LETNIK 4 (2020) – ŠT. 1

ISSN 2536-3565

Univerza v Mariboru

Fakulteta za naravoslovje in matematiko

D I A N O I A

REVIJA ZA UPORABO NARAVOSLOVNO-MATEMATIČNIH ZNANOSTI

ISSN	**2536-3565**
Naslov publikacije/Title	**DIANOIA**, revija za uporabo naravoslovnih in matematičnih znanosti **DIANOIA**, journal for applications of natural and mathematical sciences
Letnik/Volume	**4**
Leto/Year	**2020 (april)**
Številka/Number	**1**
Založnik in izdajatelj/ Published & Issued by	Univerzitetna založba Univerze v Mariboru, Slomškov trg 15, 2000 Maribor, Slovenija, http://press.um.si/, zalozba@um.si
Uredništvo/Editorial board	*odgovorni urednik/editor in chief* Mitja Slavinec *glavni urednik/executive editor* Drago Bokal *izvršna urednica/managing editor* Janja Jerebic *urednici za področje biologije/editors for biological sciences* Nina Šajna, Sonja Škornik *urednik za področje didaktike/editor for didactical sciences* Samo Repolusk *urednika za področje fizike/editors for physical sciences* Robert Repnik, Aleš Fajmut *urednika za področje matematike/editors for mathematical sciences* Igor Pesek, Janja Jerebic *urednik za področje tehnike/editor for technical sciences* Mateja Ploj Virtič *tehnična urednica/technical editor* Špela Tertinek *pomočnica tehnične urednice/technical editor assistant* Monika Vogrinec
Mednarodni uredniški svet/ International advisory board	Igor Emri (Fakulteta za strojništvo Univerze v Ljubljani, član SAZU), Matej Brešar (FNM, član SAZU), Sergey Pasechnik (Državna fakulteta v Moskvi), Vlad Popa-Nita (Fakulteta za fiziko Univerze v Bukarešti), Blaž Zmazek (FNM), Samo Kralj (FNM), Franci Janžekovič (FNM), Nataša Vaupotič (FNM), Mitja Kaligarič (FNM), Boris Aberšek (FNM), Andrej Šorgo (FNM), Bojan Mohar (Simon Fraser University, Vancouver), Matjaž Perc (FNM), Ivica Aviani (Naravoslovno matematična fakulteta Split), Fahriye Altınay (Univerza v Nikoziji), Andreas M. Hinz (Univerza Ludwig-Maximilians, München)
Oblikovanje/Design	Amadeja Bratuša
Lektoriranje/Proofreading	Ljudmila Bokal
Sedež uredništva/Address	FNM UM, Koroška cesta 160, 2000 Maribor
e-mail	dianoia@um.si
internet/web	www.fnm.um.si
Tisk/Printed by	FNM UM
Leto izida/Year	2020
Datum natisa/Published	2020
Naklada/Nr. of Copies	100 izvodov

Revija izhaja dvakrat letno, predvidoma aprila in septembra.

Volume 4 Number 1 April 2020

Kazalo / Table of Contents

Dianoia 4 (2020) 5–10

Na študenta osredotočeno poučevanje z vključevanjem v raziskovalno delo

Drago Bokal
Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Koroška cesta 160, 2000 Maribor, Slovenija

Nedavno sem se udeležil posveta projekta INOVUP - inovativno učenje in poučevanje v visokem šolstvu z naslovom Izzivi in dileme visokošolskega poučevanja: kje smo in kam želimo. Ob poslušanju predavateljev, še najbolj pa ob okrogli mizi z naslovom Kako združiti vlogo visokošolskega učitelja/sodelavca in raziskovalca?, mi je misel pogosto tavala k Dianoi, naši fakultetni reviji. Poslanstvo te revije je študentom približati iskanje znanja, kar raziskovanje v osnovi je, ter njegovega predstavljanja, podajanja na način, da bodo koristi tega znanja prepoznali tudi drugi. Za študente so kot naslovniki teh objav najbolj zanimivi njihovi bodoči delodajalci. Zato je primarno poslanstvo naše revije, da študentje rešujejo izzive potencialnih delodajalcev in rešitve objavljajo v reviji.

Predavateljica prof. dr. Manja Klemenčič z Univerze Harvard je na omenjenem posvetu vključevanje študentov v raziskovalno delo razdelila v štiri stopnje, ki so bile najbrž povzete po [7]. Prva stopnja vključevanja je potrjevalno raziskovanje. Pri njej predavatelj študente vodi skozi raziskovalno delo, ki je že bilo opravljeno. Predstavi jim vprašanje, metodo in rezultat. Študentje pa ponovijo raziskavo po znani metodi in dosežejo rezultat, ki ga s svojim delom preverijo, obenem pa pridobijo izkušnjo uporabe metode. Druga stopnja vključevanja raziskovanja je strukturirano raziskovanje. Pri njem predavatelj predstavi vprašanje in metodo, študentje pa samostojno dosežejo rezultat. Tretja stopnja je vodeno raziskovanje. Predavatelj predstavi vprašanje, študentje pa sami predlagajo – iščejo ustrezno metodo in najdejo pot do rešitve. Zadnja stopnja pa je odprto raziskovanje, pri katerem študentje zastavijo najprej vprašanje, nato pa izberejo metodo, s katero najdejo odgovor nanj.

Zanimiva informacija. Z revijo Dianoia ter sodelovanjem profesorjev in študentov, ki objavljajo v njej, postavi Fakulteto za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru ob bok priznanim pristopom na Harvardu, ki naj bi te metode po besedah predavateljice s pomočjo velikih sredstev in sodobne tehnologije razvijal zadnjih pet let. Kaj to pove o viziji, ki jo je zastavila prva uprava s polnim mandatom Fakultete za naravoslovje in matematiko pod vodstvom prof. dr. Nataše Vaupotič že pred več kot desetletjem, leta 2007? Ko smo študente spodbujali, da k predmetom, kot so Uporabna matematika, Uporabna fizika, Osnove statistike za biologe in ekologije in podobnim prinesejo svoje probleme, ki jih v sodelovanju z mentorji razvijejo do rešitev za potencialne delodajalce?

E-naslov: drago.bokal@um.si (Drago Bokal)

Pove, da je revija Dianoia na pravi poti. Pove, da profesorji postavljamo bodočnost vas, študentov, na prvo mesto. In da gledamo naprej. Morda smo celo nekaj let pred Harvardom, da znamo v duhu odprtega raziskovanja zaslutiti kompleksnost sistema, v katerem sobivamo s svojimi študenti, formulirati pravi problem, ga razrešiti in videti rešitve za probleme, ki jih svet še ni zaznal. Smela, preveč samozavestna trditev, bo rekel kdo. A jo lahko utemeljim.

Pred kratkim je kolega, ki je v stiku z razvijalci orodja Moodle, povedal, da razvijalci orodja sami v šali govorijo o Moodlu kot o pokopališču mrtvih PDF-jev, ki jih nihče ne bere. Morda jih preleti predavatelj, ocenjevalec, potem pa obležijo v grobu. Pa je to potrebno? Koliko truda je šlo v njihovo izdelavo, koliko neprespanih noči, v katerih so študentje v potu svojega obraza rojevali ideje, s katerimi so preverjali svoje znanje in dokazovali razumevanje konceptualnih aparatov predmetov, pri katerih so dobili v izdelavo izbrano nalogo. Rezultat, s katerim se vsi sprijaznimo, je mrtev PDF v krsti, imenovani Moodle.

Dianoia ponuja alternativo. Vaše znanje, znanje vaših študentov ne bo mrlič v krsti, imenovani Moodle, ampak bo živa beseda, znanje, model na poti med občutki (eikasia), prepričanji (pistis) na eni strani ter spoznanjem (noesis) na drugi, kamor je dianoio, formalni matematični model, uvrstil Platon. Vaše znanje bodo brali vaši delodajalci, pa tudi študentje, ki bodo prihajali za vami in nadgrajevali vaše delo. Jih morate gledati kot na konkurenco? Od vas je odvisno. Če ste suvereni v svojem znanju in odprti za odnos in imate izkušnjo, da podobno razmišljajo tudi ljudje okoli vas, potem se boste povezali z njimi in se bodo avtorji povezali z vami, delili si boste ideje in podpirali drug drugega v razumevanju problemov, ki so objavljeni. Skupaj boste močnejši, lažje boste izkoristili potencial, v katerem se dopolnjujete. Če pa imate izkušnjo, da so bile vaše ideje ukradene in morda celo zlorabljene proti vam, potem se boste zaprli in svojih idej ne boste delili, obdržali jih boste zase ne glede na suverenost obvladanja tematike. Morda je na prvi pogled podlaga napredka tekmovanje, a zares velike premike lahko dosežemo le skupaj. Zato je pravi napredek možen le, če je utemeljen na zaupanju, ki omogoča sodelovanje. Tekmovanje je temu sodelovanju podrejeno, njegova naloga je, da ne zaspimo na lovorikah. Kot v družabni ali športni igri: želimo si zmage zaradi veselja ob razumevanju dobre taktike, ne zaradi poraza nasprotnika.

Zapisano postavi Dianoio in Fakulteto za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru ob bok naprednim metodam poučevanja na Univerzi Harward, obenem pa je zgolj uvod v prej obljubljeno utemeljitev. Kot nadgradnjo zapisanemu vključevanju raziskovanja v poučevanje, prejšnja in pričujoča številka revije Dianoia kažeta še globji način, kako rezultat vašega študentskega znanja oživi. Način, za katerega trdim, da je korak pred vsem, kar je na predavanju predstavila predavateljica s Harwarda, saj študentu omogoča, da raziskuje ne le vsebino predmeta, ampak tudi, kako sodeluje pri njenem predstavljanju na način, ki je kontekstualno prilagojen njemu, posamezniku, ki izhaja iz bistveno drugačnega intelektualnega konteksta, kot izhaja predavatelj. Ta pristop omogoči prilagajanje vsebin predmeta in načina podajanja kulturno in vsebinsko raznolikim skupinam študentov, ki pri poglabljanju v predmet prodrejo do tiste njegove oblike, ki je najbolj primerna njihovim lastnim zanimanjem.

Oglejmo si, kako to dosežemo. V prispevku [13], ki je nastal po principih vodenega raziskovanja, je Tadej Žerak povzel svoj magisterij, zastavljen kot zaporedje nalog, ki se začne pri vsem razumljivem problemu treh hiš in treh napeljav [6]. Nato predstavi model problema, graf in njegovo risbo. Izrek Kuratowskega, od objave katerega letos mineva 90 let, pove, da v opisanem modelu rešitev ni mogoča, torej jo je treba iskati zunaj modela. Naloge bralca vodijo naprej prek lastnosti grafov in njihovih notranjih struktur do razumevanja karakterizacije 2-prekrižno-kritičnih grafov, naslednjega koraka po izreku Kuratowskega, ki okarakterizira zanimive 1-prekrižno-kritične grafe. Na koncu Žerak dokaže nov izrek, da so skoraj vsi zanimivi 2-prekrižno-kritični grafi Hamiltonski. Na podlagi teh nalog je bil zastavljen predmet Uvod v raziskovanje v teoriji grafov, ki je bil poskusno izveden z dvema študentoma prve, enim študentom druge, ter dvema študentoma tretje doktorske bolonjske stopnje na Univerzi Osnabrück v Nemčiji. Študentje so pri predmetu doživeli zanos odkrivanja novega znanja in dokazali svoje prve izreke v teoriji grafov [1].

Podobno izkušnjo opiše članek [5] v pričujoči številki revije Dianoia. Študentom je bil pri predmetu predstavljen model stohastičnega procesa učenja in občutkov, ki jih posameznik doživlja pri učenju glede na njegovo znanje in zahtevnost nalog [2]. Model je nastal na podlagi psiholoških raziskav počutja pri delu [4]. Pripravili so zaporedje nalog, s katerimi lahko bralec spozna matematična orodja, potrebna za razumevanje članka, ter s tem naredili članek dostopnejši za kolege, ki ga bodo z zanimanjem prebrali. Njihov pristop k raziskovanju pa je bil odprt. Poznano je bilo namreč le področje, problematika, sami pa so (ob usmerjanju mentorja, kadar idej ni bilo) zastavili vprašanja, naloge, in poiskali njihove rešitev.

Zakaj bi ta model koga zanimal, čigavo zanimanje bo oživilo PDF, ki je bil rezultat njihovega dela? Zato, ker model povezuje optimizacijske probleme s psihološkim modelom občutkov. Poglejmo si povezavo najprej na primeru žarnice. Ta je optimalno izkoriščena, ko skoznjo teče nazivni tok. Življenjska doba se ji ne krajša, kot vir svetlobe in toplote v polnosti opravlja svoje delo. Če je tok manjši od nazivnega, prav tako ni škode za žarnico, le svetlobe ni dovolj za branje, morda pa je ravno prava za sproščeno romantično večerjo. Kadar je tok višji od nazivnega, volfram iz žarilne nitke izpareva pospešeno, žarnici se življenjska doba krajša. Ob zadostni preobremenitvi pregori, tok skoznjo ne teče več, prav tako je življenjska doba padla na 0. Če potegnemo povezave z modelom čustev, je žarnica lahko v stanjih zanosa, sproščenosti, tesnobe ali apatije.

Podobno je z ljudmi, pri katerih tok skozi žarnico nadomesti človeška pozornost za opravljanje zadanih nalog [4]. Ko je pozornost, usposobljenost usklajena z zadanimi nalogami, smo v zanosu. Ko naloge ne izkoristijo vse pozornosti, ki smo je zmožni, smo v sproščenosti in iščemo novih izzivov. Ko nimamo zadosti pozornosti za opravljanje svojih nalog, smo v tesnobi. In če pregorimo, se nas loti apatija.

Vzporednice lahko povlečemo tudi z družbo. Uspešna družba pozornost posameznikov posveča ustvarjanju virov. V tem tekmuje, napreduje, izboljšuje svoje procese pridobivanja virov, je v zanosu. Če je do virov lahko priti, se posveča tudi estetskim in drugim raziskovalnim procesom, ki pomenijo potencial ustvarjanja virov na nove načine, prinašajo novo razumevanje, navdihujejo, a virov sami po sebi ne ustvarjajo. Taka družba je sproščena. Dolgoročna vzdržnost obeh situacij temelji na zaupanju, da bo tekma za pridobivanje virov v korist celotne družbe, ne le zmagovalcev v tekmi. Kajti če tekma ni v korist vseh, potem poraženci izgubijo zaupanje v družbo, ne sodelujejo v procesih ustvarjanja virov, svoje procese optimizirajo za plenjenje virov in njihovo izkoriščanje. Ko se pridobivanje virov ustavi, družba pride v tesnobo, podjetje ima izgubo, sposobni ljudje ga zapustijo in sledi apatija, stečaj, konec procesov – smrt.

Primeri kažejo, da je upoštevanje občutkov posameznikov, ki sodelujejo v procesih, bistvenega pomena za uspešno optimizacijo teh procesov. Tako je počutje študentov in profesorjev bistvenega pomena za optimizacijo njihovega počutja in izide pedagoškega procesa. Naj torej čas posvetijo ustvarjanju mrtvih PDF-jev, ali pa živih prispevkov, ki jih bodo kolegi, soudeleženci procesov brali in uporabljali za usvajanje znanja? To je retorično vprašanje le za naivne idealiste. Kot povedano zgoraj, je odgovor odvisen od zaupanja, ki ga družba okrog nas upravičuje.

Naj za konec te refleksije potegnem vzporednice še s situacijo na trgu dela. V avtomobilski industriji morajo dobavitelji (med njimi je veliko slovenskih podjetij) vsako leto za določen odstotek znižati ceno izdelka. Da to lahko dosežejo, imajo vedno več svobode pri njegovem oblikovanju: naročnik predpiše parametre, znotraj katerih bo polizdelek mogoče vgraditi v končni produkt, oblikovanje, drugo pa je stvar izvajalca. Ključni izziv delodajalcev je, da ne najdejo dovolj ustvarjalnih sodelavcev, ki bi lahko razvili tak izdelek. Zakaj ne? Odgovor zagotovo ni preprost. Lahko pa ga iščemo v smeri, da velik del izobraževalnega procesa temelji na nezaupanju, zato se ustvari ozračje poustvarjanja z gotovostjo dosegljivih ciljev. V takem ozračju ni prostora za ustvarjalnost, ki je podvržena negotovosti in lahko uspeva le v ozračju, kjer je odgovornost za rezultat prepuščena posameznikom, ne sistemom kontrole. Ministrstvo ne zaupa učitelju, da bo dobro naučil učence, in zahteva, da proces odstotek popiše v pripravah. Starš ne zaupa učitelju in ga sili v utemeljevanje vsake neodlične ocene. Učitelj ne zaupa učencu, da ne bo prepisoval. Učenec ne zaupa učitelju, da potrebuje znanje, ki mu ga slednji podaja, in se uči za oceno, ne za znanje. Človeška pozornost pa se posveča iluzijam znanja – dokumentaciji, ocenam – namesto da bi bilo osredotočeno na znanje samo in na veščine, ki omogočajo s tem znanjem pridobivati vire. Posledično cveti inflacija ocen, kot pojasni model iz teorije iger [11].

Zato je v izobraževalni proces treba vrniti zaupanje. Vključevanje raziskovanja v pedagoški proces je za vrnitev zaupanja idealna priložnost. Raziskovanje je namreč nepredvidljivo in ga ni mogoče popisati v pripravah. Zavežemo se, da bomo izvedli proces, k rezultatom pa se lahko zavežemo samo v primeru, da je proces že kdo izpeljal. V terminologiji razvoja programske opreme se takemu pristopu reče agilni razvoj programske opreme: razvijamo tisto, kar uporabnik v danem trenutku potrebuje. Na študenta osredotočeno poučevanje je nujno agilno: prisluhne kontekstu in mu da znanja, ki jih v danem kontekstu potrebuje. Ta znanja so lahko temeljna, splošno sprejeti aksiomi, ki kličejo po predavanju, osredotočenem na podajanje vsebine. Tudi to je osredotočeno na študenta, a se mu mora ta podrediti, prepoznati in ponotranjiti potrebnost podanih znanj. Lahko so znanja o procesih, v danem kontekstu primeren nasvet za uporabo metode, ki vodi k rešitvi. Lahko so tudi refleksijska, ki usmerijo v izboljšavo razumevanja konteksta, morda pridobivanje boljših podatkov ali globlje literature.

O podobnem poglobljenem pristopu k vključevanju raziskovanja v pedagoški pristop prof. dr. Manja Klemenčič ni govorila. Morda zgolj zaradi omejenega časa, namenjenega predavanju. Povedala pa je, da je bila vesela predavanja, na katerem je bistveno bolj kot pred petimi leti začutila, da si želimo vpeljati nekaj novega, da želimo študenta postaviti v središče. Nekateri to želimo in delamo že precej dolgo. Prepričanje, da je to prava smer, temelji na še enem primeru vodenega raziskovanja izpred let, ko je Andreja Smole analizirala igro prenosa znanja med profesorjem in študentom z vidika inflacije ocen [10]. Poenostavljeno njen model pove, da inflacije ocen ne bo, ko bosta tako študent kot predavatelj motivirana z znanjem, ki se izmenja, ocena pa bo samo stranski učinek te izmenjave znanja. Model je bil leta 2012 predstavljen na Svetovnem kongresu za teorijo iger [3], leta 2014 pa so na Princetonu razveljavili več let prej uveljavljeno politiko maksimalnega deleža najboljših A ocen kot politiko preprečevanja inflacije ocen. Nadomestili so jo s politiko vsebinskega utemeljevanja ocene, ki namesto enodimenzionalne mere znanja postane besedilna utemeljitev priložnosti, v katerih študent v znanju lahko napreduje. Končna številka, ki je sicer ključna ocena, ta opis zgolj poenostavi in projicira v eno dimenzijo [9] [8].

Naj zaključim z zahvalo dekanu Fakultete za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru ter hkrati odgovornemu uredniku revije Dianoia, prof. dr. Mitji Slavincu, ki podpira našo revijo že od samega nastanka; pri njem je tudi sam sodeloval. Na omenjenem INOVUP srečanju smo lahko spoznali, kako vizionarska poteza je bila njena ustanovitev v opisani obliki. Ob tej priložnosti gremo še korak naprej: revija Dianoia dobiva svojo sobo, v kateri bodo študentje – tutorji [12] – kolegom pomagali pri organiziranju njihovega raziskovalnega procesa, ki bo zasnovan na prej omenjenih stopnjah vključevanja raziskovanja v pedagoški proces.

Literatura

[1] D. Bokal, M. Chimani, A. Nover, J. Schierbaum, T. Stolzmann, M. H. Wagner, T. Wiedera. Invariants in Large 2-Crossing-Critical Graphs, in preparation.

[2] D. Bokal, M. Steinbacher. Phases of psychologically optimal learning experience: task-based time allocation model. Central European Journal of Operations Research 27, no. 3 (2019): 863–885.

[3] D. Bokal, T. Jagrič, A. Smole. Moral hazard model with endogenous signal : lecture at the 4th World Congress of the Game Theory Society, July 21–26 2012, Istanbul Bilgi University, Turkey. Istanbul, 2012.

[4] M. Csikszentmihalyi. Flow: The psychology of happiness. Random House, 2013.

[5] J. Dimič, A. Lakner, K. Potočan, D. Bokal. Uvod v linearno programiranje in stohastične procese

[6] H. Dudeney. Perplexities, with some easy puzzles for beginners, The Strand Magazine (1913) page 110.

[7] P. Eastwell, A. Haley MacKenzie. Inquiry learning: Elements of confusion and frustration. The American biology teacher 71, no. 5 (2009): 263–266.

[8] S. Kohli. Princeton is giving up ground in its fight against grade inflation, Quartz [Online] 2014. `https://qz.com/277288/princeton-is-giving-up-ground-in-its-fight-against-grade-inflation/`

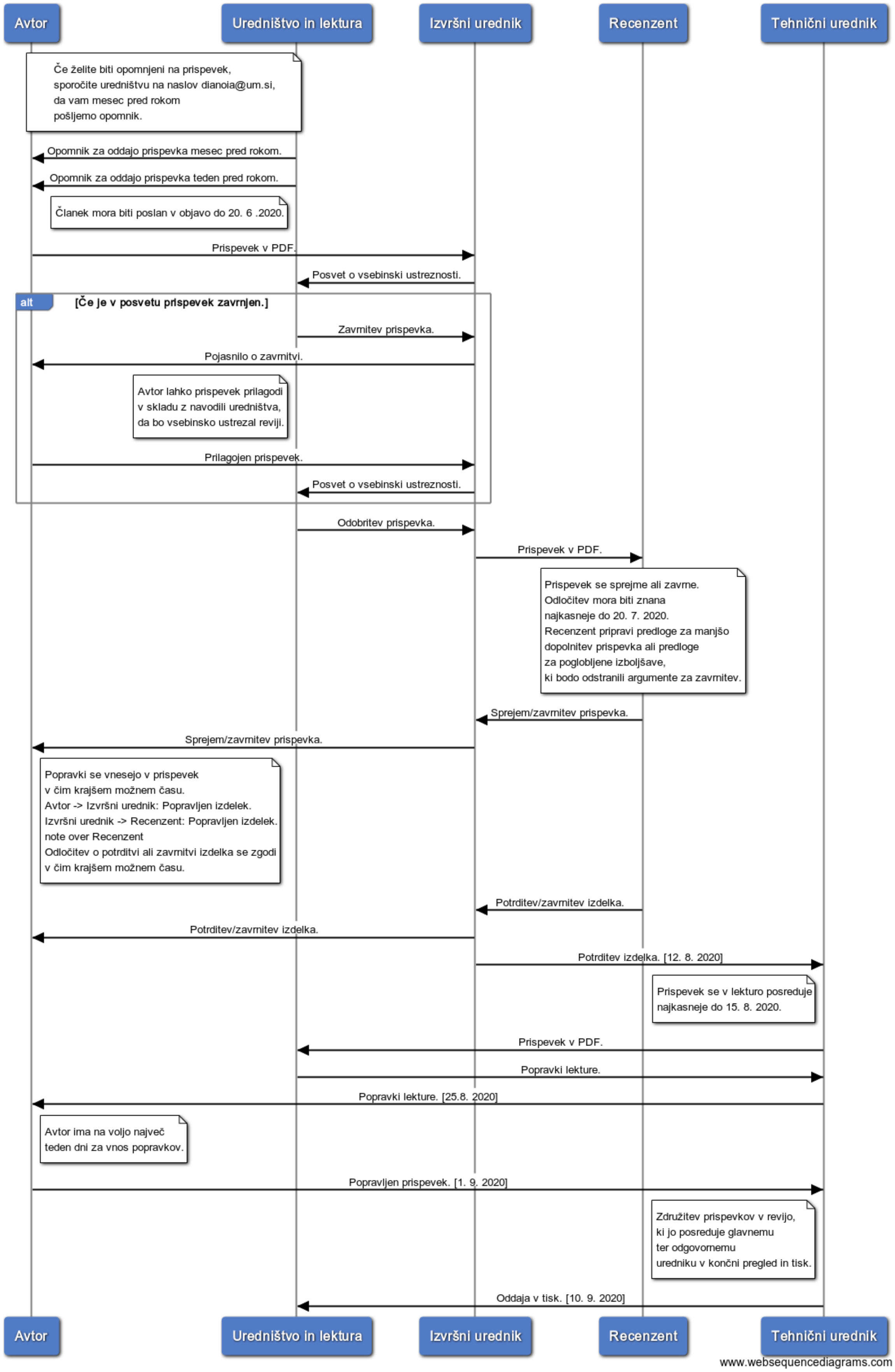
[9] E. Quiñones. Princeton achieves marked progress in curbing grade inflation, Princeton: News at Princeton. [Online] 2009. `http://www.princeton.edu/main/news/archive/S25/35/65G93/`

[10] A. Smole. Moralno tveganje v izobraževanju: analiza Nashevih ravnovesij v igri med profesorjem in študentom. Magistrsko delo, Maribor: Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, 2011.

[11] A. Smole, T. Jagrič, D. Bokal. Principal-Leader-Follower Model with Internal Signal . V: Zadnik Stirn, Lidija (ur.), et al. SOR '19 proceedings. Ljubljana: Slovenian Society Informatika, Section for Optimization in Human Environments, 2019. Str. 205–210.

[12] Š. Tertinek, D. Bokal. Dianoia učilnica: pot od pridobivanja do uporabe znanja z Dianoia tutorstvom. Dianoia 4 (2020)

[13] T. Žerak, D. Bokal. Razigran uvod v 2-prekrižno-kritične grafe. Dianoia 3 (2019): 101–108.



Slika 1: Proces izdaje naslednje številke revije Dianoia.

Dianoia 4 (2020) 11–13

Dianoia učilnica: pot od pridobivanja do uporabe znanja z Dianoia tutorstvom

Špela Tertinek, Drago Bokal
Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Koroška cesta 160, 2000 Maribor

1 Zakaj Dianoia tutorstvo v Dianoia učilnici

Kot piše v predstavitvi revije, dianoia po Platonu označuje vmesni nivo človekovega spoznanja, prehod od intuitivnih občutkov do najglobljega spoznanja dejanskosti. Študentje smo na prehodu od učenja k delu. Pri tem potrebujemo bazično znanje in konkretne izkušnje. Izkušnje so podobne problemu kokoši in jajca: za marsikako delo jih je treba imeti, preden postaneš resen kandidat. Rezultati, ki presegajo standardno delo pedagoškega procesa, so izkušnja, ki pokaže na lastna zanimanja študenta, na željo po samostojnem iskanju znanja, po preseganju tistega, kar z izobraževalnim sistemom podprt proces prinese sam od sebe. Pri delodajalcih so zelo cenjeni, sploh če odražajo poznavanje tehnologije in drugih veščin, ki jo delodajalec uporablja v svojem delovnem procesu. Prispevki v Dianoi omogočajo, da tovrstne izkušnje dobite z nadgradnjo pedagoškega procesa in jih predstavite javnosti. Študentje smo pri organizaciji in iskanju obšolskih aktivnosti bolj ali manj angažirani. Pri tem je skupen prostor pomemben dejavnik. V njem se študentje naučimo timskega dela in drugih veščin, ki jih drugače tekom študija ne pridobimo. Dianoia učilnica je tako skupno projektno stičišče študentov, kjer se z uresničevanjem ciljev študentov udejanja poslanstvo revije Dianoia. Še pomembnejši pa je proces, ki se v njej odvija – lahko pa se odvija tudi na daljavo – proces Dianoia tutorstva.

2 Kaj ponuja Dianoia tutorstvo

Dianoia učilnica ponuja prostor za raziskovalno delo in fakultetne obštudijske dejavnosti študentov, kjer Dianoia tutor pomaga z usmerjanjem h kompetencam, znanjem, ki jih za izdelavo kakovostnega prispevka morda primanjkuje. Prvenstveno je to za večino študentov nov proces priprave prispevka, tutor pa ima tudi obsežnejše tehnološke izkušnje in zna pomagati pri iskanju in pridobivanju znanja za prispevku ustrezna tehnološka orodja. Tako vodi, usmerja in motivira študente, da sodelujejo na projektih in nadgrajujejo svoje seminarske naloge in raziskovalno delo. Tutor pomaga z vsebino, največ pa s tehničnim delom revije, skeletom članka in postopkom pisanja in objavljanja prispevka. S poglabljanjem znanja na želenih področjih, usvajanjem veščin sodelovalnega dela in drugih kompetenc, študenti in Dianoia tutor napredujejo v svoji akademski in osebnostni poti.

E-mail naslovi: spela.tertinek@student.um.si (Špela Tertinek), drago.bokal@um.si (Drago Bokal)

3 Kako sodelovati z Dianoia tutorjem

Delo tutorja zajema proces, ki je prikazan v sekvenčnem diagramu na sliki 1. Da se proces začne, avtor ali skupina avtorjev po elektronski pošti na dianoia@um.si izrazi interes za projekt. Tutor ima dostop do učilnice, kjer mentorira študente oziroma bodoče Dianoia avtorje in jih vodi v procesu pisanja in objavljanja članka. Študentje, ki sodelujejo pri projektih, lahko v času odprte vratarnice dobijo ključ do sobe pri vratarju, kjer pustijo svojo študentsko izkaznico. Ob zaprtju vratarnice morajo ključ vrniti, vratar pa jim vrne izkaznico. Izven delovnega časa lahko dostop do Dianoia učilnice omogoči Dianoia tutor.

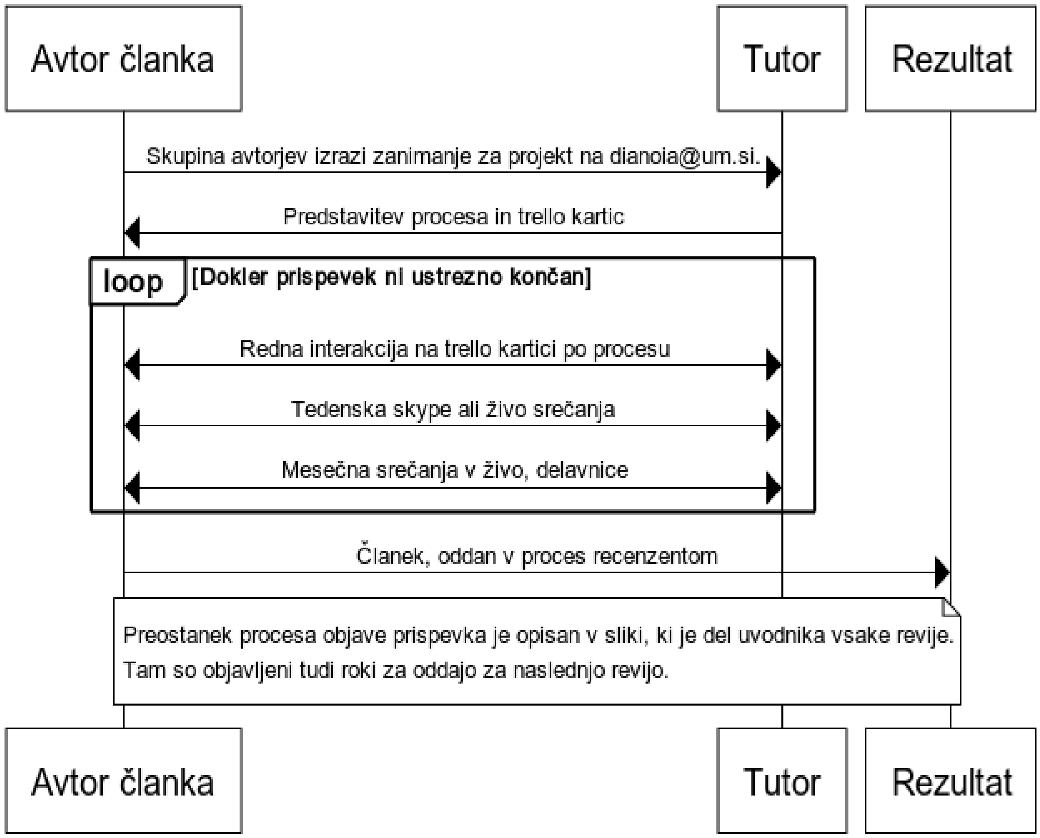
Mentoriranje študentov obsega predvsem predstavitev orodij za pripravo članka in upravljanje z njegovim nastajanjem povezanega procesa. Z nastankom članka je povezano orodje LaTeX(za matematike) ali Word, Excel, za ostale študente. Študentje lahko dobijo tudi pomoč pri statističnih orodjih, kot so SPSS, R, Python. Z upravljanjem procesa je povezana predstavitev Trella, aplikacije za organiziranje dela in drugih dejavnosti, kar je že bilo obravnavano v reviji [4]. Pripravljeni sta predlogi procesa pisanja in objave članka z vsemi vmesnimi koraki in pomembnimi datumi, ki so del projekta. Tutor je študentom dostopen preko maila ali drugega kontakta, tedensko pa s študenti izvaja skype ali žive govorilne ure, kjer se pogovori o odprtih vprašanjih in nastalih problemih. Tutor se redno sestaja z uredniki revije, kjer predebatira svoje tutorske izkušnje, morebitne dodatne možnosti sodelovanja in načine izvajanja. Cilj takšnega sodelovanja je oddan članek, poleg tega pa po korakih pridemo še do drugih rezultatov. Mednje sodijo predvsem kompetence uporabe ustreznih orodij zbiranja in obdelave podatkov, uporabe orodja projektnega vodenja, kompetenca uporabe LaTeX-a, pravilnega navajanja virov in poznavanje procesa objave prispevka v reviji.

4 Primeri zanimivih prispevkov

Dianoia deluje že nekaj let, kar priča o smiselnosti njenega poslanstva. Študenti so objavili precej prispevkov, v katerih si zastavljajo praktična vprašanja in opisujejo razvijanje rešitev za potencialne delodajalce ali druge zainteresirane javnosti. Pri pripravi prispevkov odkrivajo nova orodja in premagujejo izzive, ob katerih v večji ali manjši meri doživljajo zanos, psihološko optimalno izkušnjo [3]. Cilj revije in vzpostavljenega modela dianoia tutorjev je tovrstno optimalno izkušnjo v čim večji meri spodbuditi tako pri pisanju prispevkov in pri njihovi uporabi, branju. Primer prispevka, ki neposredno sledi temu cilju, je članek [2], v katerem so študenti pripravili naloge za spoznavanje matematičnih orodij za lažje razumevanje prej objavljenega znanstvenega članka. Model študentu omogoča, da študijske vsebine prilagodi svojim interesom, zanimanju in tudi poklicu, za katerega se je odločil. Podobno je dosegel Tadej Žerak v svojem prispevku [5]. Vizija obojih prispevkov je podrobneje opisana v uvodniku te revije [1].

5 Omejitve Dianoia tutorstva

Tveganje mentoriranja z Dianoia tutorji je lahko neresnost študentov, ki so navajeni pasivnega, tradicionalnega učenja in ne bi znali izkoristiti priložnosti, ki jo takšna izkušnja podaja, ali bi namesto usmerjanja pomoč razumeli kot vsebinsko delo tutorja. Slednje sicer ni izključeno: če tutor prispeva pomembne zamisli pri rezultatu ali vsebinsko sodeluje v prispevku, lahko postane soavtor. Vendar pa so tutorji na to tveganje opozorjeni in pri prispevku vsebinsko sodelujejo le, kadar je njihov prispevek smiseln in dopolnjuje resno delo



Slika 1: Sekvenčni diagram procesa Dianoia tutorstva.

ekipe. Tveganje se okrepi zaradi natrpanih urnikov glede na čas, ki ga dopuščajo obvezne študijske dejavnosti tekom študijskega semestra. Študentje, ki se odločijo za sodelovanje s tutorjem, morda ugotovijo, da jim vzame preveč časa, preveč dela ali pa primanjkuje navdiha. Vse tri oblike prezasedenosti rešujemo na podoben način: pisanje prispevka ni časovno omejeno, stvar prioritete posameznika pa je, ali vloži zadosti dela in miselnega truda v izdelek, da ga dokonča. Takšna izkušnja lahko razkrije, da študenta določena vsebina ne zanima toliko, kot si je predstavljal. To je pomembna ugotovitev, ki vodi do boljše odločitve za kariero po študiju. Z zadostno vztrajnostjo pa najdemo vsebino in poklic, v katerem lahko uživamo. Ko najdemo še delodajalca, ki ponuja delo s tako vsebino, smo tako našli našo pot do izpolnjujočega poklica.

Literatura

[1] D. Bokal. Na študenta osredotočeno poučevanje skozi vključevanje v raziskovalno delo. Dianoia 4 (2020)

[2] M. Csikszentmihalyi. Flow: The psychology of happiness. Random House, 2013.

[3] J. Dimič, A. Lakner, K. Potočan, D. Bokal. Uvod v linearno programiranje in stohastične procese

[4] P. Fic. Premaknjeno v Objavljeno: Uporaba Trella pri upravljanju vsebin. Dianoia 2 (2018). 15-24

[5] T. Žerak, D. Bokal. Razigran uvod v 2-prekrižno-kritične grafe. Dianoia 3 (2019): 101–108.

Dianoia 4 (2020) 15–27

Uvod v linearno programiranje in stohastične procese
An Introduction to Linear Programming and Stochastic Processes

Jaša Dimič, Anamarija Lakner, Karmen Potočan, Drago Bokal
Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko Koroška cesta 160, 2000 Maribor, Slovenija

Povzetek

Leta 2019 sta Bokal in Steinbacher objavila članek z naslovom Faze psihološko optimalne učne izkušnje: model razporejanja časa na podlagi nalog. Članek obravnava model čustvenih stanj posameznika med procesom učenja. Uporabljenih je več matematičnih konceptov, s pomočjo katerih avtorja raziščeta simulacijo. Simulacije čustvenih stanj posameznikov glede na različne parametre (vztrajnost, strast in učljivost). Za lažje in boljše razumevanje članka in procesov, ki so predstavljeni v njem, smo pripravili tri sklope uvodnih nalog, ki posameznika z gimnazijskim razumevanjem matematike uvedejo v razumevanje v članku uporabljenih konceptov. Naloge v vsakem sklopu bralca postopoma vodijo od spoznavanja osnovnih pojmov in definicij do enostavnih nalog, kasneje pa prav tako tudi do težjih primerov.

Ključne besede: Python, stohastični procesi, naključne spremenljivke, linearno programiranje, problem nahrbtnika, 0/1 nahrbtnik, Markovske verige, matematično upanje, matematični model.

Abstract

In 2019 Bokal and Steinbacher published an article titled *Phases of Psychologically Optimal Learning Experience: Task-based Time Allocation Model* that introduces the model of emotional states in the process of learning. A simulator of emotional states, based on different parameters (persistence, passion and learning ability) was developed, using several mathematical concepts. Given that the text could be too challenging for population with high-school knowledge of mathematics, we have constructed three parts of tasks that will help with understanding of processes and concepts, used in the model. In this paper, reader will first be acquainted with basic terms and definitions, simple tasks will follow, and lastly, some examples of more complex tasks are presented as well.

Key words: Phyton, stochastic processes, random variables, linear programming, knapsack problem, 0/1 knapsack problem, Markov chains, expected value, mathematical model.

1 Uvod

Članek *Phases of psychologically optimal learning experience: task-based time allocation model* – Faze psihološko optimalne učne izkušnje: model razporejanja časa na podlagi nalog (Bokal, Steinbacher) [1] se ukvarja z raziskovanjem čustvenih stanj posameznika med procesom učenja glede na zahtevnost naloge in stopnjo znanja. Cilj nalog, ki sledijo v nadaljevanju pričujočega članka, je, da bralec spozna osnovne matematične koncepte, ki so uporabljeni v članku. Z reševanjem nalog bralec pridobi ustrezno matematično osnovo za razumevanje članka. Prav tako se spozna s programskim jezikom Python. Akademijo sestavljajo naloge, ki so razdeljene v tri sklope, pri čemer si v vsakem sklopu sledijo od osnovnih do nekoliko zahtevnejših.

E-mail naslovi: jassadimic@gmail.com (Jaša Dimič), anamarija.lakner@gmail.com (Anamarija Lakner), karmen.potocan@gmail.com (Karmen Potočan), drago.bokal@um.si (Drago Bokal)

2 Linearno programiranje

Naloga 2.1. S pomočjo literature [9] se poučite o preprostem problemu nahrbtnika in o 0/1 nahrbtniku.

Namig. Preprost problem nahrbtnika in 0/1 nahrbtnik se razlikujeta le v eni omejitvi.

Naloga 2.2. Študent ima na voljo osem ur na dan za študentska dela. V spodnji tabeli so zapisana dela, med katerimi lahko izbira, ter kolikšno je plačilo in trajanje posameznega dela.

Ime dela	Plačilo v €	Trajanje v urah
Programiranje	10	2
Ankete	12	3
Strežba	18	4
Dostava	20	5
Inštrukcije	22	4

Z uporabo problema nahrbtnika poišči takšno kombinacijo del, da bo študentu prinesla največji zaslužek, pri pogoju:

1. trajanje del se lahko krajša, tako da dela ni treba opraviti v celoti,
2. trajanje del se ne krajša, tako da vsako delo opravimo v celoti.

Namig. V našem primeru trajanje dela v urah pomeni volumen pri preprostem problemu nahrbtnika oz. 0/1 nahrbtniku.

Rešitev.

1.
   - $c[i]$ = plačilo za i-to delo
   - $v[i]$ = trajanje i-tega dela
   - $x[i]$ = delež i-tega dela
   - Maksimirati želimo:

     $$\sum_{i=1}^{5} c[i] \cdot x[i]$$

     Pri pogojih:

     $$\sum_{i=1}^{5} v[i] \cdot x[i] \leq 8, i = 1, 2, 3, 4, 5$$

     $$0 \leq x[i] \leq 1, i = 1, 2, 3, 4, 5$$

     $$0 < v[i] \leq 8, i = 1, 2, 3, 4, 5$$

     $$c[i] \; > 0, i = 1, 2, 3, 4, 5$$

   - Pogledamo razmerja, ki pomenijo urne zaslužke, in jih uredimo od največje do najmanjše vrednosti:

     $$\frac{c[i]}{v[i]} \geq \frac{c[i+1]}{v[i+1]}; i = 1, 2, 3, 4, 5$$

- Dobimo:

i	Ime dela	Razmerje $\frac{€}{h}$
1	Programiranje	5
2	Ankete	4
3	Strežba	4.5
4	Dostava	4
5	Inštrukcije	5.5

- Ureditev: inštrukcije, programiranje, strežba, ankete, dostava. Dela od leve proti desni izbiramo tako dolgo, dokler ne izberemo del v celoti. Torej izberemo inštrukcije in programiranje. Ostaneta dve uri za delo, zato izberemo še strežbo za polovični čas.
- Izračunamo zaslužek:

$$c[1] \cdot 1 + c[2] \cdot 0 + c[3] \cdot \frac{1}{2} + c[4] \cdot 0 + c[5] \cdot 1 = 41.$$

2. Rešitev z zlivanjem (literatura: [6]).

- Dela uredimo nepadajoče po plačilu: $c = (10, 12, 18, 20, 22)$, $v = (2, 3, 4, 5, 4)$. Gledamo pare $(v[i], c[i])$. Na prvem koraku začnemo z $(0, 0)$ ter dodamo prvo delo $(2, 10)$. Na vsakem naslednjem koraku prepišemo, kaj smo dobili na prejšnjem, ter dodamo naslednje delo tako, da vsem parom prejšnjega koraka prištejemo $(v[i], c[i])$. Če na koraku i v nekem paru $(v[i], c[i])$ število ur preseže osem ali če obstaja par z istim številom ur in večjim zaslužkom, potem par $(v[i], c[i])$ črtamo.

Korak	$(v[i], c[i])$
1	$(0, 0)$ $(2, 10)$
2	$(0, 0), (2, 10)$ $(3, 12), (5, 22)$
3	$(0, 0), (2, 10), (3, 12), (5, 22)$ **(4,18)**, $(6, 28), (7, 30), \cancel{(9, 40)}$
4	$(0, 0), (2, 10), (3, 12), (5, 22), (4, 18), (6, 28), (7, 30)$ $(5, 20), (7, 30), (8, 32), \cancel{(10, 42)}, \cancel{(9, 38)}, \cancel{(11, 48)}, \cancel{(12, 50)}$
5	$(0, 0), (2, 10), (3, 12), (5, 22), (4, 18), (6, 28),$ $(7, 30), (5, 20), (7, 30), (8, 32)$ $(4, 22), (6, 32), (7, 34), \cancel{(9, 44)}$, **(8,40)**, $\cancel{(10, 50)},$ $\cancel{(11, 52)}, \cancel{(9, 42)}, \cancel{(11, 52)}, \cancel{(12, 54)}$

Na zadnjem koraku poiščemo par z največjim zaslužkom, to je $(8, 40)$. Ker se prvič pojavi na petem koraku in smo ga dobili s tem, da smo k $(4, 18)$ prišteli $(4, 22)$, sta rešitev deli strežba in inštrukcije.

- Največji možni zaslužek je torej 40 €:

$$c[1] \cdot 0 + c[2] \cdot 0 + c[3] \cdot 1 + c[4] \cdot 0 + c[5] \cdot 1 = 40.$$

- Požrešna metoda (izbiranje del po vrsti kot pri 1.) ne da optimalne rešitve:

$$c[1] \cdot 1 + c[2] \cdot 0 + c[3] \cdot 0 + c[4] \cdot 0 + c[5] \cdot 1 = 32.$$

Naloga 2.3. S pomočjo literature [8] se poučite o linearnem programiranju in linearnem modelu.

Namig. Osredotočite se na to, kako pri linearnem modelu določiti omejitve parametrov in kriterijsko funkcijo, ter kako izračunati maksimalno\minimalno vrednost le-te na računski in grafični način.

Naloga 2.4. Študent ima na voljo osem ur na dan za študentska dela. V spodnji tabeli so zapisana dela, med katerimi lahko izbira, ter kolikšno je plačilo in trajanje posameznega dela.

Ime dela	Plačilo v €	Največ koliko ur tega dela lahko opravi
Programiranje	5	24
Anketiranje	4	32

S pomočjo linearnega modela izračunajte, koliko katerega dela je študentu vredno opravit, če ima na voljo 40 ur za delo.

Rešitev.

- Določimo kriterijsko funkcijo.
  Kriterijska funkcija pomeni skupni zaslužek pri opravljanju dela. Označimo število opravljenih ur programiranja z x in število ur anketiranja z y. Delo x je plačano 5 € na uro, delo y pa 4 € na uro. Če bo študent opravil x ur prvega dela in y ur drugega dela, bo skupaj plačan $5x + 4y$ €. Dobimo kriterijsko funkcijo:

  $$f(x, y) = 5x + 4y.$$

  Študent želi maksimizirati svoj zaslužek, zato moramo poiskati maksimum kriterijske funkcije:

  $$\max f(x, y) = \max(c_1 x + c_2 y).$$

- Določimo omejitve.
  Študent ima v enem tednu za delo na voljo največ 40 ur:

  $$x + y \leq 40.$$

  Vrednost obeh spremenljivk mora biti pozitivna:

  $$x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Računski način:

- Določimo presečišča dobljenih premic in izračunamo vrednost kriterijske funkcije v njih:

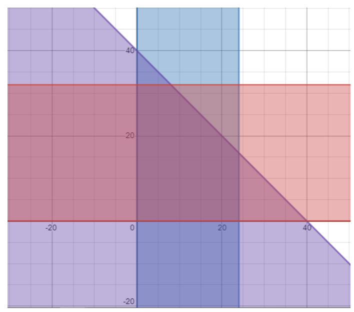
- $T_1 = (0, 32)$, $f(0, 32) = 5 \cdot 0 + 4 \cdot 32 = 128$,
- $T_2 = (8, 32)$, $f(8, 32) = 5 \cdot 8 + 4 \cdot 32 = 168$,
- $T_3 = (24, 16)$, $f(24, 16) = 5 \cdot 24 + 4 \cdot 16 = 184$,
- $T_4 = (24, 0)$, $f(24, 0) = 5 \cdot 24 + 4 \cdot 0 = 120$.

Funkcija zavzame maksimalno vrednost v točki $T_3 = (24, 16)$, torej $x = 24$ in $y = 16$.

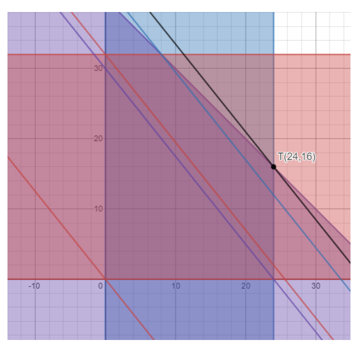
Naloga 2.5. Nalogo 2.4 rešite še z uporabo grafične metode.

Rešitev. **Grafična metoda** (barvna različica slik je dostopna v spletni izdaji revije):

- Narišemo lik, ki ga omejujejo vse dobljene enačbe premic.



- Iščemo maksimum funkcije, torej premico vzporedno premikamo čim višje, vendar tako, da se še vedno dotika lika. Ta vzporednica se dotika lika v točki T, torej v tej točki funkcija doseže maksimum.



Točka T je presečišče premic $x = 24$ in $x + y = 40$. Torej je točka $T(24, 16)$.

- Maksimum kriterijske funkcije je torej enak $f(x, y) = 5 \cdot 24 + 4 \cdot 16$. To pomeni, da bo študent zaslužil največ, če bo opravil 24 ur programiranja in 46 ur anketiranja.

Naloga 2.6. Poučite se o programskem jeziku AMPL in z njegovo pomočjo še enkrat rešite nalogo 1.3.

Rešitev.

- Datoteka .mod:

```
var x;
var y;

maximize produkt: 5*x + 4*y;

subject to p1: x <= 24;
subject to p2: y <= 32;
subject to p3: x + y <=40;
```

- Datoteka .run:

```
solve;

display x,y;
```

- Izpis rešitve:

```
Presolve eliminates 2 constraints.
Adjusted problem:
2 variables, all linear
1 constraint, all linear; 2 nonzeros
        1 inequality constraint
1 linear objective; 2 nonzeros.

CPLEX 12.9.0.0: threads=4
CPLEX 12.9.0.0: optimal solution; objective 184
0 dual simplex iterations (0 in phase I)
x = 24
y = 16
```

Naloga 2.7. S pomočjo literature [6] se poučite o programskem jeziku Python in knjižnici PuLP ter ponovno rešite nalogo 2.4.

Rešitev.

```
import pulp as p

#ustvari maksimizacijski problem
problem = p.LpProblem("studentskoDelo", p.LpMaximize)

#ustvari spremenljivki
x = p.LpVariable("x", lowBound = 0, upBound = 24) #programiranje
y = p.LpVariable("y", lowBound = 0, upBound = 32) #anketiranje

#kriterijska funkcija
problem += 4*x + 5*y

#omejitve
problem += x + y <= 40
```

```
status = problem.solve()   # Solver
print(p.LpStatus[status])   # status resitve

print(p.value(x), p.value(y), p.value(problem.objective))
```

Izpis:

```
Optimal
Programiranje: 17.0 Anketiranje: 23.0 Zaslužek:183.0
```

Naloga 2.8. Ponovno rešite nalogo 2.4, pri spremenjenem plačilu za posamezno delo in predpostavki, da mora študent z opravljenim delom pridobiti dovolj izkušenj. Izkušnje bomo merili s koeficientom izkušenj k. Študent s programiranjem pridobi $1.7k$ na uro, z anketiranjem pa $0.7k$ izkušenj na uro. Skupaj mora pridobiti vsaj 40k izkušenj.
Za reševanje uporabite programski jezik Python in knjižnico PuLP.

Ime dela	Plačilo v €	Največ koliko ur tega dela lahko opravi	Koeficient izkušenj
Programiranje	4	24	1.7
Anketiranje	5	32	0.7

Rešitev.

```
import pulp as p

#ustvari maksimizacijski problem
problem = p.LpProblem("studentskoDelo", p.LpMaximize)

#ustvari spremenljivki
x = p.LpVariable("x", lowBound = 0, upBound = 24) #programiranje
y = p.LpVariable("y", lowBound = 0, upBound = 32) #anketiranje

#kriterijska funkcija
problem += 4*x + 5*y

#omejitve

problem += x + y <= 40
problem += 1.7*x + 0.7*y >= 45

status = problem.solve()   # Solver
print(p.LpStatus[status])   # status resitve

print(p.value(x), p.value(y), p.value(problem.objective))
```

Izpis:

```
Optimal
Programiranje: 8.0 Anketiranje: 32.0 Zaslužek:192.0
```

3 Naključne spremenljivke

Naloga 3.1. Poučite se o naključnih spremenljivkah X ter o matematičnem upanju $E(X)$.

Naloga 3.2. Študent opravlja študentsko delo, in sicer **opravljanje anket**. V eni uri lahko opravi največ štiri ankete. Verjetnost, da ne opravi nobene ankete v eni uri ali da opravi štiri ankete, je 0.15, verjetnost dveh opravljenih anket v eni uri je 0.30. Verjetnosti, da opravi v eni uri eno anketo ali tri ankete, sta enaki. Zapiši naključno spremenljivko X, ki naj pomeni število opravljenih anket v eni uri. Koliko je pričakovano število anket, ki jih študent opravi v eni uri?

Rešitev. X lahko zapišemo kot diskretno naključno spremenljivko z verjetnostno shemo:

$$X : \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix}$$

kjer x_i predstavlja število opravljenih anket v eni uri. Ker mora veljati: $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$, in vemo, da $p_1 = p_3$, izračunamo: $2 \cdot p_1 = 0.4 \implies p_1 = p_3 = 0.2$.
Iz tega dobimo:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.15 & 0.20 & 0.30 & 0.20 & 0.15 \end{pmatrix}$$

Če želimo dobiti pričakovano število opravljenih anket v eni uri, moramo izračunati matematično upanje $E(X) = \sum_{i=1}^{4} p_i x_i = 2$

Torej študent lahko pričakuje, da bo v eni uri povprečno opravil 2 anketi.

Naloga 3.3. Študent opravlja ankete in za to v eni uri prejme plačilo 4.5 €. Naj slučajna spremenljivka X predstavlja število opravljenih anket v eni uri in naj bo porazdeljena enako kot v nalogi 3.2. Delodajalec se odloči stimulirati študenta in uvede plačilo za vsako opravljeno anketo (namesto urne postavke). Koliko mora znašati plačilo za posamezno anketo, da študent dobi vsaj 7 € z verjetnostjo 0.65? Koliko bo v tem primeru pričakovan zaslužek? Ali je v tem primeru bolje plačan kot v primeru fiksne postavke?

Rešitev. Naj cX pomeni plačilo za vsako opravljeno anketo.
Zanima nas $P(cX = 7) = 0.65$, kjer nam slučajna spremenljivka cX predstavlja plačilo za opravljeno anketiranje v eni uri.

$$\implies cX : \begin{pmatrix} 0 & c & 2c & 3c & 4c \\ 0.15 & 0.20 & 0.30 & 0.20 & 0.15 \end{pmatrix}$$

Ker je $0.65 = 0.15 + 0.2 + 0.3$, sledi $0 + c + 2c = 7 \implies c = \dfrac{7}{3} \doteq 2.33$.
Iz tega izračunamo še pričakovan zaslužek v eni uri:

$$E(cX) = 2c \doteq 4.67$$

Ker je pričakovan zaslužek 4.67 €, kar je več kot 4.5 €, je bolje plačan v primeru plačila na posamezno anketo.

Naloga 3.4. Študent izbira med dvema študentskima deloma, in sicer med programiranjem in opravljanjem anket. Naj naključna spremenljivka X predstavlja število uspešno odpravljenih napak (*bug-ov*) v programski kodi na uro in Y število opravljenih anket v eni uri. Za vsako odpravljeno napako dobi 5 €, medtem ko za vsako opravljeno anketo dobi 4.2 €. Katero delo se študentu bolje izplača z vidika zaslužka glede na podani slučajni spremenljivki X in Y?

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & .. & 7 \\ 0.10 & 0.35 & 0.30 & 0.20 & 0.05 & 0 & .. & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & .. & 10 \\ 0.05 & 0.20 & 0.35 & 0.30 & 0.10 & 0 & .. & 0 \end{pmatrix}$$

Rešitev. Najprej moramo izračunati pričakovano število odpravljenih napak in opravljenih anket v eni uri:

$$E(X) = 1.75$$

in

$$E(Y) = 2.20$$

To pomeni, da bo pričakovan zaslužek študenta:

- pri pogramiranju: $1.75 \cdot 5 = 8.75$,
- pri opravljanju anket: $2.20 \cdot 4 = 9.24$.

Študent torej pri danih verjetnostih več zasluži z opravljanjem ankete.

4 Stohastični procesi

Naloga 4.1. S pomočjo literature [7] se poučite o stohastičnih procesih in markovskih verigah.

Naloga 4.2. Študent opravlja študentsko delo, in sicer opravljanje anket. Z vsako uro opravljenega dela študent pridobiva znanje in izkušnje. Na začetku (v 0. uri) je porazdelitev verjetnosti za število opravljenih anket enako:

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vsako uro se študent iz stanja i opravljenih anket premakne v stanje j opravljenih anket z verjetnostjo $p_{ij} = P[X_n = j | X_{n-1} = i]$. Te verjetnosti so obravnavane v prehodni matriki P.
Izračunajte, kakšna je porazdelitev verjetnosti za opravljeno število anket v prvi uri X_1 ter koliko je pričakovano število anket, ki jih študent opravi v prvi uri $E(X_1)$.

$$P = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.35 & 0.20 & 0.10 & 0.05 & 0.05 & 0.03 & 0.02 \\ 0.05 & 0.25 & 0.35 & 0.15 & 0.10 & 0.05 & 0.03 & 0.02 \\ 0.05 & 0.10 & 0.15 & 0.35 & 0.20 & 0.10 & 0.03 & 0.02 \\ 0.03 & 0.07 & 0.10 & 0.15 & 0.20 & 0.25 & 0.15 & 0.05 \\ 0.02 & 0.05 & 0.08 & 0.10 & 0.15 & 0.25 & 0.25 & 0.10 \\ 0.02 & 0.05 & 0.08 & 0.10 & 0.10 & 0.15 & 0.25 & 0.25 \\ 0.01 & 0.02 & 0.04 & 0.06 & 0.08 & 0.10 & 0.35 & 0.34 \\ 0.01 & 0.02 & 0.03 & 0.05 & 0.06 & 0.07 & 0.08 & 0.68 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. $X_1 = X_0 \cdot P = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.35 & 0.20 & 0.10 & 0.05 & 0.05 & 0.03 & 0.02 \end{bmatrix} \implies E(X_1) = X_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} = 1.82$

Naloga 4.3. Izračunajte, kolikšna je verjetnost, da bo v drugi uri študent opravil tri ankete.

Rešitev. Za rešitev naloge potrebujemo četrti element v verjetnosti porazdelitve X_2. Ker $X_2 = X_1 \cdot P$, lahko četrti element porazdelitvenega vektorja X_{2_4} dobimo tako, da X_1 skalarno pomnožimo zgolj s četrtim stolpcem prehodne matrike P, ki ga označimo s $(P)_4$. $\implies (X_2)_4 = X_1 \cdot (P)_4 = 0.1703$

Naloga 4.4. S pomočjo literature [5] se poučite, kako v programskem jeziku Python iz tekstovne datoteke preberemo podatke ter o modulu numpy in linalg.

Naloga 4.5. V programskem jeziku Python napišite funkcijo, ki iz dane tekstovne daoteke prebere matriko. Funkcija naj za parameter prejme pot do tekstovne datoteke, v kateri je v prvi vrstici podano število vrstic in stolpcev matrike, nato pa vrednosti matrike. Prav tako napišite funkcijo, ki izpiše matriko (matrika naj bo podana kot parameter).

Rešitev.
```
def beriIzDatoteke(pot_datoteke):
    #odpremo datoteko
    dat = open(pot_datoteke, "r")
    velikost = dat.readline()
    print("Martika␣ima:␣" + velikost + "␣vrstic␣in␣stolpcev␣\n")
    #ustvarimo matriko
    matrika =[]
    for i in range(int(velikost)):
        preberi_vrstico = dat.readline()
        elementi = preberi_vrstico.split()
        vrstica=[]
        for j in range(len(elementi)):
            elt = float(elementi[j])
            vrstica.append(elt)
        matrika.append(vrstica)
    return matrika


#izpisemo matriko
```

```
def izpisiMatriko(matrika):
    for i in range(len(matrika)):
        vrstica = []
        for j in range(len(matrika)):
            vrstica.append(matrika[i][j])
        print(vrstica)
```

Izpis:

```
Matrika ima: 8 vrstic in stolpcev
[0.2, 0.35, 0.2, 0.1, 0.05, 0.05, 0.03, 0.02]
[0.05, 0.25, 0.35, 0.15, 0.1, 0.05, 0.03, 0.02]
[0.05, 0.1, 0.15, 0.35, 0.2, 0.1, 0.03, 0.02]
[0.03, 0.07, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.15, 0.05]
[0.02, 0.05, 0.08, 0.1, 0.15, 0.25, 0.25, 0.1]
[0.02, 0.05, 0.08, 0.1, 0.1, 0.15, 0.25, 0.25]
[0.01, 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.1, 0.35, 0.34]
[0.01, 0.02, 0.03, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.68]
```

Naloga 4.6. S pomočjo programskega jezika Python preverite svoje rezultate iz nalog 4.2 in 4.3.

Rešitev.

```
P = beriIzDatoteke("MarkovskaVeriga.txt")
izpisiMatriko(P)

import numpy as np
from numpy import linalg as la
#ustvarimo polje/stolpec za zacetno stanje X0
X_0 = np.zeros(8)
X_0[0] = 1
print("X_0␣=␣", X_0, "\n")
#izracunamo, kaksna je porazdelitev verjetnosti za
#stevilo opravljenih anket v prvi uri - X1 = X0*P
X_1 = np.dot(X_0,P)
print("X_1␣=␣", X_1, "\n")

#izracunajmo se pricakovano stevilo anket v prvi uri
A = np.arange(0,8)
print(A)
E_1=np.dot(X_1, A)
print("Pricakovano␣stevilo␣opravljenih␣anketi␣v␣prvi␣uri␣je:␣", E_1,
 "\n")

#verjetnost, da student v drugi uri opravi 3 ankete
X_2 = np.dot(X_1,P)
print("Verjetnost,␣da␣student␣v␣drugi␣uri␣opravi␣3␣ankete␣je:", X_2[3])
```

Izpis:

```
X_0 =  [1. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.]
X_1 =  [0.2  0.35 0.2  0.1  0.05 0.05 0.03 0.02]
[0 1 2 3 4 5 6 7]
Pričakovano število opravljenih anketi v prvi uri je:  1.82
Verjetnost, da študent v drugi uri opravi 3 ankete, je: 0.1703
```

Naloga 4.7. V Pythonu izračunajte porazdelitev verjetnosti za število opravljenih anket v 40. uri ter pričakovano število opravljenih anket v 40. uri.

Rešitev.

```
#izracunamo vrednost prehodne matrike v 40 uri - P_40 oz P^40
P_40 = la.matrix_power(P,40)
print("P_40 = ", P_40, "\n")

#izracunamo porazdelitev verjetnosti za opravljeno stevilo anket
#v 40-ti uri X_40 = X_0*P_40
X_40 = np.dot(X_0, P_40)
print("X_40 = " , X_40, "\n")

E_40 = np.dot(X_40, A)
print("Pricakovano stevilo opravljenih anketi v 40-ti uri je: ", E_40,
 "\n")
```

Izpis:

```
X_40 =  [0.02504376 0.0614231 0.08469913 0.1066254 0.10680093
0.12400385 0.16183876 0.32956507]
Pričakovano število opravljenih anketi v 40-ti uri je:  4.8759086
```

Naloga 4.8. V Pythonu izračunajte, kolikšno je pričakovano število anket, ki jih bo študent opravil v celem tednu (v 40 urah dela).

Rešitev.

```
#izracunajmo pricakovano stevilo opravljenih anket po celem tednu
stAnket = 0
for i in range(40):
    Pi =  la.matrix_power(P,i)
    Xi = np.dot(X_0, Pi)
    Ei = np.dot(Xi, A)
    stAnket = stAnket + Ei
print("Pricakovano stevilo opravljenih anket po celem tednu je: "
 , stAnket, "\n")
```

Izpis:

```
Pričakovano število opravljenih anket po celem tednu je:  182.5093
```

5 Zaključek

Z nalogami so bili bralcu podani osnovni koncepti linearnega programiranja ter metod, s katerimi se lahko takšen problem reši. S pomočjo Markovskih verig smo bralcu skušali približati uporabo stohastičnih procesov v vsakdanjem življenju (pri opravljanju študentskega dela). Prav tako so bile predstavljene osnove programskega jezika Python, saj veliko nalog zahteva tudi rešitev v obliki programske kode.

Z reševanjem nalog bralec pridobi ustrezno matematično podlago za razumevanje članka [1]. Po opravljenih in pravilno rešenih nalogah tako sedaj boljše razume matematično ozadje procesov, predstavljenih v članku. V nadaljevanju bi bilo treba razumevanje razširiti in sestaviti sklope nalog, ki bodo bralca vodile do razumevanja simulacij, opravljenih v članku. Simulacije bi morali najprej izvajati na enem posamezniku, nato pa z več posamezniki hkrati.

Če so vam bile naše naloge zanimive ali pa vam je bil zanimiv koncept, kako so bile obravnavane, vas vabimo, da na naslov dianoia@um.si pošljete podoben prispevek. V njem na podoben način obdelate uporabljene koncepte, ki se vam zdijo težje dostopni. Prav tako se lahko na zgoraj navedeni naslov obrnete v primeru vprašanj in bomo podoben prispevek poskusili organizirati v uredništvu.

Literatura

[1] Bokal, D., Steinbacher, M. Phases of psychologically optimal learning experience: task-based time allocation model. Cent Eur J Oper Res 27, 863–885 (2019).

[2] Bokal, D. and Žerak, T., Playful introduction to 2-crossing-critical graphs, Dianoia 3 (2019) 101-108.

[3] Csikszentmihalyi, M. Good business: Leadership, flow, and the making of meaning. Penguin, 2004.

[4] Kozak, J., Štalec, M. Podatkovne strukture in algoritmi. Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, 1986.

[5] Matthes, E. Python crash course: a hands-on, project-based introduction to programming. No Starch Press, 2015.

[6] Optimization with PuLP, dostopno na: https://pythonhosted.org/PuLP/, datum dostopa: 24. 02. 2020

[7] Parzen, E. Stochastic processes. Vol. 24. SIAM, 1999.

[8] Sierksma, G., Zwols, Y. Linear and integer optimization: theory and practice. Chapman and Hall/CRC, 2015.

[9] Toth, P., Martello, S. Knapsack problems: Algorithms and computer implementations. Wiley, 1990.

Dianoia 4 (2020) 29-38

Barvanja grafov v vsakdanjem življenju

Graph coloring in everyday life

Jasmina Ferme, Daša Štesl

Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko ter Pedagoška fakulteta, Koroška cesta 160, 2000 Maribor, Slovenija

Povzetek

V članku bomo predstavili barvanja vozlišč grafov in primere uporabe tega koncepta. Ogledali si bomo, kako lahko s pomočjo barvanj grafov rešimo problem barvanja zemljevidov, osnujemo urnike in optimalno semaforiziramo križišča. Seznanili se bomo tudi z novejšima različicama barvanja grafov, to sta L(2,1)-barvanje in pakirno barvanje, ki sta bili razviti v reševanju problema dodeljevanja frekvenc radijskim oddajnikom.

Ključne besede: teorija grafov, barvanje grafa, L(2,1)-barvanje, pakirno barvanje, uporaba barvanj grafov.

Abstract

In this paper, we will present the concept of graph coloring and some examples of its applications. We will see, how graphs are useful in problems of map coloring, scheduling problems, and intersect traffic lights problems. We will also consider two variants of graph coloring, namely a L(2,1)-coloring and a packing coloring. Both of them have been developed in order to solve the problem of assigning frequencies to the radio transmitters.

Key words: graph theory, graph coloring, L(2,1)-coloring, packing coloring, application of graph coloring.

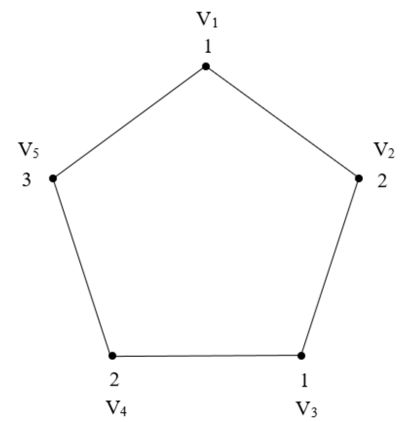
1 UVOD

Teorija grafov sodi med novejša področja matematike. Njeni začetki namreč segajo v 18. stoletje. Kljub poznim začetkom je teorija grafov doživela hiter razvoj in tako je danes eno izmed najbolj uveljavljenih in raziskovanih področij matematike. Eden izmed razlogov za hiter razvoj in uveljavljenost te vede v svetu je gotovo širok spekter možnosti uporabe rezultatov s tega področja v realnem življenju. Da bi bolje spoznali to vejo matematike, najprej poglejmo, kaj je temelj njenega raziskovanja.

Teorija grafov preučuje značilnosti struktur, ki jih imenujemo grafi. Graf $G = (V, E)$ sestavljata neprazna množica točk V (imenujemo jih vozlišča grafa G) in množica E, podmnožica neurejenih parov elementov množice V (imenujemo jih povezave grafa G). Neurejeni par $\{u, v\}$, $u, v \in V$, krajše zapišemo kot uv. Pravimo, da sta $u, v \in V$ krajišči povezave uv.

Oglejmo si preprost primer grafa, prikazanega na sliki 1. Množica vozlišč tega grafa je $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, množica povezav pa $E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1\}$.

E-mail naslov/i: jasmina.ferme1@um.si (Jasmina Ferme), dasa.stesl1@um.si (Daša Štesl)



Slika 1: Primer grafa in njegovega optimalnega barvanja.

Barvanje vozlišč grafa, ki se mu bomo podrobneje posvetili v nadaljevanju članka, sodi med starejše in zelo raziskovane teme v teoriji grafov. Definirano je kot preslikava, ki vsakemu vozlišču grafa dodeli barvo (te po navadi označimo s števili), tako da poljubni dve sosednji vozlišči (vozlišči, med katerima obstaja povezava) prejmeta različni barvi (števili). Tako definiranemu barvanju vozlišč grafa pravimo dobro barvanje. Najmanjše število barv, ki jih potrebujemo za dobro barvanje vozlišč grafa, pa imenujemo kromatično število grafa, $\chi(G)$. Barvanju vozlišč grafa s $\chi(G)$ barvami pravimo optimalno barvanje.

Za lažjo predstavo si oglejmo barvanje grafa iz prejšnjega primera. Poglejmo, najmanj koliko barv je potrebnih, da pobarvamo graf na sliki 1. Vozlišči v_1 in v_2 sta sosednji, zato morata prejeti različni barvi. Brez izgube za splošnost predpostavimo, da smo vozlišče v_1 pobarvali z barvo 1, vozlišče v_2 pa z barvo 2. Vozlišče v_3 je sosednje z v_2, zato ne sme prejeti barve 2, lahko pa prejme barvo 1, ki je dodeljena vozlišču v_1. Podobno lahko vozlišče v_4 prejme barvo 2, saj je v_4 sosednje z vozliščem v_3, ki je pobarvano z barvo 1, ni pa sosednje z vozliščem, ki je prejelo barvo 2. Pobarvati moramo še vozlišče v_5. To je sosednje z vozliščem v_1, ki je prejelo barvo 1, in z vozliščem v_4, ki je prejelo barvo 2, zato moramo zanj uporabiti novo barvo, barvo 3. Ker nam je graf G uspelo dobro pobarvati s tremi barvami, velja $\chi(G) \leq 3$. Hitro pa lahko tudi preverimo, da vseh vozlišč nikakor ne moremo dobro pobarvati le z uporabo dveh barv, kar implicira tudi obratno neenakost. Tako zaključimo, da je kromatično število tega grafa enako številu 3. Na sliki 1 je prikazano optimalno barvanje tega grafa.

Zaradi velikega zanimanja raziskovalcev za barvanja vozlišč v grafih in njihove uporabne vrednosti so bile iz zgoraj opisanega barvanja izpeljane številne variacije barvanj. Omenimo nekatere izmed njih. Te so: seznamsko barvanje, dominatorno barvanje, razdaljno barvanje ter pakirno barvanje. V članku najprej predstavimo nekaj primerov uporabe (klasičnega) barvanja grafov v vsakdanjem življenju. Nekateri izmed njih so bili obravnavani že v [5]. Sledi še obravnava razdaljnega in pakirnega barvanja ter navedba možnosti uporabe slednjih.

2 PRIMERI UPORABE (KLASIČNEGA) BARVANJA VOZLIŠČ

Najprej si bomo ogledali enega najznamenitejših problemov iz teorije grafov, to je barvanje zemljevidov. Slednje pravzaprav pomeni podlago za razvoj koncepta barvanja grafov. Nato si bomo ogledali, kako nam lahko barvanje grafov pomaga pri načrtovanju urnikov in

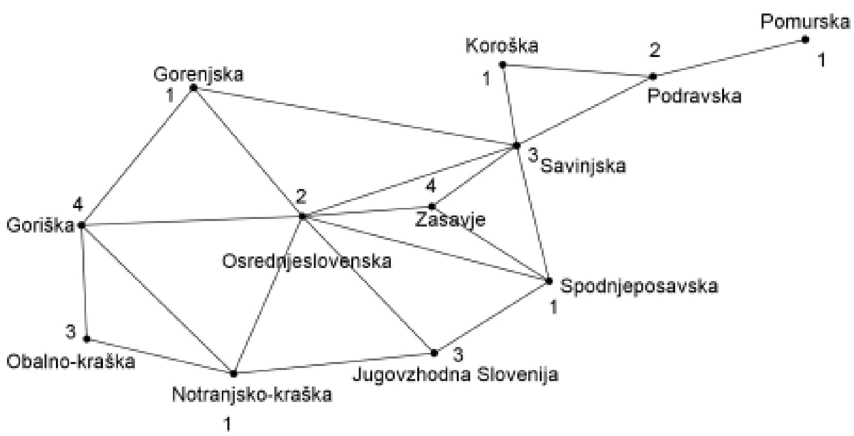
semaforizaciji križišč. In kaj je skupnega vsem tem primerom in podobnim problemom, ki jih lahko rešimo s pomočjo barvanj grafov? To, da v vseh teh (optimizacijskih) problemih prihaja do situacij, v katerih nekateri dogodki ne smejo potekati sočasno, neke stvari/zadeve ne smejo stati poleg drugih, nimajo skupnih lastnosti itd. Zato jih lahko rešujemo na analogen način.
Podobno bi lahko s pomočjo teorije grafov in barvanj teh reševali tudi igro Sudoku, rešili problem skladiščenja kemikalij, pri katerem nekaterih kemikalij zaradi možnosti medsebojne reakcije ne smemo skladiščiti skupaj, organizirali termine pisanja izpitov, in še veliko drugih podobnih problemov.

Barvanje zemljevida

Leta 1852 je južnoafriški matematik Francis Guthrie barval zemljevid angleških grofij na način, da poljubni dve grofiji s skupno mejo prejmeta različni barvi. Opazil je, da so za tako barvanje potrebne le štiri barve. Domneval je, da je vsak zemljevid mogoče pobarvati s štirimi barvami tako, da je vsak par sosednjih držav ali regij pobarvan z različnima barvama. Pri tem je upošteval, da sta dve državi sosednji, če imata skupno mejo, ki ni samo ena točka. Omenjeno domnevo so poimenovali Problem štirih barv. Na prvi pogled enostaven problem je kljub obsežnemu trudu številnih matematikov ostal nerešen vse do leta 1976. Takrat je bil objavljen dokaz te domneve, ki obsega več kot 600 strani knjige. Pri dokazu so bili v veliko pomoč računalniški programi, ki so bili takrat razviti specifično za dokaz tega problema. Vse do danes še ni bil podan dokaz tega problema brez uporabe računalnika.
Od dokaza domneve dalje je torej znano, da je vsak zemljevid mogoče pobarvati s štirimi barvami, Problem štirih barv pa so preimenovali v Izrek štirih barv.

Oglejmo si, kako lahko omenjeni problem barvanja zemljevidov prevedemo v jezik teorije grafov, ki je matematikom omogočal pridobitev rešitve. Dano situacijo (zemljevid) najprej narišemo v obliki grafa na naslednji način. Vozlišča grafa predstavljajo države oziroma regije, dve vozlišči pa sta povezani, če imata državi, regiji skupno mejo. Barvanje zemljevida tako postane ekvivalentno barvanju vozlišč opisanega grafa.
Oglejmo si še konkreten primer. Recimo, da želimo zemljevid slovenskih statističnih regij pobarvati s štirimi barvami tako, da vsaki dve sosednji regiji prejmeta različni barvi. V vsaki regiji si izberemo eno točko, poljubni dve točki pa povežemo med seboj, če imata regiji, v katerih se točki nahajata, skupno mejo, ki ni le ena točka. Tako dobimo graf, prikazan na sliki 3. Sedaj pobarvajmo vozlišča dobljenega grafa tako, da tvorimo dobro barvanje. Vsaki dve vozlišči, ki sta povezani s povezavo, morata prejeti različni barvi. Opazimo, da so vozlišča, ki pomenijo spodnjeposavsko, osrednjeslovensko, zasavsko in savinjsko regijo, paroma sosednja, zato morajo prejeti paroma različne barve in tako velja $\chi(G) \geq 4$. Zanje tako uporabimo barve 1, 2, 3, 4. Sedaj lahko s temi štirimi barvami brez težav dobro pobarvamo tudi preostala vozlišča grafa. Kromatično število dobljenega grafa je zato 4. Sledi, da je zemljevid slovenskih regij mogoče dobro pobarvati s štirimi barvami, in sicer tako, da vsaka regija dobi barvo, ki jo je dobilo vozlišče, ki je to regijo predstavljalo.

Slika 2: Statistične regije Slovenije [6].



Slika 3: Graf, ki pripada zemljevidu statističnih regij Slovenije.

Načrtovanje urnika

Uporabnost koncepta barvanj grafov se velikokrat izkorišča tudi na področju snovanja urnikov in razporedov. V teh primerih najprej osnujemo graf, katerega vozlišča predstavljajo posamezne aktivnosti, par vozlišč pa povežemo, če se pripadajoči aktivnosti ne moreta ali ne smeta izvajati hkrati. Posledično različne barve, dodeljene vozliščem grafa pri barvanju, ponazarjajo različne termine izvedb aktivnosti.

V nadaljevanju opisujemo konkreten primer snovanja urnikov s pomočjo dejstev s področja teorije grafov.

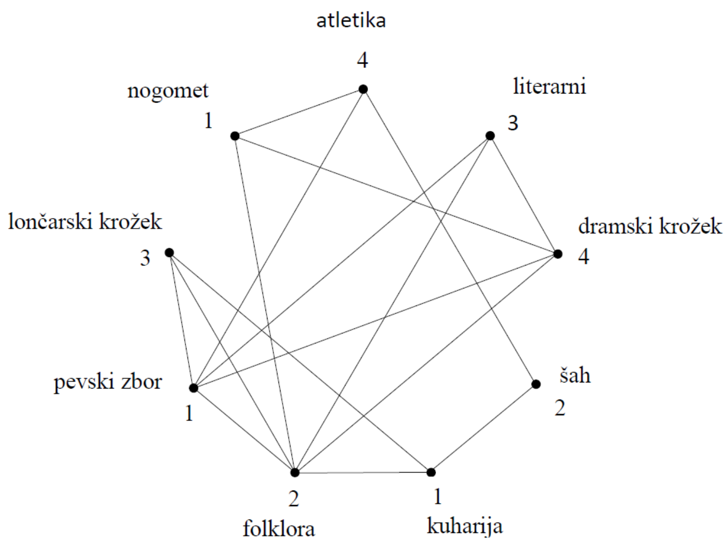
Slovenske osnovne šole poleg obveznega pouka za učence organizirajo tudi različne interesne dejavnosti. Učencem pred začetkom šolskega leta ponudijo nabor le-teh, izvedejo pa le tiste, za katere se odloči dovolj učencev. Učenci, ki so najprej izbrali interesne dejavnosti, ki se ne bodo izvajale, morajo izbrati nove dejavnosti iz nabora tistih, ki se bodo izvedle. Na eni izmed osnovnih šol bodo tako izvedli naslednje interesne dejavnosti: literarni krožek, dramski krožek, šah, kuharstvo, folkloro, pevski zbor, lončarski krožek, nogomet in atletiko. Cilj snovanja urnika je čimmanjše število terminov, ki so potrebni za izvedbo teh dejavnosti. Seveda je temeljni pogoj snovanja urnikov ta, da poljubni dve dejavnosti, ki si ju je izbral isti učenec, ne smeta potekati istočasno. V tabeli 1 so prikazane dejavnosti, ki ne smejo potekati istočasno zaradi hkratne izbire vsaj enega izmed učencev.

Interesna dejavnost	**Dejavnosti, ki ne smejo potekati sočasno s to interesno dejavnostjo**
literarni krožek	dramski krožek, folklora, pevski zbor
dramski krožek	literarni krožek, folklora, pevski zbor, nogomet
šah	kuharstvo, atletika
kuharija	šah, folklora, lončarski krožek
folklora	literarni krožek, dramski krožek, kuharstvo, pevski zbor, lončarski krožek, nogomet
pevski zbor	literarni krožek, dramski krožek, folklora, lončarski krožek, atletika
lončarski krožek	kuharstvo, folklora, pevski zbor
nogomet	dramski krožek, folklora, atletika
atletika	šah, pevski zbor, nogomet

Tabela 1: Interesne dejavnosti ene izmed slovenskih osnovnih šol.

Podobno kot v primeru barvanja zemljevida situacijo iz tabele prikažemo z grafom (graf na sliki 4). Interesne dejavnosti so vozlišča grafa, povezavo med dvema vozliščema pa narišemo, če dejavnosti ne smeta potekati sočasno. Nato vozlišča grafa pobarvamo, različni barvi vozlišč grafa pa pomenita različna termina izvajanja aktivnosti.
Opazimo, da so vozlišča, ki pripadajo predmetom literarni krožek, dramski krožek, folklora in pevski zbor paroma sosednja, zato morajo prejeti paroma različne barve. Pobarvati jih moramo torej s štirimi različnimi barvami (1, 2, 3, 4). Sedaj je mogoče tudi vsakega od preostalih vozlišč grafa pobarvati z vsaj eno izmed naštetih barv na način, da tvorimo dobro barvanje. Kromatično število grafa je zato 4. To pa pomeni, da so v našem primeru potrebni štirje različni termini izvajanja zapisanih interesnih dejavnosti. V enem izmed terminov se bodo tako izvajale dejavnosti, katerih pripadajoča vozlišča grafa so pri barvanja prejela barvo 1 (kuharstvo, pevski zbor, nogomet), v drugem dejavnosti, katerih pripadajoča vozlišča grafa so v dobljenem barvanju prejela barvo 2 (šah, folklora), v tretjem terminu dejavnosti, katerih pripadajoča vozlišča grafa dobijo barvo 3 (literarni krožek, lončarski krožek) in v četrtem terminu dejavnosti, katerih pripadajoča vozlišča grafa smo pobarvali z barvo 4 (dramski krožek, atletika). Opazimo še, da bi bilo mogoče graf pobarvati tudi drugače, saj smo imeli za barvanje

nekaterih vozlišč grafa na voljo več možnih barv. To pomeni, da bi lahko dejavnosti, ki potekajo sočasno, razporedili tudi drugače, še vedno pa bi morale potekati v (vsaj) štirih različnih terminih.



Slika 4: Barvanje grafa, ki ponazarja interesne dejavnosti, ki ne smejo potekati sočasno, s 4 barvami.

Semaforizacija križišča

S pomočjo barvanja vozlišč grafa lahko rešujemo tudi različne probleme v prometu. Eden izmed takih je semaforizacija križišč.

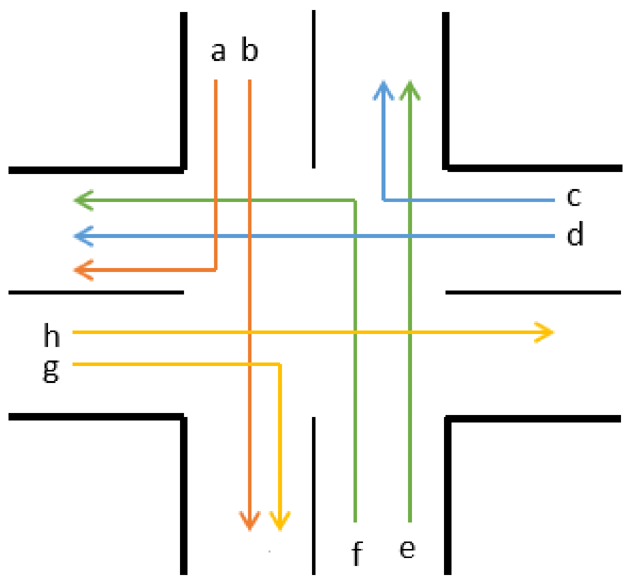
Razreševanje omenjenega problema opisujemo na konkretnem primeru. Zamislimo si, da imamo štirikrako križišče, prikazano na sliki 5, v katerem je mogoča vožnja v označenih smereh. V nekatere smeri lahko promet poteka sočasno, pri nekaterih parih smeri pa tega zaradi nevarnosti nesreč ne želimo. To so pari smeri, katerih prometni tokovi se križajo. Tako na primer tisti vozniki, ki pripeljejo v smeri, označeni z a, ne smejo imeti zelene luči takrat, ko imajo zeleno luč vozniki, ki pripeljejo v smeri d in f. Podobno tisti vozniki, ki pripeljejo v smeri b, ne smejo imeti zelene luči takrat, ko imajo zeleno luč tisti, ki vozijo v smereh d, f, g in h. Poti tistih, ki vozijo v smeri c, se križajo s prometnim takom e, zato vozniki, ki pripeljejo iz smeri c, ne smejo voziti skozi križišče takrat, ki vozijo skozenj vozniki iz smeri e. Kot je razvidno s slike, tisti vozniki, ki vozijo v smeri d, ne smejo imeti zelene luči na semaforju takrat, ko imajo zeleno luč na semaforju vozniki, ki vozijo v smereh a, b, e in f. Vozniki, ki vozijo v smeri e, ne smejo skozi križišče hkrati z vozniki iz smeri c, d in h, tisti, ki vozijo v smeri f pa ne takrat, ko vozijo skozi križišče vozniki, ki pripeljejo iz smeri a, b, d in h. Tisti vozniki, ki vozijo v smeri g, ne smejo imeti zelene luči na semaforju takrat, ko jo imajo tisti, ki vozijo v smeri b, vozniki, ki vozijo v smeri h, pa ne takrat, ko jo imajo tisti, ki vozijo v smereh b, e, f.

Ker je cilj problema snovanje semaforizacije na način, da bo promet potekal čim hitreje, nas torej zanima, najmanj koliko intervalov prepustnosti (zelene luči) potrebujemo, da bodo vsa vozila lahko varno zapeljala skozi križišče.

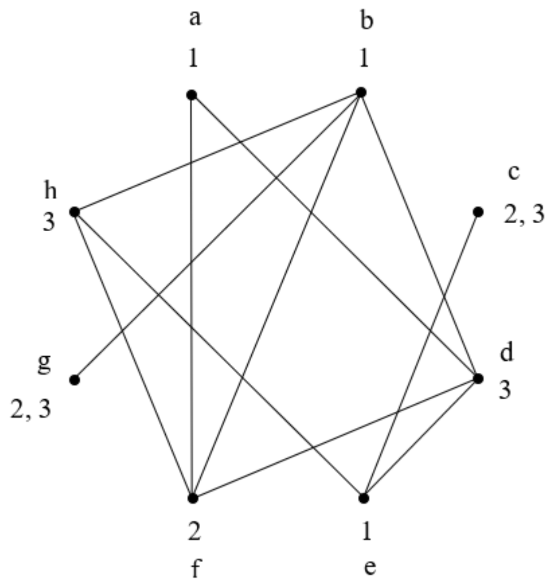
Podobno kot v prejšnjih primerih situacijo prikažemo z grafom (slika 6). Prometni tokovi predstavljajo vozlišča grafa, poljubni dve vozlišči pa sta povezani, če vožnja v smereh, ki ju predstavljata vozlišči, ne sme potekati sočasno. Z vidika teorije grafov nas torej zanima, najmanj koliko barv je potrebnih, da pobarvamo vozlišča tega grafa.

Opazimo, da so vozlišča, ki pripadajo smerem b, d in f paroma sosednja, zato morajo prejeti 3 različne barve (1, 2, 3) in tako velja $\chi(G) \geq 3$. Predpostavimo, da vozlišče, označeno z b, prejme barvo 1, tisto z f barvo 2 in tisto z d barvo 3. Vozlišče, ki predstavlja smer h, lahko prejme barvo 3, podobno vozlišče, ki je označeno z a, barvo 1. Vozlišče, ki je označeno z g, lahko sedaj prejme barvi 2 ali 3, vozlišče označeno z e pa barvi 1 ali 2. Denimo, da vozlišče, označeno z e, pobarvamo z barvo 1. Potem lahko vozlišče, označeno s c, prejme barvi 2 ali 3. Graf lahko torej dobro pobarvamo s 3 barvami, zato sledi $\chi(G) = 3$. To pomeni, da bomo potrebovali (najmanj) tri različne intervale zelene luči. Prometni tokovi, ki so prejeli barvo 1, bodo lahko potekali hkrati, prav tako bodo lahko vozniki hkrati zapeljali skozi križišče v smereh, ki so prejela barvo 2, in hkrati v smereh, ki so prejela barvo 3. Ker tok g lahko prejme barvi 2 ali 3, bodo lahko vozniki, ki bodo vozili v smeri g, imeli zeleno luč takrat, ko bodo imeli zeleno luč tisti iz smeri pobarvanih z barvama 2 ali 3 (torej bodo imeli 2/3 časa zeleno luč, če upoštevamo, da bodo vsi časovni intervali zelenih luči trajali enako dolgo). Enak razmislek velja za voznike, ki bodo vozili v smeri c.

Na ta način smo s koncepti s področja teorije grafov razrešili tudi problem semaforizacije križišč.



Slika 5: Prometni tokovi.

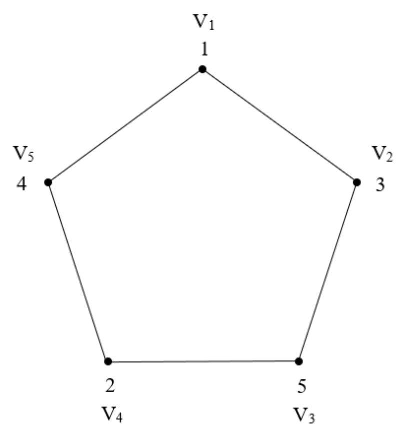


Slika 6: Barvanje grafa, ki ponazarja prometne tokove v križišču, ki ne smejo potekati sočasno, s 3 barvami.

3 PROBLEM DODELJEVANJA FREKVENC IN NOVI RAZLIČICI BARVANJA VOZLIŠČ

Da bi rešili probleme, ki se pojavljajo v vsakdanjem življenju, matematiki pogosto razvijamo nove modele za njihove rešitve. To je razlog, da je v zadnjem stoletju barvanje vozlišč grafa doživelo bliskovit razvoj, predvsem razvoj številnih variacij klasičnega barvanja. Dve izmed njih sta bili razviti na podlagi problema dodeljevanja frekvenc radijskim oddajnikom. Poljubni dve radijski postaji morata biti namreč locirani dovolj narazen, da ne prihaja do problema interference. Razdalja med dvema postajama, ki imata enaki frekvenci, pa je neposredno povezana z močjo njunih oddajnih signalov.
Pravila dodeljevanja frekvenc so sprožila razvoj številnih različic barvanj grafov. Omenimo dve izmed njih. Yeh in Griggs sta v [3, 4] vpeljala različico tega problema, pri katerem morajo oddajniki, ki so si »blizu«, prejeti različni frekvenci, tisti, ki so si »zelo blizu«, pa frekvenci, ki sta oddaljeni za vsaj dve frekvenci. Prevedimo situacijo v jezik teorije grafov. Oddajniki so vozlišča grafa. Dve vozlišči sta si »zelo blizu«, če sta sosednji in sta si »blizu«, če je razdalja med njima 2. Da bi si olajšali reševanje tega problema, so vpeljali tako imenovano razdaljno L(2,1)-barvanje. Definirano je kot preslikava, ki vsakemu vozlišču dodeli barvo, tako da poljubni vozlišči na razdalji 2 prejmeta različni barvi, poljubni sosednji vozlišči pa prejmeta barvi, ki se razlikujeta vsaj za 2.
Oglejmo si primer razdaljnega L(2,1)-barvanja grafa, prikazanega na sliki 1. Razmislimo, koliko barv je potrebnih za razdaljno L(2,1)-barvanje omenjenega grafa. Vozlišči v_1 in v_2 sta sosednji, zato morata prejeti barvi, ki se razlikujeta vsaj za 2. Brez izgube za splošnost predpostavimo, da smo vozlišče v_1 pobarvali z barvo 1, vozlišče v_2 pa z barvo 3. Tudi vozlišče v_5 je sosednje z vozliščem v_1, zato ne sme prejeti barv 1 oziroma 2 (mora prejeti barvo najmanj 3). Opazimo, da sta vozlišči v_2 in v_5 na razdalji 2, zato vozlišče v_5 pravzaprav ne more prejeti barve 3 (s to barvo je namreč pobarvano vozlišče v_2). Vozlišče v_5 moramo tako pobarvati z neko še neuporabljeno barvo, na primer s 4. Sedaj vidimo, da lahko vozlišče v_4 pobarvamo z

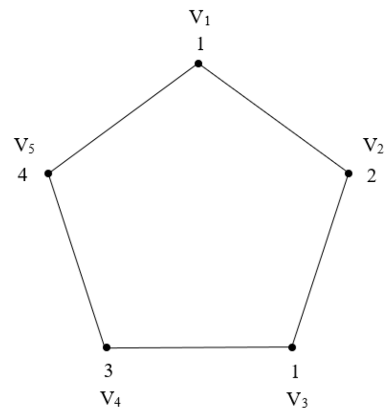
barvo 2, saj se le ta od barve 4, s katero je pobarvano sosednje vozlišče v_5, razlikuje za 2, od obeh že pobarvanih vozlišč na razdalji 2 pa za 1. Pobarvati moramo le še vozlišče v_3. Prejeti mora barvo, ki se od barv njegovih sosedov razlikuje vsaj za 2. Omenjena soseda sta pobarvana z barvama 2 in 3, zato mora vozlišče v_3 prejeti novo barvo, barvo 5. Seveda se ta od vseh vozlišč na razdalji 2 razlikuje vsaj za 1, saj nobeno drugo vozlišče ni prejelo te barve. Opisano barvanje grafa na sliki 1 je prikazano na sliki 7.



Slika 7: Primer razdaljnega L(2,1)-barvanja grafa s slike 1.

Ker vse radijske frekvence niso enako močne (povzročajo interferenco na različnih oddaljenostih), so Goddard in soavtorji v [1] izboljšali predstavljen model dodeljevanja frekvenc radijskim postajam na način, da so vpeljali pakirno barvanje vozlišč grafa. Slednje je namreč definirano kot preslikava, ki vsakemu vozlišču v grafu dodeli barvo na način, da sta poljubni vozlišči, ki prejmeta barvo i, na razdalji več kot i. Najmanjše število barv, potrebnih za tako barvanje vozlišč grafa, imenujemo pakirno kromatično število grafa (ime so vpeljali Brešar in soavtorji v [2].) Množica vozlišč, ki v tem barvanju prejmejo barvo i (so paroma na razdalji več kot i), predstavlja tako imenovano i-pakiranje.

Oglejmo si še optimalno pakirno barvanje grafa, prikazanega na sliki 1. Brez izgube za splošnost predpostavimo, da je vozlišče v_1 s takim barvanjem prejelo barvo 1. Vozlišča, pobarvana z barvo 1, morajo biti paroma na razdalji več kot 1, zato v nadaljevanju vozlišči v_2 in v_5 ne moreta več prejeti barve 1, barvo 1 pa lahko prejme le eno od vozlišč v_3 in v_4. Denimo, da je to barvo prejelo vozlišče v_3. Vozlišči v_1 in v_3 torej tvorita 1-pakiranje. Ker je največja razdalja med poljubnima vozliščema v grafu na sliki 1 enaka številu 2 in morajo biti vozlišča pobarvana z barvo 2 po pravilu pakirnega barvanja paroma na razdalji več kot dva, lahko le eno vozlišče obravnavanega grafa prejme barvo 2. Le to tvori 2-pakiranje. Podobno velja za barvo 3, vsa vozlišča pobarvana z barvo 3, morajo biti paroma na razdalji več kot 3, zato lahko le eno vozlišče pobarvamo s to barvo. Da bi pobarvali vsa vozlišča grafa, moramo uporabiti še barvo 4. Pakirno kromatično število grafa s slike 1 je tako enako številu 4 (pakirno barvanje grafa je prikazano na sliki 8).



Slika 8: Primer pakirnega barvanja grafa s slike 1.

Če bi uporabili pakirno barvanje kot model za dodeljevanje frekvenc radijskim oddajnikom, bi oddajniki spet predstavljali vozlišča grafa, naša naloga pa bi bila poiskati pakirno kromatično število grafa, torej najmanjše število različnih barv (različnih frekvenc), ki jih moramo dodeliti danim oddajnikom, da sta poljubna oddajnika, ki prejmeta barvo i na razdalji več kot i. Tisti oddajniki, ki bi prejeli isto barvo i (so znotraj i-pakiranja), bi lahko torej oddajali na isti frekvenci z močjo, ki ne dovoljuje interference na razdalji i.

4 ZAKLJUČEK

Barvanja grafov lahko torej s pridom izkoristimo za reševanje raznolikih (optimizacijskih) problemov, pri katerih prihaja do situacij, ko nekatere dejavnosti ne smejo potekati istočasno, neke stvari ne smejo stati poleg drugih in podobno. Vse te probleme lahko namreč prevedemo na isti problem, namreč na problem iskanja optimalnega barvanja vozlišč grafa.

Barvanja grafov imajo s svojimi številnimi variacijami še dodano vrednost, s katero lahko rešujemo številne druge, zelo kompleksne probleme. Tako bi denimo omenjeno pakirno barvanje lahko uporabili tudi pri raziskovanju biotske raznovrstnosti (različne vrste na določenem ozemlju namreč potrebujejo različno količino ozemlja), vse druge, v tem članku obravnavane in neobravnavane različice barvanja grafov pa še za veliko drugih problemov, na katere naletimo v vsakdanjem življenju.

Literatura

[1] B. Brešar, S. Klavžar, D.F. Rall (2007). On the packing chromatic number of Cartesian products, hexagonal lattice, and trees. *Discrete appl. math.*

[2] J. Ferme (2016). Obravnava barvanj grafov in tetivnih grafov v srednješolskem izobraževanju. *Magistrsko delo.*

[3] W. Goddard, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, J.M. Harris, D.F. Rall (2008). Broadcast chromatic numbers of graphs. *Ars Combin.*

[4] J.R. Griggs, R.K. Yeh (1992). Labeling graphs with a condition at distance two. *SIAM J. Discrete Math.*

[5] Slika: Regije Slovenija.png. Pridobljeno: 20. 12. 2019: https://sl.wikipedia.org/wiki/Slika:Regije_Slovenija.png

[6] R.K. Yeh (1990). Labelling graphs with a condition at distance two. *Ph. D. Thesis, Depth. of Math., Univ. of South Carolina, Columbia, SC, USA.*

Dianoia 4 (2020) 39-45

Odnos med religioznostjo in samoocenjenim zdravjem med mladimi v Sloveniji

Relationship between religiosity and self-rated health among young people in Slovenia

Anja Gorčan

Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Oddelek za matematiko in računalništvo, Koroška cesta 160, 2000 Maribor, Slovenija

Povzetek
Preučevali smo odnos med religioznostjo in samoocenjenim zdravjem med mladimi v Sloveniji. Na podlagi pregleda literature smo si zastavili raziskovalno vprašanje, ***ali obstaja pozitivna povezanost med religioznostjo in samooceno zdravja med mladimi v Sloveniji.*** Analizirali smo podatke raziskave Mladina 2013, ki temeljijo na reprezentativnem vzorcu preučevane populacije. Med našima navedenima spremenljivkama obstaja zelo šibka povezanost (C = 0,03), vendar pa ta ni statistično značilna. Izkazalo se je, da večina mladih v Sloveniji ne glede na stopnjo religioznosti svoje zdravje ocenjuje zelo dobro ali odlično.

Ključne besede: religioznost, samoocenjeno zdravje, mladi, Slovenija, Mladina 2013.

Abstract
We examined the relationship between religiosity and self-rated health among young people in Slovenia. Based on the literature review, we asked ourselves a research question: **Is there a positive correlation between religiosity and health self-assessment among young people in Slovenia?** We analyzed data from the Mladina 2013 survey based on a representative sample of the population studied. We used the SPSS program to analyze the data. There is a very weak correlation between our two variables (C = 0.03), but the correlation is not statistically significant. It turns out that the majority of young people in Slovenia, regardless of their religiosity, rate their health very well or excellent.

Key words: religiosity, self-assessed health, young people, Slovenia, Mladina 2013.

1 UVOD

V postmodernem svetu se vse pogosteje pojavljajo vprašanja o pomenu tradicionalizma, vrednot in običajev. Ena izmed tradicionalnih in za družbo zgodovinsko pomembnih je prav zagotovo religioznost. Nekaj odnosov med religioznostjo in poljubno izbranimi spremenljivkami je bilo preučevanih že po celem svetu. K izboru teme članka nas je posebno pritegnilo pogosto vprašanje mladih o smislu religioznosti in njena povezanost z občutji, ki jih religiozen posameznik doživlja (v našem primeru samoocena zdravja).

2 TEORETIČNA OPREDELITEV KONCEPTOV

V tem poglavju bomo definirali pojme zdravje, samoocenjeno zdravje in religioznost.

Svetovna zdravstvena organizacija (World Health Organization) zdravje opredeljuje ne le kot odsotnost bolezni, ampak tudi kot duševno, telesno, čustveno in socialno ugodje/blagostanje. Zdravje prav tako definira kot celovit in dinamičen sistem, ki je sposoben prilagajanja vsem vplivom okolja ter omogoča posamezniku in skupnosti opravljati vse biološke, socialne in

E-naslov:anja.gorcan@gmail.com (Anja Gorčan)

poklicne funkcije ter preprečevati bolezen, onemoglost in prezgodnjo smrt (WHO, 2019). Samoocenjeno zdravje je večdimenzionalen koncept in se pogosto uporablja kot kazalnik z zdravjem povezane kakovosti življenja (Herman idr., 2015: 112). V raziskavah so samoocenjeno zdravje merili z vprašanjem: "Kako bi opisali vaše zdravje na splošno?". Med možnimi odgovori so bili "odlično", "zelo dobro", "dobro", "manj dobro" in "slabo" (Foti in Eaton, 2010: 772). »Rezultati raziskave iz leta 2002 in 2006 kažejo, da slovenski otroci in mladostniki svoje zdravje ocenjujejo kot dobro« (Health, 2006; cit. po Pirnat in Savič, 2013: 310).

V. Pavićević v svoji knjigi *Sociologija religije sa elementima filozofije religije* religijo opredeli kot organizirano celoto verovanj, občutenj, simbolov, kulturnega delovanja in moralnih predpisov, navezanih na idejo oziroma predstavo o nadnaravnem (Pavičevič, 1980: 11). Religija je del kulture in je splet skupnega verovanja in običajev, ki določajo nadnaravno in sveto ter človekov odnos do njiju. Družbena skupina, ki prakticira določeno religijo, se iz tega odnosa med nadnaravnim/svetim in vsakdanjim/profanim oskrbuje z moralnimi definicijami (Vernon, 1995: 5 – 8).

3 RAZISKAVE

Povezanost med religioznostjo in samooceno zdravja so preučevale že številne raziskave in nekatere opozorile na obstoj korelacije med religioznostjo in samooceno posameznikovega zdravja, druge pa so to trditev zavrnile. Med seboj se razlikujejo po posameznih vidikih, ki jih preučujejo. Nekatere se osredotočajo zgolj na en vidik zdravja in religioznosti, druge pa poudarjajo korelacije med več vidiki spremenljivk.

Raziskava, ki je bila izvedena kot protiutež raziskavi, ki temelji na podatkih ZDA, in trdi, da obstaja pozitivna povezanost med religioznostjo in zdravjem, je na vzorcu 59 držav pokazala, da obstaja pozitivna povezanost med religioznostjo in samooceno zdravja le v malo primerih. S to ugotovitvijo torej nasprotuje eni izmed prej opravljenih raziskav. Poudarja dve ključni ugotovitvi: in sicer, da je v skladu z osebno kulturo pripadnikov določene države razvidno, da v državah, v katerih religioznost pomeni družbeno normo (t. j. skupno in družbeno zaželeno), verni posamezniki poročajo o boljšem zdravju kot ateisti. Druga točka dokazuje, da je tudi v ZDA samoocena zdravja povezana z regionalno ravnjo religioznosti, kar pomeni, da je zdravje ena izmed dobrobiti religioznosti, ki je omejena na verske regije. Na vzorcu 59 držav so raziskali korelacijo med osebno religioznostjo in samooceno zdravja. V vzorcu je bila zajeta tudi Slovenija, izkazalo pa se je, da je povezanost med samoocenjenim zdravjem in individualno religioznostjo šibka ($C = -0{,}20$, $p < 0{,}001$). Povezanost med spremenljivkama je negativna, to pomeni, da višja, kot je stopnja posameznikove individualne religioznosti, nižja je stopnja zdravja (Stavrova, 2015: 911 – 915).

Raziskava, izvedena na podlagi podatkov GSS iz leta 2006 (General Social Survey), ki so deloma pridobljeni tudi s strani Univerze v Chicagu, obsega 4510 polnoletnih anketirancev iz Anglije in Španije. Primerja učinke religioznosti na zdravje in dobro počutje. Rezultati so pokazali, da ljudje, ki se opredeljujejo kot verniki, ponavadi poročajo o boljšem zdravju, ne glede na versko pripadnost, versko dejavnost, delo, družino, socialne podpore ali finančni status. Prav tako so ugotovili, da so ljudje z liberalno verskimi prepričanji (verska svoboda in enakopravnost vernikov) večinoma bolj zdravi kot ljudje s fundamentalističnimi verovanji (popolna privrženost načelom določene religije) (Green in Elliott, 2010: 149 – 153).

Ena izmed opravljenih raziskav je preučevala korelacijo religioznosti skozi odraščanje posameznikov med 20. in 94. letom starosti in spremembe v samooceni zdravja. Spol anketirancev so preučevali ločeno. Ugotovili so, da je samoocena zdravja vernih žensk ne glede na socialno-ekonomski status posameznika in življenjsko obdobje boljša skozi ves čas v življenju, pa tudi »staranje« oz. padec zmožnosti poteka bolj linearno kot pri nevernih ženskah. Pri religioznih oz. nereligioznih moških pa so rezultati pokazali, da je razlika v samooceni zdravja zanemarljiva. Izkazalo se je, da je korelacija med religioznostjo in spolom pozitivna, ženske pa so v povprečju bolj verne od moških (McCullough in Laurenceau, 2005: 560 – 565).

Na podlagi pregleda literature smo si zastavili raziskovalno vprašanje.

RAZISKOVALNO VPRAŠANJE: ***Ali obstaja pozitivna povezanost med religioznostjo in samooceno zdravja med mladimi v Sloveniji?***

4 METODA

4.1 VZOREC

Preučevanje odnosa med religioznostjo in samooceno zdravja med mladimi v Sloveniji je temeljilo na bazi raziskave Mladina 2013. Reprezentativen vzorec zajema mlade v Sloveniji, stare med 16 in 27 let. Podatki so bili pridobljeni z metodo anketiranja. Vprašalnik je bil zaradi posameznih osebnih in nekoliko bolj intimnih vprašanj sestavljen iz dveh delov, ustnega in pisnega. Anketiranih je bilo 907 oseb (Flere in Divjak, 2013).

4.2 MERSKI INSTRUMENT

Religioznost je bila merjena s tremi različnimi neodvisnimi spremenljivkami. Za vsako od teh spremenljivk smo posebej izdelali kontingenčno tabelo z indikatorjem za samoocenjeno zdravje.

Prvi vidik religioznosti, ki smo ga preučevali, je bil: »Kako pomemben je Bog v tvojem življenju?«. Na voljo je bila desetstopenjska lestvica, kjer je ocena 1 pomenila, da Bog v posameznikovem življenju sploh ni pomemben, ocena 10 pa, da je Bog zelo pomemben. Posamezne stopnje izraženosti smo zaradi lažjega preučevanja preoblikovali (transform – recode into different variables) v novo lestvico treh kategorij: 1 – manj pomemben, 2 – srednje pomemben, 3 – pomemben. Drugi preučevani indikator religioznosti je bil: »Kako pogosto običajno obiskuješ verske obrede v cerkvi ali drugi verski instituciji?«. Možni odgovori na vprašanje so bili: 1 – nikoli, 2 – le ob redkih priložnostih, 3 – občasno, 4 – vsaj enkrat mesečno, 5 – vsaj enkrat tedensko, 6 – vsak ali skoraj vsak dan. Prav tako kot pri prvi spremenljivki smo tudi pri tej posamezne odgovore preoblikovali v: 1 – redko, 2 – vsaj enkrat mesečno, 3 – vsaj enkrat tedensko. Tretji vidik preučevanja religioznosti je bil: »Kako pogosto moliš ali meditiraš izven okvira verskih obredov?«. Možni odgovori na vprašanje so sledili: 1 – nikoli, 2 – le ob redkih priložnostih, 3 – občasno, 4 – vsaj enkrat mesečno, 5 – vsaj enkrat tedensko, 6 – vsak ali skoraj vsak dan. Tudi te smo preoblikovali na podoben način kot zgornje, in sicer z naslednjimi pomeni: 1 – redko, 2 – vsaj enkrat mesečno, 3 – vsaj enkrat tedensko. Zastavljena odvisna spremenljivka, ki smo jo preučevali, je bila samoocenjeno zdravje. Vprašanje se je glasilo: »Kako bi na splošno ocenili/a svoje zdravje?«. Respondenti pa so lahko na vprašanje odgovorili z naslednjimi ponujenimi odgovori: 1 – slabo, 2 – zadovoljivo, 3 – dobro, 4 – zelo dobro, 5 –

odlično. Posamezne odgovore smo zgostili v: 1 – slabo ali zadovoljivo zdravje, 2 – dobro zdravje, 3 – zelo dobro ali odlično zdravje. Prva dva indikatorja religioznosti smo nato posamično analizirali v povezavi s samoocenjenim zdravjem. Naredili smo dve kontingenčni tabeli (crosstabs), poleg tega pa smo izračunali še koeficient kontingence. Za natančnejši pregled podatkov smo nato zgostili vse tri indikatorje religioznosti v eno samo spremenljivko in jo s pomočjo kontingenčne tabele analizirali v povezavi s samoocenjenim zdravjem. Celotno analizo podatkov smo opravili v programu SPSS, in sicer smo preverjali korelacije med spremenljivkami.

5 REZULTATI

V prvem delu analize smo preučevali spremenljivki pomembnost Boga in samoocenjeno zdravje, kot prikazuje tabela.

		Samoocena zdravja			
		slabo ali zadovoljivo zdravje	dobro	zelo dobro ali odlično	Skupaj
Pomembnost Boga	manj pomemben	59	185	278	522
		11,3%	35,4%	53,3%	100,0%
	srednje pomemben	29	84	128	241
		12,0%	34,9%	53,1%	100,0%
	pomemben	10	49	65	124
		8,1%	39,5%	52,4%	100,0%
Skupaj		98	318	471	887
		11,0%	35,9%	53,1%	100,0%

Tabela 1:Kontingenčna tabela spremenljivk pomembnost Boga in samoocena zdravja.

Rezultati so pokazali, da je največ sodelujočih, ki jim je Bog manj pomemben, ocenilo svoje zdravje kot zelo dobro ali odlično (53,3 %) in najmanj anketirancev je ocenilo svoje zdravje kot slabo ali zadovoljivo (11,3 %). Med tistimi anketiranci, ki jim je Bog srednje pomemben, je 53,1 % takih, ki so svoje zdravje ocenili kot zelo dobro ali odlično. Med tistimi anketiranci, ki jim je Bog pomemben, je 52,4 % takih, ki so svoje zdravje ocenili kot zelo dobro ali odlično in 8,1 % takih, ki so svoje zdravje ocenili kot slabo ali zadovoljivo.

Med pomembnostjo Boga in samooceno zdravja obstaja zelo šibka povezanost ($C = 0,05$) pri 5 % stopnji značilnosti ($p = 0,77 > 0,05$).

		Samoocena zdravja			
		slabo ali zadovoljivo zdravje	dobro	zelo dobro ali odlično	Skupaj
Obiskovanje verskih obredov	redko	82	250	366	698
		11,7%	35,8%	52,4%	100,0%
	vsaj enkrat mesečno	18	56	90	164
		11,0%	34,1%	54,9%	100,0%
	vsaj enkrat tedensko	4	17	24	45
		8,9%	37,8%	53,3%	100,0%
Skupaj		104	323	480	907
		11,5%	35,6%	52,9%	100,0%

Tabela 2: Kontingenčna tabela spremenljivk obiskovanje verskih obredov in samoocena zdravja.

Naslednji analizirani spremenljivki sta bili pogostost obiskovanja verskih obredov in samoocenjeno zdravje. Med tistimi, ki redko obiskujejo verske obrede, je 52,4 % takšnih, ki svoje zdravje ocenjujejo zelo dobro ali odlično, in 11,7 % takšnih, ki svoje zdravje ocenjujejo kot slabo ali zadovoljivo. Tisti, ki verske obrede obiskujejo vsaj enkrat mesečno, svoje zdravje v večini (54,9 %) ocenjujejo kot zelo dobro ali odlično, prav tako pa najmanj anketirancev svoje zdravje ocenjuje kot slabo ali zadovoljivo (11,0 %). Med tistimi, ki verske obrede obiskujejo vsaj enkrat tedensko, je 53,3 % takšnih, ki svoje zdravje ocenjujejo zelo dobro ali odlično, in zopet najmanj takšnih, ki poročajo o slabem oziroma zadovoljivem zdravju (8,9 %).

Med pogostostjo obiskovanja cerkvenih obredov in samoocenjenim zdravjem obstaja zelo šibka povezanost ($C = 0,03$) pri 5 % stopnji značilnosti ($p = 0,96 > 0,05$).

		Samoocena zdravja			
		slabo ali zadovoljivo zdravje	dobro	zelo dobro ali odlično	Skupaj
Religioznost	nizka religioznost	86	272	404	762
		11,3%	35,7%	53,0%	100,0%
	srednja religioznost	15	38	60	113
		13,3%	33,6%	53,1%	100,0%
	visoka religioznost	3	12	16	31
		9,7%	38,7%	51,6%	100,0%
Skupaj		104	322	480	906
		11,5%	35,5%	53,0%	100,0%

Tabela 3: Kontingenčna tabela spremenljivk religioznost in samoocena zdravja.

Tudi z združitvijo posameznih indikatorjev religioznosti so rezultati pokazali v isto smer. Med tistimi, ki so nizko religiozni, je 53,0 % takšnih, ki so svoje zdravje označili kot zelo dobro ali odlično. Prav tako pa je med tistimi, ki so visoko religiozni, 51,6 % takšnih, ki so svoje zdravje ocenili zelo dobro ali odlično in najmanj (9,7 %) sodelujočih s slabim ali zadovoljivim zdravjem.

Tudi v tem primeru je povezanost med religioznostjo posameznika in samoocenjenim zdravjem zelo šibka ($C = 0{,}03$) pri 5 % stopnji značilnosti ($p = 0{,}96 > 0{,}05$).

Sklenemo lahko, da med religioznostjo in samooceno zdravja med mladimi v Sloveniji ni povezanosti. Odgovor na zastavljeno raziskovalno vprašanje je tako negativen.

6 ZAKLJUČEK

V pričujoči raziskavi smo preučili odnos med religioznostjo in samoocenjenim zdravjem med mladimi v Sloveniji. Rezultati kažejo, da slovenska mladina ne glede na stopnjo religioznosti različno ocenjuje svoje zdravje. Rezultati prav tako kažejo, da mladi v Sloveniji v večini svoje zdravje ocenjujejo kot zelo dobro ali odlično.

Prvo analizo smo izvedli med pomembnostjo Boga in samooceno zdravja ter ugotovili, da mladi ne glede na izraženo pomembnost Boga v njihovem življenju svoje zdravje v več kot 50 % ocenjujejo kot zelo dobro ali odlično. Izkazalo se je celo, da so tisti, ki jim je Bog v življenju manj pomemben, svoje zdravje ocenili boljše (53,3 %) od tistih, ki jim je Bog pomemben (52,4 %). Ker povezanost med pomembnostjo Boga in samooceno zdravja ni statistično značilna, smeri korelacije nismo šli preverjat. V nadaljevanju smo preverili še ostale korelacije med indikatorji religioznosti in samooceno zdravja.

Analiza korelacije med obiskovanjem verskih obredov in samoocenjenim zdravjem mladih v Sloveniji je pokazala v isto smer kot zgoraj navedena analiza. Kaže namreč na to, da večina mladih ne glede na pogostost obiskovanja verskih obredov v cerkvi ali drugi instituciji svoje zdravje ocenjuje kot zelo dobro ali odlično. Najboljše izmed vseh so svoje zdravje ocenili tisti, ki verske obrede obiskujejo vsaj enkrat mesečno (54,9 %).

Z združitvijo vseh treh indikatorjev religioznosti (tj. pomembnost Boga, obiskovanje verskih obredov, pogostost molitve izven cerkvenih obredov) in skupno analizo z lastno oceno zdravja smo dognali, da je povezanost med religioznostjo in samooceno zdravja zelo šibka ($C = 0{,}03$), vendar pa ni statistično značilna.

Opozoriti moramo na relativno majhen vzorec, na podlagi katerega je bila narejena raziskava, ta zajema zgolj mlade med 16. in 27. letom starosti. V prihodnosti bi bilo treba preučiti še kakšen drug posredni dejavnik, ki bi lahko povezoval religioznost s samooceno zdravja.

Literatura

[1] Flere, S., Klanjšek, R., Lavrič, M., Kirbiš, A., Tavčar Krajnc, M., Divjak, M., Boroja, T., Zagorc, B. in Naterer, A. (2014). Slovenska Mladina 2013: Življenje v času deziluzij, tveganja in prekarnosti. Maribor: CEPYUS. Zagreb: Friedrich-Ebert-Stiftung.

[2] Foti, K. in Eaton, D. (2010). Associations of selected health risk behaviors with self-rated health status among U.S. high school students. *Public health reports*, 125 (5). 771 – 781.

[3] Green, M. in Elliott, M. (2010). Religion, Health, and Psychological Well-Being. *Journal of Religion and Health*, 49 (2). 149 – 163.

[4] Herman, K.M., Hopman, W.M. in Sebiston, C.M. (2015). Physical activity, screen time and self-rated health and mental health in Canadian adolescents. *Preventive medicine*, 73 (3). 112 – 116.

[5] McCullough, M.E. in Laurenceau, J. (2005). Religiousness and the Trajectory of Self-Rated Health Across Adulthood. *Pers Soc Psychol Bull*, 31 (4). 560 – 573.

[6] Pavićević, V. (1980). Sociologija religije sa elementima filozofije religije. Beograd: *Beogradski izdavačko-grafički zavod*.

[7] Pirnat, J. in Skela Savič, B. (2013). Pomen interneta za zdravje mladostnikov in izzivi za vzgojo za zdravje v osnovnem zdravstvenem varstvu. *Obzornik zdravstvene nege.*

[8] Stavrova, O. (2015). Religion, Self-Rated Health, and Mortality: Whether Religiosity Delays Death Depends on the Cultural Context. *Social Psychological and Personality Science*, 6 (8). 911 – 922.

[9] Vernon, R. (1995). The social ecology of religion. New York: Oxford university.

[10] World Health Organization. *What is the WHO definition of health?* Pridobljeno: 17. 1. 2019: *https://www.who.int/about/who-we-are/frequently-asked-questions.*

Dianoia 4 (2020) 47–57

Povezavno regularni grafi
Edge regular graphs

Iztok Peterin *

Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko, Koroška 46, 2000 Maribor, Slovenija

Povzetek

Naj bo G graf, $\delta_G(v)$ stopnja vozlišča $v \in V(G)$ in $\delta_G(e) = \delta_G(v) + \delta_G(u) - 2$ stopnja povezave $e = uv \in E(G)$. Graf G je povezavno regularen, če je stopnja vseh povezav enaka. Karakteriziramo vse grafe, ki so povezavno regularni, a niso regularni. Nadalje raziščemo, kateri direktni in leksikografski produkti so povezavno regularni, a niso regularni.

Ključne besede: povezavno regularni grafi, direktni produkt, leksikografski produkt.

Abstract

Let G be a graph, $\delta_G(v)$ degree of a vertex $v \in V(G)$ and $\delta_G(e) = \delta_G(v) + \delta_G(u) - 2$ degree of an edge $e = uv \in E(G)$. Graph G is edge regular if all edges have the same degree. We present a characterization of all graphs that are edge regular but are not regular. Furthermore, we observe all edge regular graphs that are not regular among direct and lexicographic product of graphs.

Key words: edge regular graphs, direct product, lexicographic product.

1 Uvod

Povezavno regularni grafi so znani iz literature kot grafi, kjer imata poljubni sosednji vozlišči $\lambda > 0$ skupnih sosedov. V literaturi je najti približno deset objav na to temo. Med njimi je [1] najrelevantnejša za nas. V tem delu želimo poudariti odstopanje od utečene prakse pri poimenovanju povezavno regularni graf in opisati standarden pristop poimenovanja konceptov ob prehodu iz vozliščne verzije v povezavno verzijo.

Povezavne verzije konceptov, ki so definirane z vozlišči, so običajno definirane preko grafa povezav $\mathcal{L}(G)$ grafa G. Ponazorimo to s klasičnim konceptom kromatičnega števila $\chi(G)$ grafa G, torej barvanja vozlišč, in kromatičnega indeksa $\chi'(G)$ grafa G, torej barvanja povezav. Tukaj velja $\chi(\mathcal{L}(G)) = \chi'(G)$. Ta vzorec je opaziti v mnogih delih. Omenimo dva novejša koncepta: b-kromatični indeks najdemo v [4] ali igralni Grundyjev indeks iz [6]. Omenimo, da to ni edina možnost. V [3] so avtorji vpeljali štiri različne povezavne verzije Wienerjevega indeksa, izmed katerih le eden ustreza reprezentaciji z grafom povezav. Prav ta reprezentacija je bila največ študirana v nadaljevalnih delih. Z ozirom na razlago definiramo tukaj *povezavno regularni graf* kot graf G, za katerega je njegov graf povezav $\mathcal{L}(G)$ regularen graf.

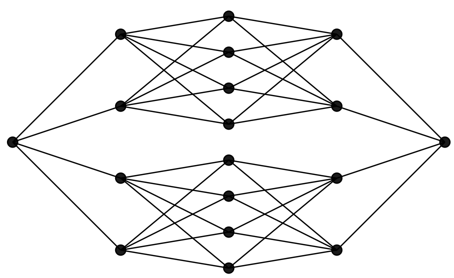
*Avtor je dopolnilno zaposlen na IMFM, Jadranska 19, Ljubljana in njegovo delo je delno podprto s projekti P1-0297, J1-9109 in J1-1693

E-naslov: iztok.peterin@um.si (Iztok Peterin)

Za večjo natančnost vpeljimo dodatno terminologijo. V tem delu bomo preučevali zgolj enostavne grafi, to so grafi brez zank in večkratnih povezav. Za graf G uporabljamo $V(G)$ za množico vozlišč in $E(G)$ za množico povezav grafa G. *Razdaljo* med vozliščema u in v v grafu G označimo z $d_G(u,v)$ in je najmanjše število povezav na kakšni poti med u in v. *Odprta okolica* $N_G(v)$ vozlišča v je množica vseh sosed vozlišča v in *stopnja* $\delta_G(v)$ vozlišča v je število njegovih sosed, torej $\delta_G(v) = |N_G(v)|$. Graf G je *r-regularen graf,* če je $\delta(v) = r$ za vsako vozlišče v grafa G. Z $\mathcal{R}$ bomo označevali razred vseh r-regularnih grafov za vsak $r \in \mathbb{N}$.

Odprta okolica $N_G(e)$ povezave e *grafa* G je množica vseh povezav incidenčnih s povezavo e in *stopnja* $\delta_G(e)$ povezave e je $|N_G(e)|$, torej število povezav incidenčnih s povezavo e. Graf G je *r-povezavno regularen graf* (ali bolj enostavno povezavno regularen graf), če je $\delta_G(e) = r$ za vsako povezavo e grafa G. Z $\mathcal{E}$ označimo razred grafov, ki so povezavno regularni.

Opazimo lahko, da za povezavo $e = uv$ grafa G velja $\delta_G(e) = \delta_G(u)+\delta_G(v)-2$. Prav tako je $\mathcal{L}(G)$ r-regularen graf, če je le G r-povezavno regularen graf. Vsak r-regularen graf je seveda $(2r-2)$-povezavno regularen. Ker tvorijo regularni grafi razred, ki je že dobro raziskan, se bomo v tem delu osredotočili predvsem na povezavno regularne grafe, ki hkrati niso regularni. Torej na razred $\mathcal{E} - \mathcal{R}$. Osnovna družina razreda $\mathcal{E} - \mathcal{R}$ so polni dvodelni grafi $K_{p,q}$, $p \neq q$, ki so $(p+q-2)$-povezavno regularni. Nadaljnji primer povezavno regularnega grafa, ki ni regularen, najdemo na sliki 1. Tako bomo v naslednjem poglavju karakterizirali grafe iz $\mathcal{E} - \mathcal{R}$. V zadnjem poglavju bomo predstavili nekaj operacij, ki nam iz povezavno regularnih grafov zgradijo večje primere povezavno regularnih grafov.



Slika 1: Povezavno regularen graf, ki ni regularen.

2 Povezavno regularni grafi, ki niso regularni

Za začetek podajmo karakterizacijo grafov iz $\mathcal{E} - \mathcal{R}$, torej grafov, ki so povezavno regularni, a niso regularni.

Izrek 2.1. *Povezan graf G je iz $\mathcal{E} - \mathcal{R}$ natanko tedaj, ko je graf G dvodelen, porojen s particijo $V(G) = V_1 \cup V_2$, kjer ima vsako vozlišče iz V_1 stopnjo p in vsako vozlišče iz V_2 stopnjo q in velja $p \neq q$.*

Dokaz. Naj bo G povezan dvodelen graf s particijo $V(G) = V_1 \cup V_2$, kjer ima vsako vozlišče iz V_1 stopnjo p in vsako vozlišče iz V_2 stopnjo q in velja $p \neq q$. Graf G ni regularen, saj je $p \neq q$. Za poljubno povezavo $e = uv$ velja, da je $u \in V_i$ in $v \in V_j$, $\{i,j\} = \{1,2\}$. Tako je $\delta_G(e) = \delta_G(u) + \delta_G(v) - 2 = p + q - 2$ in $G \in \mathcal{E} - \mathcal{R}$.

Naj bo sedaj G povezan graf iz $\mathcal{E} - \mathcal{R}$. Tako velja $r = \delta_G(e) = \delta_G(u) + \delta_G(v) - 2$ za vsako povezavo $e = uv$ grafa G. Ker graf G ni regularen, a je povezan, lahko najdemo *takšno povezavo uv, da $\delta_G(u) \neq \delta_G(v)$. Naj bo V_1 podmnožica vozlišč grafa G, ki vsebuje vsa vozlišča na sodi razdalji od u in naj bo $V_2 = V(G) - V_1$. Z matematično indukcijo glede na razdaljo od u pokažimo, da ima vsako vozlišče iz V_1 stopnjo $\delta_G(u)$, medtem ko ima vsako vozlišče iz V_2 stopnjo $r - \delta_G(u) + 2$. Edino vozlišče na razdalji 0 od vozlišča u je vozlišče u samo in njegova stopnja je seveda $\delta_G(u)$. Vsi sosedje vozlišča u imajo stopnjo $r - \delta_G(u) + 2$, saj je graf G r-povezavno regularen. S tem smo zaključili bazo indukcije.*

Naj bo v poljubno vozlišče na razdalji $k = d(u, v) > 1$ od u. Če je k sodo število, potem je $v \in V_1$ in naj bo vozlišče w sosed vozlišča v, ki leži na najkrajši u, v-poti. Seveda je med u in w liha razdalja, ki je vsaj 1. Po indukcijski predpostavki ima vozlišče w enako stopnjo kot sosedje od u, to je $\delta_G(w) = r - \delta_G(u) + 2$. Ker je $\delta_G(vw) = \delta_G(v) + \delta_G(w) - 2 = r$, vidimo, da je $\delta_G(w) = r - \delta_G(v) + 2 = r - r + \delta_G(u) - 2 + 2 = \delta_G(u)$. Naj bo sedaj k še liho število. Torej je $v \in V_2$. Ponovno označimo z w soseda vozlišča v, ki leži na najkrajši u, v-poti. Nadalje naj bo vozlišče x sosed od w, ki leži na najkrajši u, w-poti. Seveda je $w \in V_1$ in $x \in V_2$. Po indukcijski predpostavki je $\delta_G(x) = r - \delta_G(u) + 2$. Na enak način kot prej pokažemo, da je $\delta_G(w) = \delta_G(u)$. Oglejmo si še povezavo wv. Velja $\delta_G(wv) = \delta_G(w) + \delta_G(v) - 2 = \delta_G(u) + \delta_G(v) - 2 = r$. Zlahka vidimo, da je $\delta_G(v) = r - \delta_G(u) + 2$, s čimer je trditev dokazana.

Ob oznakah $p = \delta_G(u)$ in $q = r - \delta_G(u) + 2$ moramo pokazati še, da je graf G dvodelen s particijo $V(G) = V_1 \cup V_2$. Recimo, da obstaja povezava $e_1 = xy$, kjer sta obe krajišči x in y iz V_1, potem je

$$\delta_G(e_1) = \delta_G(x) + \delta_G(y) - 2 = 2p - 2 \neq r = p + q - 2,$$

saj je $p \neq q$. Podobno velja za povezavo $e_2 = tz$, kjer sta obe krajišči t in z iz V_2. V tem primeru je

$$\delta_G(e_2) = \delta_G(t) + \delta_G(z) - 2 = 2q - 2 \neq r = p + q - 2,$$

ponovno zaradi neenakosti $p \neq q$. V obeh primerih smo naleteli na protislovje, s čimer je dokaz končan. ■

Zaradi zgornjega izreka vpeljimo oznako (p, q)-*povezavno regularen graf* za vsak $(p + q - 2)$-povezavno regularen graf G iz $\mathcal{E} - \mathcal{R}$, kjer $V_1 = \{v : \delta_G(v) = p\}$ in $V_2 = \{u : \delta_G(u) = q\}$ tvorita particijo množice vozlišč $V(G)$. Opazimo lahko, da notacija "(p, g)-povezavno regularen graf G" prinaša tudi informacijo, da je graf G iz $\mathcal{E} - \mathcal{R}$ kadarkoli je $p \neq q$. Po drugi strani izraz "r-povezavno regularen graf G" pomeni, da je G iz $\mathcal{E}$. Zlahka vidimo, da je vsak $(1, q)$-povezavno regularen graf izomorfen s $K_{1,q}$, medtem ko že $(2, q)$-povezavno regularni grafi prinašajo bogato strukturo, kot je razvidno iz sledeče trditve. V njej potrebujemo pojem 1-*subdivizije* povezave $e = uv$, ki jo dobimo, če v grafu povezavo uv nadomestimo s potjo uxv, kjer je x novo vozlišče.

Trditev 2.2. *Naj bo $q \in \mathbb{N}$ in $q \neq 2$. Graf G je $(2, q)$-povezavno regularen natanko tedaj, ko graf G dobimo iz q-regularnega grafa H z 1-subdivizijo vsake povezave iz H.*

Dokaz. Če je graf G $(2, q)$-povezavno regularen graf, potem je G dvodelen po izreku 2.1 s particijo $V_1 = \{v : \delta_G(v) = 2\}$ in $V_2 = \{u : \delta_G(u) = q\}$. Z obratno operacijo od 1-subdivizije vseh vozlišč iz V_1 dobimo q-regularen graf H. Obratno, naj bo graf G dobljen iz q-regularnega grafa H z 1-subdivizijo vsake povezave grafa H. Vsaka povezava $e = uv$ iz G ima eno vozlišče stopnje 2 in drugo vozlišče stopnje q. Tako je $\delta_G(e) = 2 + q - 2 = q$ za vsako povezavo $e = uv$ grafa G in G je $(2, q)$-povezavno regularen graf. ■

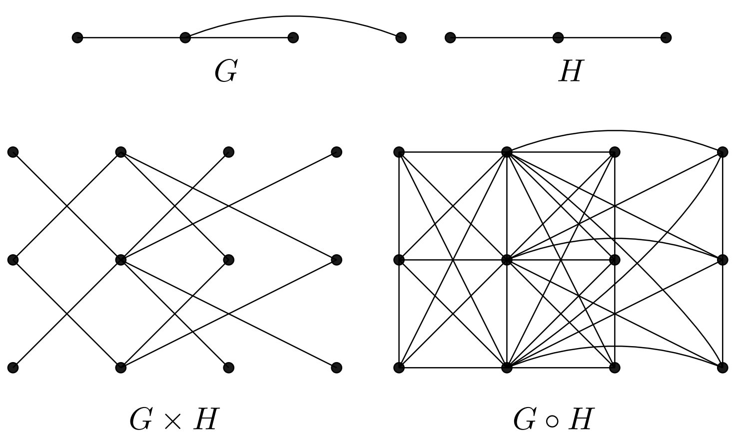
3 Nekatere konstrukcije grafov iz $\mathcal{E} - \mathcal{R}$

Vsak (p, q)-povezavno regularen graf lahko uporabimo za konstrukcijo novih povezavno regularnih grafov iz $\mathcal{E} - \mathcal{R}$. Če je $|V_2| = kp$, potem lahko poiščemo razbitje množice V_2 s k paroma disjunktnimi množicami $S_1, \ldots, S_k$, kjer vsaka izmed njih vsebuje p elementov. Dodajmo vozlišča $v_1, \ldots, v_k$ k množici V_1 in dodajmo povezave med vozliščem v_i in vsemi vozlišči množice S_i za vsak $i \in \{1, \ldots, k\}$. Dobljen graf je očitno $(p, q + 1)$-povezavno regularen. Še več, ta graf je iz $\mathcal{E} - \mathcal{R}$, če je le $p \neq q + 1$.

Naj bosta G in H grafa. *Direktni produkt* grafov G in H je graf $G \times H$ z množico vozlišč $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$. Vozlišči (g, h) in (g', h') sta sosednji v $G \times H$, če je vozlišče g soseda vozlišča g' v G in vozlišče h soseda vozlišča h' v H. Primer direktnega produkta grafov najdemo na levi strani slike 2. Zlahka lahko vidimo, da za stopnjo vozlišča v direktnem produktu velja

$$\delta_{G \times H}((g, h)) = \delta_G(g)\delta_H(h) \tag{3.1}$$

za vsak $(g, h) \in V(G \times H)$. To že pomeni, da je direktni produkt dveh regularnih grafov tudi sam regularen. Direktni produkt spada med standardne produkte, glej [2]. Direktni produkt ni vedno povezan graf, četudi sta povezana oba faktorja G in H. Tako je $G \times H$ povezan graf natanko tedaj, ko sta povezana oba G in H ter je vsaj eden izmed njiju nedvodelen. Če sta oba grafa G in H dvodelna in povezana, potem produkt $G \times H$ vsebuje natanko dve komponenti, glej [5] ali [2]. Tak primer je tudi na levi strani slike 2. Ob tem sta (g, h) in (g, h') v različnih komponentah $G \times H$, če je $hh' \in E(H)$ in podobno sta (g, h) in (g', h) v različnih komponentah $G \times H$ za $gg' \in E(G)$.



Slika 2: Grafa G in H in njuna direktni produkt $G \times H$ in leksikografski produkt $G \circ H$.

Direktni produkt nam iz grafov iz razreda $\mathcal{E} - \mathcal{R}$ in iz regularnih grafov $\mathcal{R}$ poraja nove grafe razreda $\mathcal{E} - \mathcal{R}$, kot govori naslednji izrek.

Izrek 3.1. *Naj bosta G in H povezana grafa. Direktni produkt $G \times H$ je iz $\mathcal{E} - \mathcal{R}$ natanko tedaj, ko je en faktor, recimo G, regularen graf in drugi faktor H je iz $\mathcal{E} - \mathcal{R}$. Še več, če je graf G r-regularen graf in je H (p, q)-povezavno regularen graf, $p \neq q$, potem je $G \times H$ $(pr + qr - 2)$-povezavno regularen graf.*

Dokaz. Naj bo najprej G r-regularen graf in H naj bo (p, q)-povezavno regularen graf. Nadalje naj bosta $gg' \in E(G)$ in $hh' \in E(H)$ z $\delta_H(h) = p$ in $\delta_H(h') = q$, $p \neq q$, *poljubni povezavi. Seveda je $\delta_{G\times H}((g,h)) = pr = \delta_{G\times H}((g',h))$ in $\delta_{G\times H}((g',h')) = qr = \delta_{G\times H}((g,h'))$ po (3.1). Tako je $\delta_{G\times H}((g,h)(g',h')) = pr + qr - 2$ in podobno je $\delta_{G\times H}((g',h)(g,h')) = pr + qr - 2$. Ker sta bili povezavi gg' in hh' izbrani poljubno in je $p \neq q$, lahko zaključimo, da je $G \times H$ $(pr + qr - 2)$-povezavno regularen graf iz $\mathcal{E} - \mathcal{R}$.*

Za obratno implikacijo naj bo $G \times H$ iz $\mathcal{E} - \mathcal{R}$, kar pomeni, da je $G \times H$ (p,q)-povezavno regularen graf z $p \neq q$. Po izreku 2.1 je $G \times H$ dvodelen. Izberimo poljubno povezavo $e = (g_1,h_1)(g_2,h_2)$ iz $G \times H$ z $\delta_G(g_1) = k$, $\delta_G(g_2) = \ell$, $\delta_H(h_1) = s$ in $\delta_H(h_2) = t$. Seveda je $g_1g_2 \in E(G)$ in $h_1h_2 \in E(H)$. Tako dobimo po (3.1), da je $\delta_{G\times H}((g_1,h_1)(g_2,h_2)) = ks + \ell t - 2$ in $\delta_{G\times H}((g_1,h_2)(g_2,h_1)) = kt + \ell s - 2$. Ker je $\delta_{G\times H}((g_1,h_1)(g_2,h_2)) = \delta_{G\times H}((g_1,h_2)(g_2,h_1))$, velja $ks + \ell t = kt + \ell s$ in dobimo $k(s-t) = \ell(s-t)$ oziroma $(k-\ell)(s-t) = 0$. Seveda je ali $s = t$ ali $k = \ell$, vendar ne oboje hkrati, saj imajo sosednja vozlišča grafa iz $\mathcal{E} - \mathcal{R}$ različne stopnje. Brez izgube za splošnost lahko predpostavimo, da je $k = \ell$ in $s \neq t$.

Nadaljujmo z $G \times h_1h_2 \cong G \times K_2$. Naj bo vozlišče g poljuben sosed vozlišča g_1, različen od g_2 (če obstaja). Velja $\delta_{G\times H}((g_1,h_1)(g,h_2)) = ks + \delta_G(g)t - 2 = ks + \ell t - 2$, kar nam prinese $\delta_G(g) = \ell = k$. Podobno vidimo za poljubnega soseda g' vozlišča g_2, ki je različen od g_1 (če obstaja), da je $\delta_{G\times H}((g_2,h_2)(g',h_1)) = kt + \delta_G(g')s - 2 = ks + \ell t - 2$. Tako je tudi $\delta_G(g') = \ell = k$. Ker je graf G povezan, dobimo z nadaljevanjem tega postopka z vedno novim vozliščem grafa G, ki mu še ne poznamo stopnje in je sosed od vozlišča z znano stopnjo, da je graf G k-regularen graf.

Nadaljujmo z $g_1g_2 \times H \cong K_2 \times H$. Pokazali bomo, da imajo vsa vozlišča grafa H, ki imajo sodo razdaljo do vozlišča h_1, stopnjo s in vsa vozlišča grafa H, ki imajo liho razdaljo do vozlišča h_1, stopnjo t. Dokažimo to trditev z indukcijo na razdaljo od vozlišča h_1 v grafu H. To že vemo za vozlišči h_1 in h_2. Naj bo h poljuben sosed vozlišča h_1, ki je različen od h_2 (če obstaja). Velja $\delta_{G\times H}((g_1,h_1)(g_2,h)) = ks + k\delta_H(h) - 2 = ks + kt - 2$, iz česar dobimo $\delta_H(h) = t$. S tem je dokazana baza indukcije za vozlišča na razdalji ≤ 1 od h_1. Naj bo sedaj $d_H(h,h_1) > 1$. Naj bo vozlišče h' sosed vozlišča h, ki leži na najkrajši h,h_1-poti. Če je $d_H(h,h_1)$ sodo število, tedaj je $d_H(h',h_1) = d_H(h,h_1) - 1$ liho število in po indukcijski predpostavki je $\delta_H(h') = t$. Zato je $\delta_{G\times H}((g_1,h')(g_2,h)) = kt + k\delta_H(h) - 2 = ks + kt - 2$, kar pomeni $\delta_H(h) = s$. Če je $d_H(h,h_1)$ liho število, potem naj bo vozlišče h'' sosed vozlišča h' na najkrajši h',h_1-poti. Seveda je $d_H(h',h_1) = d_H(h,h_1) - 1$ sodo število in $d_H(h'',h_1) = d_H(h,h_1) - 2$ liho število. Po indukcijski predpostavki je $\delta_H(h'') = t$. Tako je $\delta_{G\times H}((g_1,h'')(g_2,h')) = kt + k\delta_H(h') - 2 = ks + kt - 2$ in dobimo $\delta_H(h') = s$. Podobno je $\delta_{G\times H}((g_1,h')(g_2,h)) = ks + k\delta_H(h) - 2 = ks + kt - 2$ in dobimo $\delta_H(h) = t$.

Za konec dokaza pokažimo, da je H dvodelen s particijo $V_1 = \{x \in V(H) : \delta_H(x) = s\}$ in $V_2 = \{x \in V(H) : \delta_H(x) = t\}$. Če obstaja povezava v grafu H, ki ima obe krajišči stopnje s (ali t), potem ta povezava implicira povezavo v produktu $G \times H$ z obema krajiščema stopnje sk (ali tk), kar v grafu iz $\mathcal{E} - \mathcal{R}$ ni mogoče. Po izreku 2.1 je graf H iz $\mathcal{E} - \mathcal{R}$ in dokaz je končan. ■

Prejšnji izrek ni edini vir (p,q)-povezavno regularnih grafov, $p \neq q$, ki so povezani z direktnim produktom. V naslednji trditvi pokažimo, da sta lahko povezani komponenti direktnega produkta $G \times H$ iz $\mathcal{E} - \mathcal{R}$, če sta le oba G in H iz $\mathcal{E} - \mathcal{R}$.

Trditev 3.2. *Naj bosta G in H povezana grafa. Če je G (p,q)-povezavno regularen graf in H je (s,t)-povezavno regularen graf, oba iz $\mathcal{E} - \mathcal{R}$, potem sta komponenti direktnega produkta $G \times H$ povezavno regularna grafa, pri čemer je ena komponenta (ps,qt)-povezavno* *regularen graf in druga komponenta je (pt, qs)-povezavno regularen graf in vsaj ena komponenta je iz $\mathcal{E} - \mathcal{R}$.*

Dokaz. *Naj bosta grafa G in H iz $\mathcal{E} - \mathcal{R}$. Po izreku 2.1 sta dvodelna in predpostavim lahko, da je G (p, q)-povezavno regularen in H je (s, t)-povezavno regularen, kjer je $p \neq q$ in $s \neq t$. Potem $G \times H$ vsebuje dve povezani komponenti, kjer ena komponenta C_1 vsebuje vozlišče (g, h) in druga komponenta C_2 vozlišča (g', h) za poljubnega soseda g' vozlišča g. Po izreku 2.1 je $V_1(G) = \{g : \delta_G(g) = p\}$ in $V_2(G) = \{g : \delta_G(g) = q\}$ particija grafa G ter $V_1(H) = \{h : \delta_H(h) = s\}$ in $V_2(H) = \{h : \delta_H(h) = t\}$ particija grafa H. Notacijo lahko izberemo tako, da ima vsaka povezava iz C_1 eno krajišče v $V_1(G) \times V_1(H)$ in drugo krajišče v $V_2(G) \times V_2(H)$, medtem ko ima vsaka povezava iz C_2 eno krajišče v $V_1(G) \times V_2(H)$ in drugo krajišče v $V_2(G) \times V_1(H)$. Tako je $\delta_{C_1}(e) = ps + qt - 2$ za vsako povezavo e iz C_1, $\delta_{C_2}(e') = pt + qs - 2$ za vsako povezavo e' iz C_2 in C_1 ter C_2 sta povezavno regularna. Če je $G \times H$ regularen graf, potem je $ps = pt = qt = qs$. Iz prve enakosti dobimo $s = t$ in iz druge enakosti imamo $p = q$, oboje je v nasprotju s predpostavkami. Torej $G \times H$ ni regularen. Po izreku 3.1 $G \times H$ ni iz $\mathcal{E} - \mathcal{R}$, saj niti G niti H ni regularen graf. Če je C_1 regularen graf, potem je $ps = qt$. Neenakost $t \neq s$ pomeni tudi $qt^2 \neq qs^2$. Ob upoštevanju $ps = qt$ dobimo $pst \neq qs^2$ oziroma $pt \neq qs$ in C_2 ni regularen graf. Če je torej C_1 regularen graf, potem je $C_2 \in \mathcal{E} - \mathcal{R}$. Podobno pokažemo tudi, da iz $C_2 \in \mathcal{R}$ sledi $C_1 \in \mathcal{E} - \mathcal{R}$.* ■

Za konec si oglejmo, kdaj je leksikografski produkt grafov G in H (p, q)-povezavno regularen graf. *Leksikografski produkt* grafov G in H je graf $G \circ H$ z množico vozlišč $V(G \circ H) = V(G) \times V(H)$. Vozlišči (g, h) in (g', h') sta sosednji v $G \circ H$, če je vozlišče g soseda vozlišča g' v grafu G ali je $g = g'$ in je vozlišče h soseda vozlišča h' v grafu H. Primer leksikografskega produkta grafov najdemo na desni strani slike 2. Zlahka lahko vidimo, da za stopnjo vozlišča v leksikografskem produktu velja

$$\delta_{G \circ H}((g, h)) = \delta_G(g)|V(H)| + \delta_H(h) \tag{3.2}$$

za vsak $(g, h) \in V(G \circ H)$. Tudi leksikografski produkt spada med standardne produkte, ki ni komutativen, kar se vidi že iz definicije sosednosti. Glej [2] za več lastnosti o leksikografskem produktu.

Kljub nekomutativnosti leksikografskega produkta lahko grafe iz razreda $\mathcal{E} - \mathcal{R}$ med njimi opišemo s simetričnim pogojem, kot je razvidno iz sledečega izreka.

Izrek 3.3. *Naj bosta G in H poljubna grafa. Leksikografski produkt $G \circ H$ je iz $\mathcal{E} - \mathcal{R}$ natanko tedaj, ko je en faktor graf brez povezav N_n in je drugi faktor iz $\mathcal{E} - \mathcal{R}$.*

Dokaz. *Naj bo najprej graf $G \cong N_n$ in naj bo graf H (p, q)-povezavno regularen graf, $p \neq q$. V tem primeru je $G \circ H$ izomorfen n kopijam grafa H. Ker je graf H (p, q)-povezavno regularen graf, je tak tudi leksikografski produkt $G \circ H$. Naj bo sedaj obratno $H \cong N_n$ in naj bo graf G (p, q)-povezavno regularen graf, $p \neq q$. Ob tem naj bo $V_1 = \{v \in V(G) : \delta_G(v) = p\}$ in $V_2 = \{v \in V(G) : \delta_G(v) = q\}$ particija grafa G v skladu z izrekom 2.1. Po (3.2) je $\delta_{G \circ H}((g, h)) = np$, če je le $g \in V_1$, in $\delta_{G \circ H}((g, h)) = nq$, če je le $g \in V_2$. Tako tvorita $V_1^{G \circ H} = \{(g, h) \in V(G \circ H) : \delta_{G \circ H}((g, h)) = pn\}$ in $V_2^{G \circ H} = \{(g, h) \in V(G \circ H) : \delta_{G \circ H}((g, h)) = qn\}$ particijo grafa $G \circ H$. Ob tem ni težko videti, da je leksikografski produkt $G \circ N_n$ dvodelen, saj je G dvodelen. Po izreku 2.1 je $G \circ H$ (pn, qn)-povezavno regularen graf.*

Za obratno implikacijo naj bo $G \circ H$ iz $\mathcal{E} - \mathcal{R}$. Torej je $G \circ H$ (p,q)-povezavno regularen graf z $p \neq q$. Predpostavimo najprej, da graf H vsebuje vsaj eno povezavo $e = hh'$. Če tudi G vsebuje povezavo $f = gg'$, potem tvorijo vozlišča $(g,h),(g,h'),(g',h)$ cikel dolžine tri, kar je nemogoče, saj je $G \circ H$ dvodelen graf po izreku 2.1. Tako je G graf brez povezav na, recimo, n vozliščih. Ponovno je $G \circ H$ izomorfen n kopijam grafa H. Ker je $G \circ H$ dvodelen po izreku 2.1, je tak torej tudi H. Naj bo še $V_1^{G\circ H} = \{(g,h) \in V(G \circ H) : \delta_{G\circ H}((g,h)) = p\}$ in $V_2^{G\circ H} = \{(g,h) \in V(G \circ H) : \delta_{G\circ H}((g,h)) = q\}$ particija grafa $G \circ H$ v skladu z izrekom 2.1. Ker je G graf brez povezav, je $\delta_{G\circ H}((g,h)) = \delta_H(h)$ po (3.2) in množici $V_1^H = \{h \in V(H) : \delta_H(h) = p\}$ in $V_2^H = \{h \in V(H) : \delta_H(h) = q\}$ tvorita particijo grafa H. Tako je graf H (p,q)-povezavno regularen graf po izreku 2.1.

Preostane še možnost, ko graf H nima povezav in je $H \cong N_n$. V tem primeru je $\delta_{G\circ H}((g,h)) = n\delta_G(g)$ po (3.2). Seveda je $\delta_{G\circ H}((g,h))$ lahko enaka le ali p ali q, saj je $G \circ H$ (p,q)-povezavno regularen graf. Zato lahko definiramo $V_1 = \{g \in V(G) : \delta_G(g) = p/n\}$ in $V_2 = \{g \in V(G) : \delta_G(g) = q/n\}$, ki tvorita particijo $V(G)$. Še več, $G \circ H$ je dvodelen in vsa vozlišča oblike (g,h) za $h \in V(H)$ imajo enako stopnjo, recimo p, za fiksen $g \in V(G)$. Povrhu imajo vsi njihovi sosedje stopnjo q po izreku 2.1. Tako vidimo, da ima poljuben a fiksen $g \in V_1$ vse sosede v V_2. Podobno velja za poljuben a fiksen $g \in V_2$, ki ima vse sosede v V_1. Torej je tudi graf G dvodelen in je $(p/n, q/n)$-povezavno regularen po izreku 2.1. ■

Literatura

[1] B. Frelih, Š. Miklavič, Edge regular graph products, *Electronic J. Combin.* **20** (2013), P62.

[2] R. Hammack, W. Imrich, S. Klavžar, *Handbook of Product Graphs*, Second Edition, Discrete Mathematics and Its Applications, CRC Press, Boca Raton, 2011.

[3] A. Iranmanesh, I. Gutman, O. Khormali, A. Mahmiani, The edge version of the Wiener index, *MATCH Commun. Math. Comuput. Chem.* **61** (2009), 663–672.

[4] M. Jakovac, I. Peterin, The b-chromatic index of a graph, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* **38** (2015), 1375–1392.

[5] P. M. Weichsel, The Kronecker product of graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.* **13** (1962), 47–52.

[6] W. Zhang, H. Zhu, The game Grundy indices of graphs, *J. Combin. Optimization* **30** (2015), 596–611.

VABILO AVTORJEM

Dianoia (grško διάνοια) po Platonu označuje védenje, razmišljanje o modelih stvarnosti, o naravoslovno-matematičnih in tehničnih temah. Uporabljajo ga matematiki (modeliranje) in znanstveniki (formuliranje problema), inženirji (načrtovanje sistema). Opredeljuje kompetenco, proces ali rezultat diskurzivnega razmišljanja, za razliko od neposrednega razumevanja obravnavane tematike. Aristotel to védenje naprej razdeli na teoretično (episteme) in praktično (phronesis).
Dianoia po Platonu torej označuje vmesni nivo človeškega spoznanja, prehod od intuitivnih občutkov do najglobljega spoznanja dejanskosti. Tako je idealna oznaka za objave v pričujoči reviji, ki povezujejo teoretična, znanstvena izhodišča z njihovo uporabno namembnostjo. Študentje, avtorji teh člankov, ste na prehodu od učenja k delu, od teoretičnega h konkretnemu, ki vas bo pripeljalo do kruha, do dela, s katerim boste odigrali svojo vlogo v družbi. Na tem prehodu pa poleg znanja, ki ga ponuja redno izobraževanje, potrebujete tudi izkušnje s konkretnih izzivov in mehke kompetence sodelovanja v ekipah delodajalcev, k čemur vas spodbuja in vam pri tem pomaga revija Dianoia.
V reviji bomo objavljali poljudne in strokovne članke s področja naravoslovja, matematike ali znanosti, ki uporabljajo znanja teh področij. Ciljna publika bralcev so v prvi vrsti delodajalci, ki tovrstna znanja potrebujejo in želijo izvedeti, kaj je kdo zanimivega razmislil na njihovem področju. V drugi vrsti so ciljna publika študentje, ki iščejo zamisli za svojo poklicno pot in lahko v reviji najdejo navdih za lastna raziskovanja in iskanje stikov s trgom dela.
Za kakovost izdelkov bo skrbel uredniški odbor in uredniški svet, v katerih so vrhunski strokovnjaki, povezani s področji, ki jih revija obravnava. Članki bodo anonimno recenzirani, o objavi pa na podlagi recenzije odloča uredniški odbor. Priporočljivo je, da avtorji besedilo spremenijo v skladu s priporočili recenzentov in da popravljeni članek z utemeljitvijo sprejema ali zavrnitve sprememb ponovno pošljejo v pregled. Uredništvo lahko objavo članka zavrne, če vsebinsko ali po merilih kakovosti ne ustreza standardom revije, o čemer avtorje obvestimo v najkrajšem možnem času.
S prispevkom v reviji bodo avtorji spodbujali širjenje znanja s področja naravoslovja in matematike ter tehnike oziroma izobraževanja teh področij in svoje poglede prenašali na trg dela in na prihajajoče generacije.

NAVODILA AVTORJEM

Avtorje prosimo, da pri pripravi članka upoštevajo naslednja navodila.
Če je članek napisan v slovenščini, naj ima angleški prevod naslova, povzetka in ključnih besed. Veseli bomo tudi prispevkov v angleščini, ki pa morajo imeti naslov, razširjen povzetek v obsegu 300 – 400 besed in ključne besede v slovenščini. Ključnih besed naj bo do šest.
Prispevki naj bodo zanimivi za širši krog bralcev. Ključna je intuitivna predstavitev zamisli in rezultatov, podrobnosti pa lahko ostanejo prihranjene za morebitni znanstveni članek, ki bi bil nadgradnja članka, objavljenega v reviji Dianoia.
Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (avtorjev) in sedež ustanove, kjer avtor(ji) dela(jo). Sledi naj povzetek, z največ 150 besedami, seznam ključnih besed in besedilo, ki ne presega 3000 besed. Besedilo naj bo zapisano v urejevalniku besedil MS Word 2010 oz. kasnejši ali LaTeX in naj uporablja objavljeno predlogo. Slike in tabele morajo biti oštevilčene in imeti natančen opis, da jih lahko razumemo brez preostalega besedila. Slike v elektronski obliki naj bodo visoke kakovosti v formatu PNG ali JPEG.
Prispevek v PDF obliki pošljite na naslov dianoia@um.si z zadevo: »Za revijo Dianoia«. Če bo sprejet v objavo, vas bomo prosili za izvorno obliko prispevka.