt{n}-1}{2}$$

Opomba 4.2: Na koncu algoritem doda število 2 kot edino sodo praštevilo.

ALGORITEM 1

- izberi $n \in \mathbb{N}, n \geq 9$
- napravi seznam lihih naravnih števil med 3 in n
- $k = 1$
- dokler $k \leq \frac{\sqrt{n}-1}{2}$ ponavljaj
 - $i = (2k + 1)^2$
 - dokler $i \leq n$ ponavljaj
 - prečrtaj i
 - $i := i + 4k + 2$
 - konec
 - $k := k + 1$
- konec
- dodaj 2

Primer 4.3: S pomočjo tega algoritma poiščimo vsa praštevila do 200.

$$n = 200$$

Napravimo seznam lihih števil med 3 in 200:

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99, 101, 103, 105, 107, 109, 111, 113, 115, 117, 119, 121, 123, 125, 127, 129, 131, 133, 135, 137, 139, 141, 143, 145, 147, 149, 151, 153, 155, 157, 159, 161, 163, 165, 167, 169, 171, 173, 175, 177, 179, 181, 183, 185, 187, 189, 191, 193, 195, 197, 199.

$$\frac{\sqrt{200}-1}{2} \doteq 6,57; \text{ torej je treba algoritem zaganjati do vključno } k = 6.$$

$$k = 1:$$

$i = 3^2 = 9$; prečrtamo 9 in i povečujemo za 6 tako dolgo, da presežemo vrednost 200, pri tem pa sproti prečrtamo vsak na novo povečani i . Ostanejo števila:

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 55, 59, 61, 65, 67, 71, 73, 77, 79, 83, 85, 89, 91, 95, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 115, 119, 121, 125, 127, 131, 133, 137, 139, 143, 145, 149, 151, 155, 157, 161, 163, 167, 169, 173, 175, 179, 181, 185, 187, 191, 193, 197, 199.

$$k = 2:$$

$i = 5^2 = 25$; prečrtamo 25 in i povečujemo za 10 tako dolgo, da presežemo vrednost 200, pri tem pa sproti prečrtamo vsak na novo povečani i , ki še ni prečrtan. Ostanejo števila:

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 77, 79, 83, 89, 91, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 119, 121, 127, 131, 133, 137, 139, 143, 149, 151, 157, 161, 163, 167, 169, 173, 179, 181, 187, 191, 193, 197, 199.

$$k = 3:$$

$i = 7^2 = 49$; prečrtamo 49 in i povečujemo za 14 tako dolgo, da presežemo vrednost 200, pri tem pa sproti prečrtamo vsak na novo povečani i , ki še ni prečrtan. Ostanejo števila:

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 121, 127, 131, 137, 139, 143, 149, 151, 157, 163, 167, 169, 173, 179, 181, 187, 191, 193, 197, 199.

$$k = 4:$$

$i = 9^2 = 81$; to število je že prečrtano, nakar i povečujemo za 18 tako dolgo, da presežemo vrednost 200, pri tem pa sproti prečrtamo vsak na novo povečani i , ki še ni prečrtan. Ker so vsa števila že bila prečrtana od prej, ostanejo enaka števila:

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53,
 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101,
 103, 107, 109, 113, 121, 127, 131, 137, 139,
 143, 149, 151, 157, 163, 167, 169, 173,
 179, 181, 187, 191, 193, 197, 199.

$k = 5$:

$i = 11^2 = 121$; prečrtamo 121 in i povečujemo za 22 tako dolgo, da presežemo vrednost 200, pri tem pa sproti prečrtamo vsak na novo povečani i , ki še ni prečrtan. Ostanejo števila:

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53,
 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101,
 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139,
 149, 151, 157, 163, 167, 169, 173,
 179, 181, 191, 193, 197, 199.

$k = 6$:

$i = 13^2 = 169$; prečrtamo 169 in i povečujemo za 26 tako dolgo, da presežemo vrednost 200, pri tem pa sproti prečrtamo vsak na novo povečani i , ki še ni prečrtan, a opazimo, da v nadaljevanju pravzaprav ne prečrtamo ničesar več. Ostanejo števila:

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53,
 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101,
 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139,
 149, 151, 157, 163, 167, 173,
 179, 181, 191, 193, 197, 199.

K temu seznamu dodamo število 2 kot edino sodo praštevilo in dobimo natanko vsa praštevila, manjša ali enaka 200:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97,
 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191,
 193, 197, 199.

Opomba 4.4: Algoritem 1, predstavljen v tem poglavju, deluje podobno kot t. i. Sundaramovo rešeto [3], ki ga je leta 1934 odkril indijski matematik S. P. Sundaram. V 7. poglavju tega članka bomo pokazali, kako se da to rešeto izboljšati, da deluje hitreje.

5 2. rešeto za iskanje praštevil

Prej predstavljeno rešeto črta vsa liha sestavljena števila iz periodnega sistema po vrsticah od zgoraj navzdol. Sedaj predstavimo rešeto za iskanje praštevil, ki črta vsa liha sestavljena števila iz periodnega sistema po stolpcih od leve proti desni.

Iz uvodne definicije tabele 1 ni težko ugotoviti, da elementi v prvi vrstici tvorijo aritmetično zaporedje s prvim členom 9 in z diferenco 6. Splošni člen tega zaporedja je torej enak: $a_{1,i} = 9 + (i - 1) 6 = 9 + 6i - 6 = 6i + 3$.

Algoritem izvajamo, dokler elementi v prvi vrstici ne presežejo vrednosti izbranega

števila n , do katerega želimo poiskati praštevila. Torej mora veljati $6i + 3 \leq n$, od tod pa sledi:

$$i \leq \frac{n-3}{6}.$$

Pravilnost tega algoritma nam poleg izreka 2.1 zagotavlja tudi trditev 3.1, ki pravi, da v vsakem stolpcu za vsako od 1 večje naravno število i elementi periodnega sistema tvorijo niz v aritmetičnem zaporedju z diferenco $4i + 2$. Tudi ta algoritem na koncu doda število 2 kot edino sodo praštevilo.

ALGORITEM 2:

- izberi $n \in \mathbb{N}, n \geq 9$
- napravi seznam lihih naravnih števil med 3 in n
- $i = 1$
- dokler $i \leq \frac{n-3}{6}$ ponavljaj
 - $x = 6i + 3$
 - dokler $x \leq (2i + 1)^2$ in $x \leq n$ ponavljaj
 - prečrtaj x
 - $x := x + 4i + 2$
 - $i := i + 1$
- dodaj 2

Primer 5.1: S pomočjo algoritma 2 poiščimo vsa praštevila do $n = 200$.

Napravimo seznam lihih števil 3, 5, 7, ..., 199.

$$\frac{200-3}{6} = 32 \frac{5}{6} \Rightarrow \text{algoritem izvajamo do vključno } i = 32$$

$i = 1 \Rightarrow x = 9$; algoritem prečrta število 9

$i = 2 \Rightarrow x = 15$; algoritem prečrta števili 15 in 25

$i = 3 \Rightarrow x = 21$; algoritem prečrta števila 21, 35 in 49

•
•
•

$i = 32 \Rightarrow x = 195$; algoritem prečrta število 195

Dodamo 2 in dobimo seznam vseh praštevil do 200.

6 3. rešeto za iskanje praštevil

Sedaj predstavimo rešeto za iskanje praštevil, ki črta vsa liha sestavljena števila iz periodnega sistema po diagonalah (d_j) za poljubno naravno število j , kot smo jih definirali v poglavju 3.

Trditev 3.2 nam pove, da za vsak $j \in \mathbb{N}$ elementi diagonale (d_j) tvorijo hiperaritmetično zaporedje z diferenco 8. Za poljubno naravno število j je k -ti člen zaporedja diagonale (d_j) enak

$a_{k, k+j-1}$ za vsak naravni k . Oglejmo si razliko poljubnih dveh zaporednih členov

poljubne

diagonale (d_j) :

$$\begin{aligned} a_{k+1, k+j} - a_{k, k+j-1} &= (2(k+1) + 1)^2 + \\ &+ (k+j - (k+1)) (4(k+1) + 2) - (2k+1)^2 - (k+j-1-k) (4k+2) = \\ &= (2k+3)^2 + (j-1) (4k+6) - (2k+1)^2 - (j-1) (4k+2) = \\ &= 4k^2 + 12k + 9 + 4kj + 6j - 4k - 6 - 4k^2 - 4k - 1 - 4kj - 2j + 4k + 2 = \\ &= 8k + 4j + 4 \end{aligned}$$

Na osnovi te lastnosti predstavimo algoritem 3 za iskanje praštevil, ki na koncu prav tako doda število 2 kot edino sodo praštevilo. Tudi tu upoštevamo dejstvo, da prvi členi vseh diagonal tvorijo aritmetično zaporedje s splošnim členom $6j + 3$ za vsak naravni j , saj so enaki členom prve vrstice periodnega sistema.

ALGORITEM 3:

- izberi $n \in \mathbb{N}, n \geq 9$
- napravi seznam lihih naravnih števil med 3 in n
- $j = 1$
- $x = 9$
- dokler $x \leq n$ ponavljaaj
 - $k = 1$
 - dokler $x \leq n$ ponavljaaj
 - prečrtaj x
 - $x := x + 8k + 4j + 4$
 - $k := k + 1$
 - konec
 - $j := j + 1$
 - $x := 6j + 3$
- konec
- dodaj 2

Primer 6.1: S pomočjo algoritma 3 poiščimo vsa praštevila do $n = 200$.

Napravimo seznam lihih števil 3, 5, 7, ..., 199.

$j = 1, x = 9$; vsak naslednji x je od prejšnjega večji za $8k + 8$, pri čemer je v prvem koraku $k = 1$, v vsakem nadaljnjem koraku pa je k za 1 večji od prejšnjega. Algoritem tako prečrta števila: 9, 25, 49, 81, 121, 169.

$j = 2 \Rightarrow x = 15$; vsak naslednji x je od prejšnjega večji za $8k + 12$, pri čemer je v prvem koraku $k = 1$, v vsakem nadaljnjem koraku pa je k za 1 večji od prejšnjega. Algoritem tako prečrta števila: 15, 35, 63, 99, 143, 195.

$j = 3 \Rightarrow x = 21$; vsak naslednji x je od prejšnjega večji za $8k + 16$, pri čemer je v prvem koraku $k = 1$, v vsakem nadaljnjem koraku pa je k za 1 večji od prejšnjega. Algoritem tako prečrta števila: 21, 45, 77, 117, 165.

.

$j = 32 \Rightarrow x = 195$; vsak naslednji x bi bil od prejšnjega večji za $8k + 132$, pri čemer bi bil v prvem koraku $k = 1$, v vsakem nadaljnjem koraku pa bi bil k za 1 večji od prejšnjega, a že takoj presežemo $n = 200$. Algoritem v tem koraku tako prečrta le število 195 (ki je sicer prečrtano že od prej).

$j = 33 \Rightarrow x = 201$; ker x preseže 200, se algoritem ustavi.

Dodamo 2 in dobimo seznam vseh praštevil do 200.

7 Izboljšava 1. rešeta za iskanje praštevil

Na primeru 4.3 smo pri $k = 4$ opazili, da so vsa števila, ki bi jih sicer prečrtali v tem koraku, že prečrtana, tako da na novo v tem koraku ne prečrtamo nič. To ni naključje; za $k = 4$ je namreč izraz $2k + 1$ enak 9, ki pa ni praštevilo in je večkratnik praštevila 3. Za $k = 1$ je izraz $2k + 1$ enak 3 in v tem koraku smo prečrtali že vsa števila, ki bi jih prečrtali za $k = 4$.

Pravilnost delovanja izboljšane različice 1. rešeta nam jamči naslednji izrek, ki pove, da če je za poljubno naravno število k element $2k + 1$ že prečrtan (je torej sestavljeno število), potem algoritma za ta k ni treba izvajati, saj so za vsako nenegativno celo število m elementi oblike $(2k + 1)^2 + m(4k + 2)$ že prečrtani.

Izrek 7.1: Naj bo $k \in \mathbf{N}$ poljuben. Če obstajata $l \in \mathbf{N}$ in $t \in \mathbf{N}_0$, tako da je $2k + 1 = (2l + 1)^2 + t(4l + 2)$, potem za vsak $m \in \mathbf{N}_0$ obstaja $u \in \mathbf{N}_0$, tako da velja: $(2k + 1)^2 + m(4k + 2) = (2l + 1)^2 + u(4l + 2)$.

Opomba 7.2: Oznaka $\mathbf{N}$ pomeni množico vseh naravnih števil, oznaka $\mathbf{N}_0$ pa množico nenegativnih celih števil, torej naravna števila skupaj s številom 0.

Dokaz: Naj bosta $k \in \mathbf{N}$ in $m \in \mathbf{N}_0$ poljubna in naj obstajata $l \in \mathbf{N}$ in $t \in \mathbf{N}_0$, tako da je $2k + 1 = (2l + 1)^2 + t(4l + 2)$.

Potem velja:

$$\begin{aligned}
 (2k + 1)^2 + m(4k + 2) &= ((2l + 1)^2 + t(4l + 2))^2 + 2m(2k + 1) = \\
 &= ((2l + 1)^2 + 2t(2l + 1))^2 + 2m((2l + 1)^2 + t(4l + 2)) = \\
 &= ((2l + 1)(2l + 1 + 2t))^2 + 2m((2l + 1)^2 + 2t(2l + 1)) = \\
 &= (2l + 1)^2(2l + 2t + 1)^2 + 2m(2l + 1)(2l + 1 + 2t) = \\
 &= (2l + 1)^2(4l^2 + 4t^2 + 1 + 8lt + 4l + 4t) + (4l + 2)m(2l + 2t + 1) = \\
 &= (2l + 1)^2 + (2l + 1)^2(4l^2 + 4t^2 + 8lt + 4l + 4t) + (4l + 2)(2ml + 2mt + m) = \\
 &= (2l + 1)^2 + (4l + 2)(2l + 1)(2l^2 + 2t^2 + 4lt + 2l + 2t) + (4l + 2)(2ml + 2mt + m) = \\
 &= (2l + 1)^2 + (4l + 2)((2l + 1)(2l^2 + 2t^2 + 4lt + 2l + 2t) + 2ml + 2mt + m) = \\
 &= (2l + 1)^2 + u(4l + 2) \text{ za } u = (2l + 1)(2l^2 + 2t^2 + 4lt + 2l + 2t) + 2ml + 2mt + m
 \end{aligned}$$

□

Sklicujoč se na izrek 2.1 in izrek 7.1 predstavimo algoritem 4, ki je izboljšana različica vtem članku predstavljenega algoritma 1:

ALGORITEM 4:

- izberi $n \in \mathbb{N}, n \geq 9$
- napravi seznam lihih naravnih števil med 3 in n
- $k = 1$
- dokler $k \leq \frac{\sqrt{n}-1}{2}$ ponavljaj
 - če $2k + 1$ ni prečrtan, potem
 - $i = (2k + 1)^2$
 - dokler $i \leq n$ ponavljaj
 - prečrtaj i
 - $i := i + 4k + 2$
 - konec
 - $k := k + 1$
 - sicer
 - $k := k + 1$
- konec
- dodaj 2

Primer 7.3: Če želimo s tem algoritmom poiskati vsa praštevila do $n = 2000$ (na koncu dodamo praštevilo 2 kot edino sodo praštevilo), potem napravimo seznam vseh lihih naravnih števil od vključno 3 do vključno 1999.

$\frac{\sqrt{2000}-1}{2} \doteq 21,86$; to pomeni, da je algoritem treba izvajati za vsa naravna števila k do vključno 21.

Ta izboljšana različica algoritma 1 v tem konkretnem primeru preskoči naslednje k -je: 4, 7, 10, 12, 13, 16, 17, 19. To so natanko tisti k -ji, za katere izraz $2k + 1$ ni praštevilo.

Opomba 7.4: Bolj ko povečujemo vrednosti za n oz. daljši, kot želimo imeti seznam praštevil, bolj se delež praštevil glede na delež vseh naravnih števil zmanjšuje. To nam

nenazadnje pove tudi izrek o porazdelitvi praštevil [2], ki je omenjen v uvodnem poglavju tega članka. Z večanjem vrednosti za n torej ta izboljšana različica v tem članku predstavljenega 1. rešeta preskoči vedno večji delež k -jev, kar je časovno v primerjavi s prvotno različico za velike n precejšnja prednost.

Opomba 7.5: Ker algoritem 1, predstavljen v 3. poglavju tega članka, deluje podobno kot Sundaramovo rešeto [3] in je algoritem 4 izboljšava algoritma 1, je zaradi tega algoritem 4 izboljšava Sundaramovega rešeta. Ker pa algoritem 4 izpušča vse vrstice za tista naravna števila, za katere izraz $2k + 1$ ni praštevilo, algoritem 4 hkrati deluje podobno kot ena od znanih izboljšav Eratostenovega rešeta [4], kjer za vsako naravno število k , za katero je $2k + 1$ praštevilo, algoritma ni treba izvajati za tiste večkratnike števila $2k + 1$, ki so manjši od $(2k + 1)^2$. Poleg tega pri algoritmu 4 že na samem začetku izločimo vsa soda števila, kar je njegova dodatna prednost. Na uvodoma predstavljeni periodni sistem lihih sestavljenih števil lahko zato gledamo kot na osnovo za številne elementarne algoritme za iskanje praštevil, vključno z dobro znanima Eratostenovim [4] in Sundaramovim rešetom [3].

8 Enolični periodni sistem lihih sestavljenih števil

Na podlagi izreka 7.1 lahko v uvodoma predstavljenem periodnem sistemu lihih sestavljenih števil izpustimo vrstice pri tistih naravnih številih k , za katere $2k + 1$ ni praštevilo, pa bo tabela še vedno vsebovala vsa liha sestavljena števila. Tabela pa lahko še bolj prečistimo, in sicer v tem smislu, da iz posameznih vrstic odstranimo števila, ki se že pojavijo v eni od predhodnih vrstic, pri tem pa še vedno zagotovimo, da bo vsebovala vsa liha sestavljena števila. Za to potrebujemo naslednji izrek, ki nam bo razkril še eno pomembno lastnost našega periodnega sistema lihih sestavljenih števil.

Izrek 8.1: Za poljubna naravna števila k, l in j , pri čemer je $l < k$ in $j \geq \frac{k-l}{2l+1}$, velja sledeče:

$$a_{l, (2k+1)j+k} = a_{k, (2l+1)j+l}.$$

Dokaz: Naj bodo k, l in j poljubna naravna števila, za katere velja $l < k$ in $j \geq \frac{k-l}{2l+1}$.

Ker so za poljubna $k, i \in \mathbf{N}$ elementi $a_{k,i}$ v tabeli definirani le za $i \geq k$, najprej preverimo korektnost indeksov:

Ker je $k > l$, je zato $k - l > 0$.

Ker je $k > l$, je zato $2k + 1 > 2l + 1$ in zaradi tega velja neenakost: $\frac{2k+1}{2l+1} > 1$.

Zaradi teh dveh neenakosti in predpostavke $j \geq \frac{k-l}{2l+1}$ velja:

$$(2k+1)j+k \geq \frac{(2k+1)(k-l)}{2l+1} + k > (k-l) + k > k > l$$

Obenem, ker je $j \geq \frac{k-l}{2l+1}$, je zato $(2l+1)j \geq k-l$, torej je $(2l+1)j+l \geq k$.

Iz razmisleka, s katerim smo dokazali izrek 2.1, sledi, da je za poljubna $k, i \in \mathbf{N}, i \geq k$, poljubni člen periodnega sistema lihih sestavljenih števil enak: $a_{k,i} = (2k + 1)(2i + 1)$.

$$\begin{aligned} a_{l,(2k+1)j+k} &= (2l+1)(2((2k+1)j+k+1)) = (2l+1)(2(2kj+j+k)+1) = \\ &= (2l+1)(4kj+2j+2k+1) = (2l+1)(2j(2k+1)+2k+1) = \\ &= (2l+1)((2k+1)(2j+1)) = (2k+1)((2l+1)(2j+1)) = \\ &= (2k+1)(4lj+2j+2l+1) = (2k+1)(2((2l+1)j+l)+1) = \\ &= a_{k,(2l+1)j+l} \end{aligned}$$

□

Uvodoma predstavljeno tabelo 1, ki smo jo poimenovali periodni sistem lihih sestavljenih števil, lahko na podlagi izreka 7.1 in izreka 8.1 ustrezno prečistimo, oba izreka pa nam jamčita, da bo še vedno vsebovala vsa liha sestavljena števila.

Na podlagi izreka 7.1 lahko v celoti izpustimo nekatere vrstice, in sicer vrstice pri tistih k -jih, za katere $2k + 1$ ni praštevilo (vrstice za $k = 4, 7, 10, 12, 13, 16, 17, 19, \dots$).

Na podlagi izreka 8.1 lahko razen prvih nekaj elementov izpuščamo posamezne stolpce; odvisno 2. vrstice dalje lahko izpustimo stolpce za $i = 3j + 1$ za vsak naravni j , od vključno 3. vrstice dalje lahko izpustimo stolpce za $i = 5j + 2$ za vsak naravni j , od vključno 5. vrstice dalje lahko izpustimo stolpce za $i = 7j + 3$ za vsak naravni j in tako naprej.

Dobimo tabelo 2, ki izgleda takole:

	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10	i=11	i=12	i=13	i=14	i=15	i=16	i=17	i=18...
k=1	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	69	75	81	87	93	99	105	111 ...
k=2		25	35		55	65		85	95		115	125		145	155		175	185 ...
k=3			49		77	91		119	133		161			203	217			259 ...
k=4																		
k=5					121	143		187	209		253			319	341			407 ...
k=6						169		221	247		299			377	403			481 ...
k=7																		
k=8							289	323		391				493	527			629 ...
k=9								361		437				551	589			703 ...
k=10																		
k=11										529				667	713			851 ...
k=12																		
k=13																		
k=14														841	899			1073 ...
k=15															961			1147 ...
k=16																		
k=17																		
k=18																		1369 ...
.																		
.																		
.																		

Tabelo 2 poimenujmo *enolični periodni sistem lihih sestavljenih števil*.

Opomba 8.2: Upravičenost besede »enolični« pojasnimo v zaključnem poglavju tega članka.

9 Nadgradnja 4. rešeta za iskanje praštevil

Na podlagi izreka 8.1 lahko v tem članku predstavljeno 4. rešeto za iskanje praštevil, ki temelji na izreku 2.1 in izreku 7.1 in je izboljšana različica 1. rešeta za iskanje praštevil, še

dodatno nadgradimo. Pred predstavitvijo le-tega pa podajmo še tri opombe.

Opomba 9.1: Če so $k, l, j \in \mathbf{N}$ in $l < k$ in smo v l -ti vrstici črtali element na $(2k + 1)j + k$ -tem mestu, potem v k -ti vrstici ni treba več črtati elementa, ki je na $(2l + 1)j + l$ -tem mestu. Če smo algoritem izvedli za l -to vrstico, lahko za vsak $k > l$ (torej v vseh nadaljnjih vrsticah) izpustimo vse stolpce z indeksom $(2l + 1)j + l$, pri čemer je $(2l + 1)j + l \geq k$. To pomeni, da v vsaki nadaljnji k -ti vrstici zadošča odstranjevanje le sestavljena števila oblike $(2k + 1)^2 + (m - k)(4k + 2)$, pri čemer število m ne pripada množici $\{(2l + 1)j + l; j \in \mathbf{N}\}$.

Opomba 9.2: Ko na nekem koraku za nek konkretni $k \in \mathbf{N}$ črtamo števila oblike $i + (m - k)(4k + 2)$, mora biti $m - k \geq 0$, saj je $i = (2k + 1)^2$ diagonalni element, levo od njega pa elementov v tabeli ni. Torej je $m \geq k$. Iz množice N_k (ki nastopa v algoritmu, ki sledi) zato na tem koraku odstranimo tudi vse elemente, ki so manjši ali enaki $k - 1$. Ker pri predhodnem koraku iz množice N_l odstranimo vse elemente, ki so manjši ali enaki $l - 1$, je treba na vsakem koraku odstraniti celoštevilске elemente iz množice $\{l, \dots, k - 1\}$.

Opomba 9.3: Obenem lahko na nekem koraku za nek konkretni $k \in \mathbf{N}$ iz množice N_k odstranimo tudi vsa števila m , za katere izraz $i + (m - k)(4k + 2)$, pri čemer je $i = (2k + 1)^2$, preseže izbrano naravno število n , do katerega želimo s tem algoritmom poiskati vsa praštevila.

$$\begin{aligned} \text{Torej: } (2k + 1)^2 + (m - k)(4k + 2) &> n \\ (m - k)(4k + 2) &> n - (2k + 1)^2 \\ m - k &> \frac{n - (2k + 1)^2}{4k + 2} \end{aligned}$$

$$m > \frac{n - (2k + 1)^2}{4k + 2} + k = \frac{n - 4k^2 - 4k - 1 + 4k^2 + 2k}{4k + 2} = \frac{n - 2k - 1}{4k + 2}$$

Zato lahko na tem koraku iz množice N_k odstranimo tudi vsa števila m iz množice

$\{j \in \mathbf{N}; j > \left\lceil \frac{n - 2k - 1}{4k + 2} \right\rceil\}$, kjer $\lceil n \rceil$ pomeni navzdol zaokroženo celoštevilsko vrednost števila n .

Na podlagi izreka 2.1, izreka 7.1 in izreka 8.1 ter opomb 9.1, 9.2 in 9.3 sedaj predstavimo algoritem 5, ki je nadgradnja algoritma 4, ki je izboljšava algoritma 1:

ALGORITEM 5:

- izberi $n \in \mathbf{N}, n \geq 9$
- napravi seznam lihih števil med 3 in n
- $N_1 = \{1, \dots, \lfloor \frac{n-3}{6} \rfloor\}$
- prečrtaj vsa števila oblike $9 + 6(j-1)$ za vse $j \in N_1$
- $l = 1$
- $k = 2$
- dokler $k \leq \frac{\sqrt{n}-1}{2}$ ponavljaj
 - če $2k + 1$ ni prečrtan potem
 - $i = (2k + 1)^2$
 - $N_k := N_l \setminus (\{(2l + 1)j + l; j \in N\} \cup \{l, \dots, k-1\} \cup \{j \in N; j > \lfloor \frac{n-2k-1}{4k+2} \rfloor\})$
 - prečrtaj vsa števila oblike $i + (m-k)(4k+2)$ za vse $m \in N_k$
 - $l := k$
 - $k := k + 1$
konec
 - sicer
 - $k := k + 1$
konec
- dodaj število 2

Opomba 9.4: Na koncu dodamo še število 2 kot edino sodo praštevilo in dobimo popoln seznam praštevil do zelenega naravnega števila n .

Primer 9.5: S pomočjo tega algoritma poiščimo vsa praštevila do $n = 200$.

Napravimo seznam lihih števil 3, 5, 7, ..., 199.

$$\lfloor \frac{200-3}{6} \rfloor = 32$$

$$N_1 = \{1, 2, 3, \dots, 32\}$$

Prečrtamo vsa števila oblike $9 + 6(j-1)$ za vse $j \in N_1$.

Črtamo torej števila:

9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63, 69, 75, 81, 87, 93, 99, 105, 111, 117, 123, 129, 135, 141, 147, 153, 159, 165, 171, 177, 183, 189, 195.

$$l = 1, k = 2$$

$$\frac{\sqrt{200}-1}{2} \doteq 6,57; \text{ torej je treba algoritem zaganjati do vključno } k = 6.$$

$$\begin{aligned} \text{Ker } 2 \cdot 2 + 1 = 5 \text{ ni prečrtano, sledi } i &= 5^2 = 25 \\ N_2 &= N_1 \setminus (\{3j + 1; j \in \mathbf{N}\} \cup \{1\} \cup \{20, 21, \dots\}) = \\ &= \{2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 18\} \end{aligned}$$

Črtamo vsa števila oblike $25 + 10(m - 2)$ za vse $m \in N_2$.

Črtamo torej števila: 25, 35, 55, 65, 85, 95, 115, 125, 145, 155, 175, 185.

$$l = 2, k = 3$$

$$\text{Ker } 2 \cdot 3 + 1 = 7 \text{ ni prečrtano, sledi } i = 7^2 = 49$$

$$N_3 = N_2 \setminus (\{5j + 2; j \in \mathbf{N}\} \cup \{2\} \cup \{14, 15, \dots\}) = \{3, 5, 6, 8, 9, 11\}$$

Črtamo vsa števila oblike $49 + 14(m - 3)$ za vse $m \in N_3$.

Črtamo torej števila: 49, 77, 91, 119, 133, 161.

$$l = 3, k = 4$$

Ker je $2 \cdot 4 + 1 = 9$ že prečrtano, k povečamo za 1.

$$l = 3, k = 5$$

$$\text{Ker } 2 \cdot 5 + 1 = 11 \text{ ni prečrtano, sledi } i = 11^2 = 121$$

$$N_5 = N_3 \setminus (\{7j + 3; j \in \mathbf{N}\} \cup \{3, 4\} \cup \{9, 10, \dots\}) = \{5, 6, 8\}$$

Črtamo vsa števila oblike $121 + 22(m - 5)$ za vse $m \in N_5$.

Črtamo torej števila: 121, 143, 187.

$$l = 5, k = 6$$

$$\text{Ker } 2 \cdot 6 + 1 = 13 \text{ ni prečrtano, sledi } i = 13^2 = 169$$

$$N_6 = N_5 \setminus (\{11j + 5; j \in \mathbf{N}\} \cup \{5\} \cup \{8, 9, \dots\}) = \{6\}$$

Črtamo le še element oblike $169 + 26(m - 6)$ za $m = 6$, torej število 169.

Dodamo število 2 in dobimo natanko seznam vseh praštevil do 200:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199.

10 Dokaz enoličnosti v enoličnem periodnem sistemu lihih sestavljenih števil

Potem ko smo iz periodnega sistema lihih sestavljenih števil na podlagi izreka 7.1 odstranili nekatere vrstice in na podlagi izreka 8.1 nekatere stolpce od neke vrstice dalje, smo tako prečiščeno tabelo poimenovali »enolični periodni sistem lihih sestavljenih števil«. Takšno poimenovanje je upravičeno, saj v resnici velja, da se vsako liho sestavljeno število v njem pojavi natanko enkrat.

V izreku 10.2 bomo pokazali, da sta po odstranitvi vrstic za tiste $k \in \mathbf{N}$, za katere $2k + 1$ ni praštevilo, dva elementa iz tabele enaka zgolj v primeru, ko velja lastnost, ki jo opisuje izrek 8.1. Pred tem pa formulirajmo in dokažimo še pomožno trditev oz. lemo 10.1, ki jo bomo uporabili v dokazu izreka 10.2. Bralci, ki niste matematiki, lahko dokaz »preskočite«.

Lema 10.1: Naj bosta $a_{m,n}$ in $a_{m,p}$ dva elementa periodnega sistema lihih sestavljenih števil iz iste vrstice za neke $m, n, p \in \mathbb{N}$, pri čemer je $n \geq m$ in $p \geq m$. Potem velja: $a_{m,n} = a_{m,p} + (4m + 2)(n - p)$.

Dokaz: Naj bodo $m, n, p \in \mathbb{N}$ poljubni in naj velja: $n \geq m$ ter $p \geq m$.
 $a_{m,n} - a_{m,p} = (2m + 1)^2 + (n - m)(4m + 2) - (2m + 1)^2 - (p - m)(4m + 2) =$
 $= (4m + 2)(n - m - (p - m)) = (4m + 2)(n - m - p + m) = (4m + 2)(n - p)$
 Torej velja: $a_{m,n} = a_{m,p} + (4m + 2)(n - p)$.

□

Izrek 10.2: Naj bosta $a_{k,i} = a_{l,m}$ dva enaka elementa periodnega sistema lihih sestavljenih števil za neka naravna števila k, i, l in m , pri čemer je $i \geq k$ in $m \geq l$ in naj velja, da sta $2k + 1$ in $2l + 1$ praštevili ter $k > l$. Potem obstaja tako naravno število j , da velja: $i = (2l + 1)j + l$ in $m = (2k + 1)j + k$.

Dokaz: Naj bodo k, i, l in m taka naravna števila, da velja: $i \geq k, m \geq l, a_{k,i} = a_{l,m}$, $2k + 1$ in $2l + 1$ sta praštevili, $k > l$.

Iz razmisleka, s katerim smo dokazali izrek 2.1, sledi, da je za poljubna $k, i \in \mathbb{N}, i \geq k$, poljubni člen periodnega sistema lihih sestavljenih števil enak: $a_{k,i} = (2k + 1)(2i + 1)$.

Ker je $a_{k,i} = a_{l,m}$, sledi: $(2k + 1)(2i + 1) = (2l + 1)(2m + 1)$.

Torej: $2l + 1 \mid (2k + 1)(2i + 1)$.

Ker je $2l + 1$ praštevilo, sledi: $2l + 1 \mid 2k + 1$ ali $2l + 1 \mid 2i + 1$.

Če $2l + 1 \mid 2k + 1$, pomeni, da je $2l + 1 = 2k + 1$, ker sta $2k + 1$ in $2l + 1$ obe praštevili.

Torej: $k = l$, kar je protislovje, saj je $k > l$.

Zato velja: $2l + 1 \mid 2i + 1$, iz česar sledi: $2i + 1 \equiv 0 \pmod{(2l + 1)}$.

Naj bo $v \in \mathbb{N}_0$ ostanek pri deljenju števila $i - 1$ s številom $2l + 1$.

Torej velja: $i - 1 - v \equiv 0 \pmod{(2l + 1)}$.

Vemo že: $(2k + 1)(2i + 1) = (2l + 1)(2m + 1)$. Če iz te enakosti izrazimo m , dobimo:

$$m = \frac{2ki + k + i - l}{2l + 1} = \frac{2ki + k + v + i - l - v}{2l + 1}.$$

Torej: $2ki + k + v + i - l - v \equiv 0 \pmod{(2l + 1)}$.

Ker velja tudi: $i - l - v \equiv 0 \pmod{(2l + 1)}$,

iz obojega sledi: $2ki + k + v \equiv 0 \pmod{(2l + 1)}$.

Torej: $k(2i + 1) + v \equiv 0 \pmod{(2l + 1)}$; ker je $2i + 1 \equiv 0 \pmod{(2l + 1)}$,

to pomeni: $k(2i + 1) \equiv 0 \pmod{(2l + 1)}$.

Iz obeh kongruenc sledi: $v \equiv 0 \pmod{(2l + 1)}$.

Ker tudi $i - l - v \equiv 0 \pmod{(2l + 1)}$, je potemtakem $i - l \equiv 0 \pmod{(2l + 1)}$.
 Iz tega sledi, da obstaja $j \in \mathbb{N}$, tako da velja: $i = (2l + 1)j + l$.

Če upoštevamo izrek 7.1 in lemo 9.1, vidimo, da je
 $a_{k,i} = a_{k,(2l+1)j+l} = a_{l,(2k+1)j+k} = a_{l,m} + (4l + 2)((2k + 1)j + k - m)$.

Ker je $a_{k,i} = a_{l,m}$, sledi: $(4l + 2)((2k + 1)j + k - m) = 0$

Če je $4l + 2 = 0$, je $l = -\frac{1}{2}$, kar je protislovje, saj je $l \in \mathbb{N}$.

Zato velja: $(2k + 1)j + k - m = 0$ in od tod dobimo $m = (2k + 1)j + k$.

□

Opomba 10.3: V tem članku predstavljeni algoritem 5 tako vsako liho sestavljeno število črta le enkrat in v njem ni nepotrebnih večkratnih prečrtavanj, kar je poglobljena lastnost in hkrati prednost tega algoritma.

2020 Mathematics Subject Classification: 11A41, 11N05, 11N35, 11N36.

Zahvala

Avtor se zahvaljuje dr. Danielu Eremiti s Fakultete za naravoslovje in matematiko v Mariboru za koristne strokovne nasvete pri nastajanju tega članka, za strokovne nasvete ter za skrbno branje članka pa se zahvaljuje tudi anonimnemu recenzentu.

Literatura

- [1] Emsley, John (2001). Nature's Building Blocks (Hardcover, First Edition). Oxford University Press, 521–522.
- [2] Goldstein, L. J. (1973). A History of the Prime Number Theorem, The American Mathematical Monthly, Vol. 80, No. 6, 599 – 615.
- [3] Honsberger, Ross (1970). Ingenuity in Mathematics, The Mathematical Association of America, New Mathematical Library, 75 – 88.
- [4] Rosen, Kenneth H. (2005). Elementary Number Theory and Its Applications (Fifth Edition), AT&T Laboratories, 69 – 70.

Dominacija v grafih in njena uporaba v vsakdanjem življenju

Domination in graphs and its applications in everyday life

Jasmina Ferme, Daša Štesl

Univerza v Mariboru, Pedagoška fakulteta, Koroška cesta 160, 2000 Maribor, Slovenija

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za računalništvo in informatiko, Večna pot 113, 1000 Ljubljana, Slovenija

Povzetek

V prispevku bomo opisali koncept dominacije v grafih. Ogledali si bomo, kako lahko s pomočjo spoznanj v zvezi z dominacijo v grafih rešujemo probleme, povezane z umeščanjem elementov (na primer stavb, predmetov, ponudbe storitev) v prostor, pri čemer je pomembno, da v prostor umestimo čim manjše število elementov, a je njihova razporeditev po prostoru takšna, da so v ustrezni bližini vsem obravnavanim objektom (na primer osebam). Podrobno bomo obravnavali problem postavitve mlekomatov po občinah, problem lociranja enot Civilne zaščite po slovenskih krajih ter problem namestitve alarmnih naprav na sejmskem prizorišču.

Ključne besede: teorija grafov, dominacija v grafih, dominantna množica, dominantno število, uporaba dominacije v grafih.

Abstract

In this paper, we will describe the concept of domination in graphs. We will show how knowledge of domination in graphs can be used to solve the problems related to the placement of elements (e.g., buildings, objects, services) in a space, where it is important to place as few elements as possible in the space, but their distribution in the space is such that they are in close proximity to all considered objects (e.g., persons). More precisely, we will discuss the problem of placing milk vending machines in municipalities, the problem of locating Civil Protection units in Slovenian cities and the problem of arranging alarm devices at the fairground.

Key words: graph theory, domination in graphs, dominating set, domination number, application of domination in graphs.

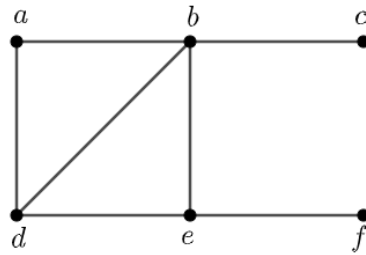
1 UVOD

Teorija grafov je eno izmed novejših, a kljub temu zelo raziskovanih in v svetu uveljavljenih področij matematike. Eden izmed razlogov, ki je gotovo pripomogel k hitremu razvoju in uveljavljenosti te vede v svetu, je širok nabor možnosti uporabe spoznanj s tega področja v realnem življenju. V tem prispevku bomo predstavili uporabnost koncepta dominacije v grafih v vsakdanjem življenju. Da bomo lahko omenjeni koncept opisali, najprej opredelimo osnovne pojme s področja teorije grafov.

Glavni objekt raziskovanja v teoriji grafov so strukture, imenovane grafi. Graf $G = (V, E)$ tvorita neprazna množica elementov, ki jo označimo z V , ter (pod)množica množice neurejenih parov elementov iz množice V , označena z E . Elementom množice V rečemo vozlišča grafa G , elementi množice E pa so povezave grafa G . Naj bosta u in v poljubni vozlišči danega grafa G . Neurejeni par $\{u, v\}$ bomo krajše označili kot uv . V primeru, ko je $uv \in E$, pravimo, da sta vozlišči u in v povezani oziroma sosednji. Dodatno, če je $uv \in E$, rečemo, da je u (oziroma v) sosed od vozlišča v (oziroma u).

E-mail naslov/i: jasmina.ferme1@um.si (Jasmina Ferme), Dasa.Stesl@fri.uni-lj.si (Daša Štesl)

Oglejmo si preprost primer grafa G , prikazanega na sliki 1. Množica vozlišč grafa G je $V = \{a, b, c, d, e, f\}$, množica povezav pa $E = \{ab, ad, bc, bd, be, de, ef\}$. Vozlišči a in b sta v tem grafu povezani, medtem ko vozlišči a in c nista.



Slika 1: Graf G .

2 DOMINACIJA V GRAFIH

Med številnimi področji teorije grafov je bila ves čas veliko pozornosti deležna dominacija v grafih. To je ena izmed starejših vsebin na področju teorije grafov, kar potrjuje dejstvo, da so se z enim izmed dominacijskih problemov ukvarjali že leta 1862. Takrat je namreč De Jaenisch reševal problem določanja najmanjšega števila kraljic na šahovski plošči velikosti $n \times n$, ki bi napadale oziroma pokrivala vsa polja šahovnice. Začetek formalnega raziskovanja dominacije v grafih pa sega v leto 1958, ko je Berge vpeljal koncept grafovske dominacije, kot ga poznamo danes (povzeto po [1] in [4]). Slednjega predstavljamo v nadaljevanju.

Naj bo G poljuben graf. Podmnožico vozlišč D grafa G imenujemo dominantna množica, če je vsako vozlišče iz množice $V \setminus D$ sosednje z vsaj enim vozliščem iz množice D . Z drugimi besedami, množica D je dominantna množica grafa G , če za poljubno vozlišče grafa G velja, da pripada množici D ali pa ima v množici D vsaj enega soseda. Če je vozlišče $x \in V$ sosednje z vozliščem y iz dominantne množice, potem rečemo, da vozlišče y dominira vozlišče x oziroma da je vozlišče x dominirano z vozliščem y .

Za lažje razumevanje koncepta dominacije si zopet oglejmo graf G s slike 1. Nekatere izmed dominantnih množic tega grafa so naslednje: $D_1 = \{a, b, c, e\}$, $D_2 = \{b, d, e\}$, $D_3 = \{b, e\}$, $D_4 = \{a, b, c, d, e, f\}$. Opazimo, da imajo dominantne množice grafa G različna števila elementov. Ker glede na definicijo dominantne množice vedno obstaja dominantna množica grafa, ki vsebuje vsa njegova vozlišča, vprašanje o največji dominantni množici grafa ni zanimivo. Posledično se raziskovalci ukvarjajo z določanjem števila elementov najmanjše dominantne množice danega grafa. Temu številu pravimo dominantno število grafa in ga označimo z $\gamma(G)$.

Določimo dominantno število grafa G s slike 1. Ker obstaja dominantna množica grafa G , ki vsebuje dva elementa (namreč množica D_3), je $\gamma(G) \leq 2$. Dalje, ker imata vozlišči c in f le po enega soseda, za vsako od njiju velja, da pripada dominantni množici ali pa tej pripada njegov sosed. Torej, v vsaki dominantni množici grafa G je vsaj eno od vozlišč b in c ter vsaj eno od vozlišč e in f . To pomeni, da vsaka dominantna množica grafa G premore vsaj dve vozlišči, kar implicira, da je $\gamma(G) \geq 2$. Glede na navedene neenakosti je torej dominantno število grafa G enako številu 2.

Več o dominaciji v grafih ter različnih variacijah opisanega koncepta je med drugim mogoče prebrati v viru [2].

3 UPORABA DOMINACIJE V GRAFIH V VSAKDANJIKU

Dominantne množice v grafih predstavljajo naraven model za probleme, povezane z umeščanjem elementov (na primer stavb, predmetov, ponudbe storitev) v prostor, pri čemer je cilj, da v prostor umestimo čim manjše število elementov, a je njihova razporeditev po prostoru takšna, da so v ustrezni bližini vsem obravnavanim objektom (na primer osebam).

Eden izmed takšnih problemov je problem izbire lokacij za postavitev stavb v prostor, s čimer se velikokrat srečujemo v gospodarstvu. Če namreč želimo čim manjše število tovarniških obratov, trgovin ali podobnih objektov locirati tako, da čimbolj zmanjšamo stroške prevoza med obrati, zagotovimo enakovredno možnost do izvedbe storitev za vse stranke ter zajamemo kar se da velik tržni delež, nam je pri tem lahko v pomoč tudi koncept dominacije. V nadaljevanju obravnavamo konkreten primer opisanega problema.

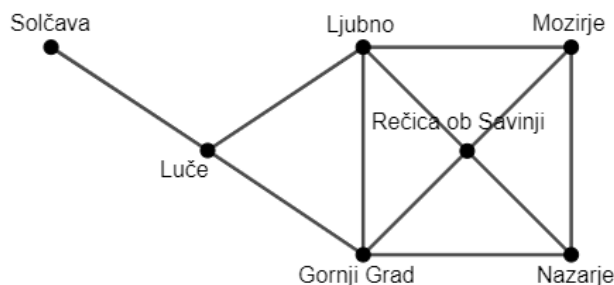
Problem 1. Na eni izmed slovenskih kmetij so se odločili, da bodo svojo tržno dejavnost usmerili v prodajo mleka na mlekomatih. Te bodo postavili v okoliških občinah. Zaradi stroškov postavitve mlekomatov, bi le-teh želeli postaviti čim manj. Kljub temu si želijo prodati čim več mleka, zato bi mlekomate radi postavili tako, da bodo za vse prebivalce izbranega področja dostopni v njihovi občini bivanja ali pa v sosednji. Najmanj koliko mlekomatov potrebujejo, da zadostijo zapisanim ciljem? V katere kraje naj jih postavijo? Zemljevid, prikazan na sliki 2, prikazuje izbrano področje ter občine, v katerih lahko postavijo mlekomate.



Slika 2: Zemljevid področja in občin iz opisa problema 1.

Rešitev problema 1. Zastavljeni problem lahko rešimo z uporabo konceptov s področja teorije grafov. Najprej opisano situacijo predstavimo z grafom. Vozlišča tega grafa so občine obravnavanega področja (vozlišča označimo z imeni pripadajočih občin), dve vozlišči pa povežimo, če sta pripadajoči občini sosednji (imata del skupne meje). Na takšen način ustvarimo graf, označen z G in prikazan na sliki 3. Določitev najmanjšega števila mlekomatov, katerih lokacije ustrezajo v opisu problema podanim pogojem, je ekvivalentna določanju velikosti najmanjše dominantne množice grafa G . Tako je naša naloga določitev vrednosti

$\gamma(G)$. Ker je vozlišče Solčava sosednje le z vozliščem, pripadajočim občini Luče, bo vsaj eno od vozlišč Solčava ali Luče pripadalo poljubni dominantni množici obravnavanega grafa. Dalje, ker je vozlišče Luče povezano z več vozlišči kot vozlišče Solčava, lahko privzamemo, da vsaki dominantni množici grafa G pripada vozlišče Luče. Ker to vozlišče ne dominira vseh vozlišč danega grafa (dominira namreč le vozlišča Solčava, Ljubno in Gornji Grad), vsaka dominantna množica grafa G premore vsaj dve vozlišči. Opazimo, da vozlišči Luče in Rečica ob Savinji tvorita dominantno množico obravnavanega grafa, kar pomeni, da je $\gamma(G) = 2$. Posledično postavitev dveh mlekomatov v občinah Luče in Rečica ob Savinji predstavlja rešitev naloge.



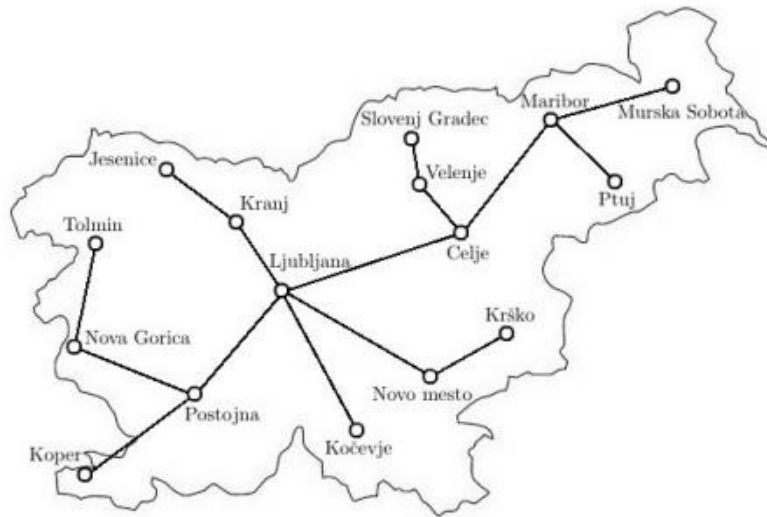
Slika 3: Graf G , ki predstavlja model situacije iz problema 1.

Dominacija ima pomembno vlogo tudi pri lociranju objektov, za katere želimo, da je za vse prebivalce izbranega naselja, pot od njihovega doma do enega izmed teh objektov, čim krajša. V tem primeru imamo v mislih objekte kot so zdravstveni domovi, bolnišnice, gasilski domovi ali enote Civilne zaščite. Konkreten primer v zvezi z zadnjim, povzet po [3], opisujemo v nadaljevanju.

Problem 2. Zadnje čase smo vse pogostejše žrtev različnih vremenskih ujm. Ne glede na to, ali gre za poplave, močan veter, plazove ali druge nesreče, je dobro, da imamo v takšnih primerih organizirane različne oblike pomoči, kot je na primer Civilna zaščita. Na zemljevidu, prikazanem na sliki 4, so označeni slovenski kraji, ceste med njimi pa so ponazorjene s črtami. Naš cilj je enote Civilne zaščite razporediti po krajih. Vsaka enota civilne zaščite lahko deluje v kraju, kjer je locirana ter v več sosednjih krajih (torej v krajih, ki so s tistim, kjer je enota nameščena, povezani s črto). Omenimo še, da so kraji med seboj enakovredni ne glede na število prebivalcev. Zaradi varčevalnih ukrepov smo prisiljeni število enot Civilne zaščite minimalizirati, a kljub temu morajo te nemoteno nuditi pomoč v vseh krajih. Najmanj koliko enot bomo potrebovali za nemoteno nudenje pomoči? V katerih krajih bodo te locirane?

Rešitev problema 2. Problem lahko prevedemo v jezik teorije grafov na naslednji način. Dano situacijo najprej ponazorimo z grafom. Slovenski kraji, ki so označeni na zemljevidu, so vozlišča grafa G (ta naj bodo označena z imeni pripadajočih krajev), poti, ki so ponazorjene s črtami, pa so povezave grafa G . Lociranje enot Civilne zaščite tako, da izbrane lokacije zadoščajo zgoraj zapisanim pogojem, je ekvivalentno iskanju najmanjše dominantne množice grafa G . V nadaljevanju predstavljamo enega izmed načinov določanja najmanjše dominantne množice omenjenega grafa. Najprej opazimo, da so vozlišča Tolmin, Koper, Kočevje, Jesenice, Krško, Slovenj Gradec, Ptuj in Murska Sobota povezana le z enim vozliščem grafa. To pomeni, da za vsako od omenjenih vozlišč velja, da to vozlišče ali njegov sosed pripada vsaki dominantni množici grafa G . Če katero od omenjenih vozlišč pripada dominantni

množici, to dominira le eno vozlišče, kar pomeni, da je bolj smiselno, da dominantni množici grafa pripadajo vsi sosedni omenjenih vozlišč. Torej so v neki najmanjši dominantni množici grafa vozlišča Nova Gorica, Postojna, Kranj, Ljubljana, Novo mesto, Velenje in Maribor. Omenjena vozlišča predstavljajo najmanjšo dominantno množico grafa G . Odgovor na zastavljeno vprašanje je tako število 7, enega izmed možnih načinov izbire lokacij pa sestavljajo kraji Nova Gorica, Postojna, Kranj, Ljubljana, Novo mesto, Velenje in Maribor.



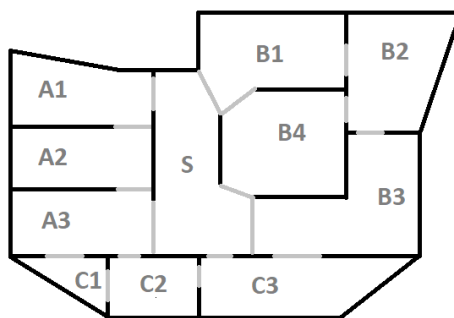
Slika 4: Slovenski kraji in povezave med njimi (vir:[3]).

Koncept dominacije je uporaben tudi na področju zagotavljanja varnosti (z uporabo raznih senzorjev, alarmnih in podobnih naprav) in nadzorovanja predmetov ali prostorov (s pomočjo video kamer ali drugih podobnih naprav). Na primer, če je naš cilj zagotoviti, da je na celotnem obravnavanem območju slišen alarm za nevarnost, pri čemer pa želimo (morda zaradi omejenih finančnih sredstev) uporabiti čim manj alarmnih naprav, lahko s pomočjo dominacije poiščemo optimalna mesta, kamor bi postavili omenjene naprave.

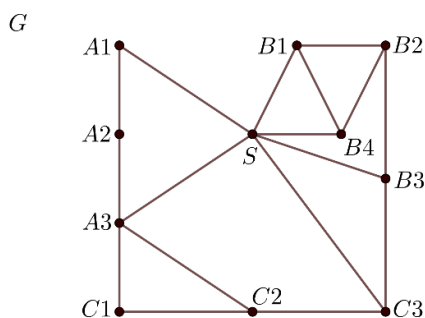
Problem 3. Veliko sejmsko prizorišče je razdeljeno na več manjših prostorov, označenih z $A1, A2, A3, B1, B2, B3, B4, C1, C2, C3$ in S , kot prikazuje slika 5. Črne črte na omenjeni sliki označujejo stenske pregrade med prostori, sive pa označujejo posamezne prostore, a predstavljajo prosto prehodna območja. Za zagotovitev varnosti na sejmskem območju bodo na celotno območje namestili več alarmnih naprav. Teh želijo zaradi finančnih omejitev namestiti čim manj, a vseeno na takšen način, da bo zagotovljena zadostna raven varnosti: za vsak prostor mora veljati, da je alarmna naprava nameščena v tem ali v sosednjem prostoru. Najmanj koliko alarmnih naprav je treba zagotoviti in v katere prostore sejmišča jih je treba namestiti?

Rešitev problema 3. Tudi ta problem lahko razrešimo z uporabo konceptov s področja teorije grafov. Situacijo prikažemo z grafom G na naslednji način. Vozlišča grafa G so prostori sejmišča. Označimo jih glede na pripadajoče prostore, torej z oznakami $A1, A2, A3, B1, B2, B3, B4, C1, C2, C3$ in S . Dve vozlišči grafa G naj bosta povezani, če obstaja direkten prehod med pripadajočima prostoroma (glede na sliko 5 to pomeni, da med prostoroma obstaja siva črta). Tako dobljeni graf G je prikazan na sliki 6. Določitev najmanjšega števila alarmnih

naprav, ki so locirane tako, da zadoščajo pogojem iz opisa problema, je glede na definicijo grafa G ekvivalentna določitvi števila $\gamma(G)$. Najprej opazimo, da je množica $\{S, A3, B2\}$ dominantna množica grafa G , kar pomeni, da je $\gamma(G) \leq 3$. Dokazali bomo še, da je $\gamma(G) \geq 3$. Predpostavimo nasprotno, torej da obstaja dominantna množica D' grafa G , ki vsebuje le dve vozlišči. Ugotovimo, da je $S \in D'$. V nasprotnem primeru vozlišči iz množice D' skupaj dominirata največ sedem vozlišč (saj imata poljubni dve vozlišči iz $V(G) \setminus \{S\}$ skupaj največ sedem sosedov). Ker je D' dominantna množica grafa G , bi moral ta graf imeti največ devet vozlišč (dve v D' in največ sedem takšnih, ki so dominirana z vozlišči iz D'), kar pa seveda ni res. Torej vozlišče S zares pripada množici D' . Vozlišče S dominira vsa vozlišča grafa G , razen vozlišč $A2, B2, C1$ in $C2$. Ker omenjena štiri vozlišča nimajo skupnega sosedu (ki bi dominiral ta štiri vozlišča), niti ni eno od teh povezano z vsemi preostalimi tremi, graf G ne premore dominantne množice z dvema elementoma. Zato je $\gamma(G) \geq 3$. Sledi, da je $\gamma(G) = 3$, kar pomeni, da moramo na celotno sejensko prizorišče namestiti tri alarmne naprave, ki jih lociramo v prostore $S, A3$ in $B2$.



Slika 5: Sejensko prizorišče.

Slika 6: Graf G , ki predstavlja sejensko prizorišče.

4 ZAKLJUČEK

Poleg zgoraj opisanih problemov lahko koncept dominacije v grafih uporabimo tudi pri obravnavi številnih drugih situacij iz vsakdanjika, kjer je zahtevano umeščanje čim manj elementov v prostor, pri čemer pa velja še, da je razporeditev elementov po prostoru takšna, da so ti v ustrezni bližini vsem obravnavanim objektom. Takšni problemi so na primer naslednji: postavitve parkomatov na velikem parkirišču, postavitve turistično-informacijskih

točk v večjih mestih, izbira in določitev postaj avtobusnega prevoza ter številni problemi, povezani z računalniškimi ali socialnimi omrežji. Koncept dominacije v grafih lahko torej s pridom izkoristimo za reševanje raznolikih realnih problemov.

Literatura

- [1] Berge, C. (1962). *Theory of Graphs and its Applications*. London.
- [2] Haynes, T. W., Hedetniemi, S. T., Henning, M. A. (Eds.). (2020). *Topics in domination in graphs*. Springer.
- [3] Ilić, I. (2018). *Dominacija v grafih in ravninski grafi pri pouku v osnovni in srednji šoli: magistrsko delo*. Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko.
- [4] Košmrlj, G. (2015). *Igre, porojene iz grafovске dominacije: doktorska disertacija*. Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko.

VABILO AVTORJEM

Dianoia (grško διάνοια) po Platonu označuje védenje, razmišljanje o modelih stvarnosti, o naravoslovno-matematičnih in tehničnih temah. Uporabljajo ga matematiki (modeliranje) in znanstveniki (formuliranje problema), inženirji (načrtovanje sistema). Opredeljuje kompetenco, proces ali rezultat diskurzivnega razmišljanja, za razliko od neposrednega razumevanja obravnavane tematike. Aristotel to védenje naprej razdeli na teoretično (episteme) in praktično (phronesis).

Dianoia po Platonu torej označuje vmesni nivo človeškega spoznanja, prehod od intuitivnih občutkov do najglobljega spoznanja dejanskosti. Tako je idealna oznaka za objave v pričujoči reviji, ki povezujejo teoretična, znanstvena izhodišča z njihovo uporabno namembnostjo. Študentje, avtorji teh člankov, ste na prehodu od učenja k delu, od teoretičnega h konkretnemu, ki vas bo pripeljalo do kruha, do dela, s katerim boste odigrali svojo vlogo v družbi. Na tem prehodu pa poleg znanja, ki ga ponuja redno izobraževanje, potrebujete tudi izkušnje s konkretnih izzivov in mehke kompetence sodelovanja v ekipah delodajalcev, k čemur vas spodbuja in vam pri tem pomaga revija Dianoia.

V reviji bomo objavljali poljudne in strokovne članke s področja naravoslovja, matematike ali znanosti, ki uporabljajo znanja teh področij. Ciljna publika bralcev so v prvi vrsti delodajalci, ki tovrstna znanja potrebujejo in želijo izvedeti, kaj je kdo zanimivega razmislil na njihovem področju. V drugi vrsti so ciljna publika študentje, ki iščejo zamisli za svojo poklicno pot in lahko v reviji najdejo navdih za lastna raziskovanja in iskanje stikov s trgom dela.

Za kakovost izdelkov bo skrbel uredniški odbor in uredniški svet, v katerih so vrhunski strokovnjaki, povezani s področji, ki jih revija obravnava. Članki bodo anonimno recenzirani, o objavi pa na podlagi recenzije odloča uredniški odbor. Priporočljivo je, da avtorji besedilo spremenijo v skladu s priporočili recenzentov in da popravljeni članek z utemeljitvijo sprejema ali zavrnitve sprememb ponovno pošljejo v pregled. Uredništvo lahko objavo članka zavrne, če vsebinsko ali po merilih kakovosti ne ustreza standardom revije, o čemer avtorje obvestimo v najkrajšem možnem času.

S prispevkom v reviji bodo avtorji spodbujali širjenje znanja s področja naravoslovja in matematike ter tehnike oziroma izobraževanja teh področij in svoje poglede prenašali na trg dela in na prihajajoče generacije.

NAVODILA AVTORJEM

Avtorje prosimo, da pri pripravi članka upoštevajo naslednja navodila.

Če je članek napisan v slovenščini, naj ima angleški prevod naslova, povzetka in ključnih besed. Veseli bomo tudi prispevkov v angleščini, ki pa morajo imeti naslov, razširjen povzetek v obsegu 300 – 400 besed in ključne besede v slovenščini. Ključnih besed naj bo do šest.

Prispevki naj bodo zanimivi za širši krog bralcev. Ključna je intuitivna predstavitev zamisli in rezultatov, podrobnosti pa lahko ostanejo prihranjene za morebitni znanstveni članek, ki bi bil nadgradnja članka, objavljenega v reviji Dianoia.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (avtorjev) in sedež ustanove, kjer avtor(ji) dela(jo). Sledi naj povzetek, z največ 150 besedami, seznam ključnih besed in besedilo, ki ne presega 3000 besed. Besedilo naj bo zapisano v urejevalniku besedil MS Word 2010 oz. kasnejši ali LaTeX in naj uporablja objavljeno predlogo. Slike in tabele morajo biti oštevilčene in imeti natančen opis, da jih lahko razumemo brez preostalega besedila. Slike v elektronski obliki naj bodo visoke kakovosti v formatu PNG ali JPEG.

Prispevek v PDF obliki pošljite na naslov dianoia@um.si z zadevo: »Za revijo Dianoia«. Če bo sprejet v objavo, vas bomo prosili za izvirno obliko prispevka.