



Univerza v Mariboru

Fakulteta za naravoslovje
in matematiko



διάνοια

D I A N O I A

REVIJA ZA UPORABO NARAVOSLOVNO-MATEMATIČNIH ZNANOSTI

ISSN	2536-3565
Naslov publikacije/Title	DIANOIA , revija za uporabo naravoslovnih in matematičnih znanosti DIANOIA , journal for applications of natural and mathematical sciences
Letnik/Volume	2
Leto/Year	2018 (april)
Številka/Number	1
Založnik in izdajatelj/ Published & Issued by	Univerzitetna založba Univerze v Mariboru, Slomškov trg 15, 2000 Maribor, Slovenija
Uredništvo/Editorial board	<i>odgovorni urednik/editor in chief</i> Mitja Slavinec <i>glavni urednik/executive editor</i> Drago Bokal <i>izvršni urednici/managing editors</i> Janja Jerebic, Tanja Gologranc <i>urednici za področje biologije/editors for biological sciences</i> Nina Šajna, Sonja Škornik <i>urednik za področje didaktike/editor for didactical sciences</i> Samo Repolusk <i>urednika za področje fizike/editors for physical sciences</i> Robert Repnik, Aleš Fajmut <i>urednika za področje matematike/editors for mathematical sciences</i> Igor Pesek, Janja Jerebic <i>urednik za področje tehnike/editor for technical sciences</i> Mateja Ploj Vrtič <i>tehnična urednica/technical editor</i> Amadeja Bratuša <i>pomočnica tehnične urednice/technical editor assistant</i> Petra Fic
Mednarodni uredniški svet/ International advisory board	Igor Emri (Fakulteta za strojništvo Univerze v Ljubljani, član SAZU), Matej Brešar (FNM, član SAZU), Sergey Pasechnik (Državna fakulteta v Moskvi), Vlad Popa-Nita (Fakulteta za fiziko Univerze v Bukarešti), Blaž Zmazek (FNM), Samo Kralj (FNM), Franci Janžekovič (FNM), Nataša Vaupotič (FNM), Mitja Kaligarič (FNM), Boris Aberšek (FNM), Andrej Šorgo (FNM), Bojan Mohar (Simon Fraser University, Vancouver), Matjaž Perc (FNM), Ivica Aviani (Naravoslovno matematična fakulteta Split), Fahriye Altınay (Univerza v Nikoziji), Andreas M. Hinz (Univerza Ludwig-Maximilians, München)
Oblikovanje/Design	Amadeja Bratuša
Lektoriranje/Proofreading	Ljudmila Bokal
Sedež uredništva/Address	FNM UM, Koroška cesta 160, 2000 Maribor
e-mail	dianoia@um.si
internet/web	www.fnm.um.si
Tisk/Printed by	FNM UM
Leto izida/Year	2018
Datum natisa/Published	2018
Naklada/Nr. of Copies	100 izvodov

Revija izhaja dvakrat letno, predvidoma aprila in septembra.

Kazalo / Table of Contents

Prvi rojstni dan First birthday Drago Bokal	5
Tuttova baricentrična metoda in algoritem Fruchtermana in Reingolda Tutte's barycentric method and the algorithm of Fruchterman and Reingold Dragana Božović	9
Optimizacija procesa proizvodnje elektro razdelilnih omar Optimizing the production process of electric distribution boxes Petra Fic, Blaž Meh, Drago Bokal	19
Pomen inštrukcij matematike The meaning of mathematics instructors Metka Majcen	31
Steinerjev problem s praktičnim primerom Steiner problem with practical example Magdalena Sovič, Tomislav Letnik, Matej Mencinger	39
Biodiverziteta štirinožcev (Tetrapoda) v Sloveniji v primerjavi z drugimi evropskimi državami Biodiversity of tetrapods in Slovenia in comparison to other European countries Natalija Špur, Mojca Cimerman	51
Kemijska teorija grafov in resonančni grafi Chemical graph theory and resonance graphs Niko Tratnik, Petra Žigert Pleteršek	59

Prvi rojstni dan

Drago Bokal

Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Koroška cesta 160, 2000 Maribor, Slovenija

Prva številka drugega letnika Dianoie dosega nove mejnike. Osebno sem najbolj vesel, da smo tako po vsebinski plati kot po zastopanosti avtorjev z reševanjem optimizacijskega problema podjetja EL-COMM, d. o. o., iz Medžimurja presegli nacionalne okvire [3]. Petra Fic, soavtorica, ki je za to najbolj zaslužna, je svoje zanimanje za uporabo matematike potrdila tudi s tem, da je sprejela delo pomočnice tehnične urednice naše revije, s čimer je mednarodna postala tudi ožja operativna ekipa revije. Tako smo zagotovili kontinuiteto študentskega sodelovanja pri tehničnem uredništvu, saj se Amadeja Bratuša, ki je zasnivala celostno podobo revije in pripravila računalniško infrastrukturo, s prihodnjo številko poslavlja.

Drugi pomemben mejnik, dosežen v krogih blizu naše revije, je prva Zoisova štipendija, podeljena (tudi) na podlagi člankov, objavljenih v naši reviji. Čeprav ti kot strokovni prispevki sami niso dovolj za ta uspeh, ker zaradi poudarjanja strokovne uporabnosti in ne znanstvenih novosti niti nimamo tega cilja, pa so se prispevki v Dianoi izkazali za odlično izhodišče in vaja v pisanju znanstvenih prispevkov, ki so kandidatki omogočili, da je z naskokom dosegla kvalifikacijo za Zoisovo štipendijo. Študentje ste lepo vabljeni, da sledite njenim stopinjam, mentorji pa, da jih pri tem usmerjate.

Nekaj potencialnih mentorjev je te priložnosti že prepoznalo, saj lahko kot tretji dosežen mejnik prepoznamo prisotnost soavtorjev z drugih fakultet naše univerze [2, 5, 6]. S prispevki predstavljajo vsebine, s katerimi se ukvarjajo, obenem pa tudi priložnosti, kakšno znanje lahko študentje naše fakultete uporabijo znotraj drugih akademskih in tehnoloških okolij. Dianoia s tem postaja medij, ki ozaveščenim študentom ponuja stik s profesorji ne le kot predavatelji, ampak tudi s profesorji kot raziskovalci. Poglobljen pristop k iskanju mentorja bo zato poleg izkušnje s predavanjem morda še bolj upošteval vsebine, ki jih raziskovalec študentom sam predstavi, sploh v luči zahtev, da si študentje mentorja za magistrsko delo izberejo pred zadnjim semestrom zadnjega letnika študija, idealno pa še prej. Pri tovrstnem objavljanju bodo prednost imeli prispevki, pri katerih so prvi avtorji študentje, saj je revija namenjena predvsem razvoju njihovih akademskih kompetenc.

Na tem mestu velja še omeniti, da smo na uredništvu prejeli predlog, da bi imenom avtorjev dodali akademske nazive pred in za njimi. Tovrstno rangiranje je v akademskem in tudi drugih organiziranih okoljih vsekakor potrebno, saj izkazuje nivo kompetentnosti in odgovornosti za korektno izvajanje družbene vloge in s tem uspeh skupnosti, ki nazive podeljuje, pa naj bo to vojska, država, podjetje ali akademska srenja. Vendar se v uredništvu za to nismo odločili, saj smatramo, da je objava prispevka v reviji predvsem vaja v

prevzemanju odgovornosti s strani študenta. Profesor pri tej vaji lahko sodeluje s svojimi zamislimi in pobudami, saj jih zaradi daljšega staža na področju bistveno lažje dosega, a njegova ključna naloga je, da kot mentor zagotovi, da do izraza pridejo študentove zamisli in pobude, da študent usvoji proces produkcije, ne le reprodukcije znanja. V tem smislu bi tituliranje delovalo moteče in poudarjalo profesorjev rang nad študentom, s čimer bi zameglilo potrebo po študentovem lastnem prevzemanju odgovornosti, obenem pa ne bi bilo v skladu z avtoritativno, spoštljivo kulturo, ki jo v uredništvu želimo gojiti [1, 7]. Poleg tega z odsotnostjo nazivov iskalci znanja povabimo študente medse, na pot, katere del smo že prehodili, in katere rezultati bodo svoj pravi odmev dosegli le, če jih bodo tisti, ki hodijo ali bodo hodili po naši ali vsaj po bližnji poti, znali koristno uporabiti. Ne nazadnje pa ima avtor tega uvodnika lepe spomine na tako izpostavljeno demokratičnost akademske srenje, ko ga je ob potrditvi sprejema v objavo njegovega prvega znanstvenega prispevka urednik kljub eksplicitni navedbi, da gre za študentsko objavo, obravnaval kot povsem enakovrednega sogovornika in ga v prvem dopisu celo nazval z “Dear prof. —”.

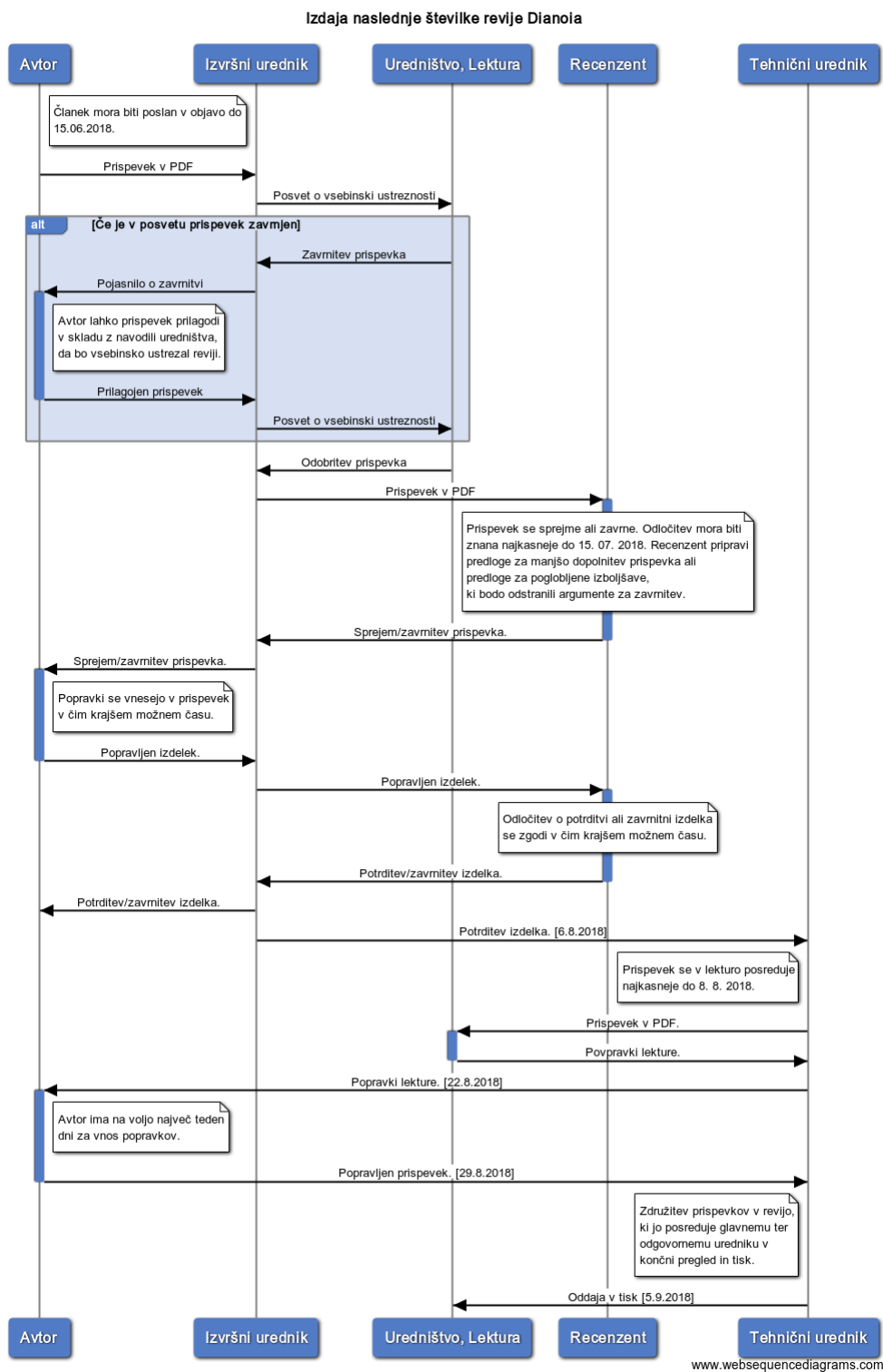
Kot zadnji zanimiv mejnik pa dodajam, da so našo revijo prepoznali tudi pokrovitelji, ki se zanimajo za sodelovnje s študenti naše fakultete, in nas podprli tako pri kritju stroškov kot pri financiranju študentskega dela v uredništvu. V uredništvu namreč zagovarjamo stališče, da so študentje v obdobju, ko morajo v prvi vrsti poskrbeti za svojo bodočo eksistenco, zato se, kljub temu da smo revijo zagnali z volonterskim delom, prizadevamo, da bo njihovo delo lahko tudi primerno nagrajeno.

Z drugim letnikom uvajamo tudi prakso, ki jo je v prejšnji številki zastavila Anja Goričan v prispevku o sekvenčnih diagramih [4]: kot del uvodnika bomo objavljali proces izdelave naslednje številke skupaj s pomembnimi datumi. S tem bomo potencialnim avtorjem, ki se prvič spuščajo na pot objave svojega izdelka, pojasnili korake, ki vodijo do članka, obenem pa bomo tudi sebi pomagali zastaviti ključne mejnike, ki bodo zagotovili pravočasen izid revije. Aprilski rok je namreč pomemben, ker revija izhaja na dan Fakultete za naravoslovje in matematiko, septemberski rok pa omogoča avtorjem uveljavljanje prispevkov pri kandidaturi za Zoisovo štipendijo.

Naše dete, Dianoia, je ob povedanem zakorakala v svoj drugi letnik, in vam, naši avtorji in bralci, smo hvaležni, da ste jo sprejeli in s tem poklonili smisel našim prizadevanjem.

Literatura

- [1] D. Bokal, Kakšno kulturo gojimo? Dianoia 1 (2017), 49–51.
- [2] D. Božović, Tuttova baricentrična metoda in algoritem Fruchtermana in Reingolda, Dianoia 2 (2018), 9–17.
- [3] P. Fic, B. Meh, D. Bokal, Optimizacija procesa proizvodnje elektro razdelilnih omar, Dianoia 2 (2018), 19–29.
- [4] A. Goričan, Proces izdaje nove številke revije Dianoia. Dianoia 1 (2017) 109–112.
- [5] M. Sovič, T. Letnik, M. Mencinger, Steinerjev problem s praktičnim primerom, Dianoia 2 (2018), 39–50.
- [6] N. Tratnik, P. Žigert Pleteršek, Kemijska teorija grafov in resonančni grafi, Dianoia 2 (2018), 57–63.
- [7] G. Stuart, What are authoritarian, permissive, uninvolved, and authoritative parenting styles? Sustaining Community, dostopano 05. 09. 2017.



Slika 1: Proces izdaje naslednje številke revije Dianoia.

Tuttova baricentrična metoda in algoritem Fruchtermana in Reingolda

Tutte's barycentric method and the algorithm of Fruchterman and Reingold

Dragana Božović

Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko, Koroška cesta 46, 2000 Maribor, Slovenija

Povzetek

Tema prispevka je risanje grafov z algoritmi na osnovi sil. Predstavljena sta Tuttova baricentrična metoda in algoritem Fruchtermana in Reingolda. Zaključni se s kratkim opisom implementacije omenjenih algoritmov in prikazom rezultatov oziroma več primeri izrisa grafov s pomočjo teh dveh programov.

Prispevek je nastal na osnovi magistrskega dela: Algoritmi za risanje grafov na osnovi sil (2015).

Ključne besede: risanje grafov, Tuttova baricentrična metoda, algoritem Fruchtermana in Reingolda.

Abstract

The article focuses on force-directed algorithms for graph drawing. We present the Tutte's barycentric method and the algorithm of Fruchterman and Reingold. We conclude it with a brief description of how we implemented mentioned algorithms and show the results, i.e. several different layouts of graphs obtained with them.

The article is based on the master's thesis: Force-Directed Graph Drawing Algorithms (2015).

Key words: graph drawing, Tutte's barycentric method, algorithm of Fruchterman and Reingold.

1 UVOD

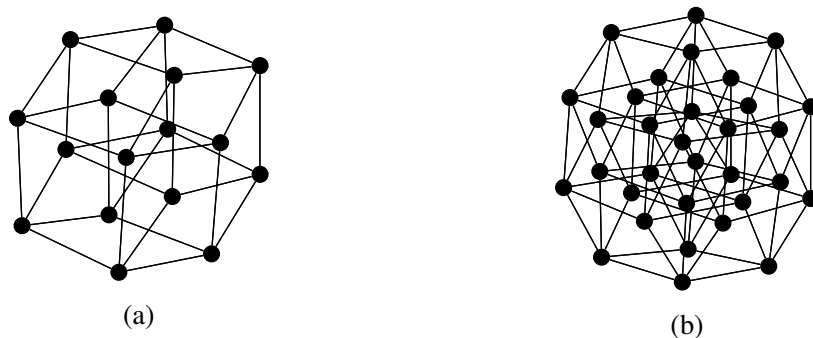
Nekateri izmed najbolj prilagodljivih algoritmov, ki izračunajo postavitve enostavnih neusmerjenih grafov v ravnino, sodijo med algoritme, ki delujejo na osnovi sil. Izračun postavitve grafa v ravnini teh algoritmov temelji izključno na lastnostih same strukture grafa in ne uporablja nobenih drugih (specifičnih) znanj. Risbe grafov, ki jih proizvedejo ti algoritmi, so ponavadi estetske in simetrične. Nekateri izmed njih izrišejo graf v ravnini tako, da se nobeni dve povezavi ne sekata nikjer druge razen morebiti v skupnem krajišču. V nadaljevanju predpostavljamo, da so vhodni grafi enostavni, neusmerjeni, povezani in so njihove vložitve v ravnino risbe z ravnimi črtami.

Eden prvih algoritmov za risanje grafov, ki delujejo na osnovi sil, je Tuttov algoritem iz leta 1963 [2]. Ta temelji na osnovi baricentričnih reprezentacij. Med bolj znanimi algoritmi sta algoritem Fruchtermana in Reingolda [3] in Eadesova vzmetna postavitve [4]. Oba temeljita na vzmetnih silah, podobnih tistim v Hookovem zakonu. V teh metodah imamo

odbojne in privlačne sile. Odbojne obstajajo med vsemi vozlišči, privlačne pa med vsemi sosednjimi vozlišči.

Izračun sil med vozlišči pa lahko računamo tudi na podlagi najkrajših poti v grafu. Algoritem Kamade in Kawaia [5] uporablja vzmetne sile, ki so sorazmerne grafovskim razdaljam. Splošno velja, da metode, ki temeljijo na osnovi sil, opredelijo kriterijsko funkcijo, ki vsaki postavitvi grafa priredi pozitivno realno število. To število predstavlja energijo postavitve. Funkcija je definirana tako, da majhna realna števila (nizke energije) ustrezajo tistim postavitvam, pri katerih so nesosednja vozlišča razmaknjena v primerjavi s sosednjimi vozlišči, ki so na razdalji blizu neki vnaprej določeni (manjši) vrednosti. Z iskanjem minimuma kriterijske funkcije algoritem potem izračuna postavitev grafa. Na sliki 1 je prikazan izris 4-kocke in 5-kocke.

Omenjeni algoritmi, ki delujejo na osnovi sil, naredijo dobre izračune za grafe z majhnim številom vozlišč. Če ima vhodni graf več sto vozlišč, so izračuni zanj precej slabi. Za to obstaja več razlogov. Eden od glavnih je, da ima fizikalni model običajno veliko lokalnih minimumov. Tudi če se s pomočjo sofisticiranih mehanizmov poskušamo izogniti lokalnemu minimumu, algoritmi na osnovi sil niso sposobni dosledno računati dobrih postavitve za velike grafe. Težave so tudi z ločljivostjo, saj je po navadi najmanjša razdalja med vozlišči velikih grafov zelo majhna, kar privede do nečitljivih risb.



Slika 1: Primeri risb, pridobljenih z algoritmi na osnovi sil.

V poznih 90. letih 20. stoletja so razvili številne tehnike, ki so razširile funkcionalnost teh algoritmov na grafe z več deset tisoč in celo več sto tisoč vozlišči. Temeljili so na tehniki večnivojske postavitve.

Klasični algoritmi za risanje grafov, ki delujejo na osnovi sil, so običajno omejeni na izračun postavitve grafa v evklidski geometriji (tipično $\mathbb{R}^2$ ali $\mathbb{R}^3$). Poznamo pa tudi primere, ko se to ne izkaže za najboljšo možnost. Obstajajo grafi s takšno strukturo, ki je najboljše prikazana v kakšni drugi geometriji, recimo na površini krogle ali na površini torusa. Določene neevklidske geometrije imajo posebne lastnosti, ki so zelo primerne za dobre risbe velikih grafov [1].

2 TUTTOVA BARICENTRIČNA METODA

Prvi algoritem za risanje grafov na osnovi sil je Tuttova baricentrična metoda iz leta 1963. Vhodni graf tega algoritma je 3-povezan in ravninski. Na generirani risbi so povezave grafa ravne črte. Za razliko od marsikatero druge metode za risanje grafov na osnovi sil ta zagotavlja, da se povezave grafa ne sekajo (razen v skupnih krajiščih) in da so vsa lica grafa konveksna.

Tuttov algoritem začne s fiksnim licem ravninskega grafa, nato pa izračuna pozicijo preostalih vozlišč tako, da reši sistem linearnih enačb, kjer je pozicija vsakega vozlišča določena kot konveksna linearna kombinacija pozicij njegovih sosedov (to pomeni, da so vsi koeficienti linearne kombinacije iz intervala $[0, 1]$ in je njihova vsota enaka 1).

Ideja Tuttovega algoritma je, da če je lice ravninskega grafa fiksno, potem lahko ustrezne pozicije preostalih vozlišč izračunamo tako, da rešimo sistem linearnih enačb, kjer je pozicija vsakega vozlišča določena kot konveksna kombinacija pozicij njegovih sosedov. Pri tem modelu ima vsaka povezava uv določeno silo, ki pa je sorazmerna razdalji med njunima krajiščema u in v in ni nobenih eksplisitnih odbojnih sil. Tako je sila v vozlišču v opisana kot

$$F(v) = \sum_{uv \in E(G)} (p_u - p_v),$$

kjer sta p_u in p_v poziciji vozlišč u in v . Trivialni minimum te funkcije je dosežen z vsemi vozlišči postavljenimi na isto mesto. Da bi se temu izognili, množico vozlišč razdelimo na fiksna vozlišča in prosta vozlišča. Če parcialne odvode funkcije sile F enačimo z nič, dobimo dva neodvisna sistema linearnih enačb, enega za koordinato x in enega za koordinato y .

V *foreach* zanki algoritma 1 imamo torej sistem linearnih enačb, v katerem je število enačb enako številu neznank, kar pa je enako številu prostih vozlišč. Sistem lahko učinkovito rešimo z različnimi metodami, npr. Gaussovo eliminacijo s pivotiranjem [6], z Newton-Raphsonovo metodo itd. Rešitev sistema je enolično določena in postavi prosta vozlišča na težišče (baricenter) svojih sosedov. Večja pomanjkljivost opisanega pristopa je pogosta slaba vozliščna ločljivost končne risbe [1].

Vhod: $G := (V, E)$, particija $V = V_0 \cup V_1$, konveksen poligon P ;
Izhod: pozicija p_v za vsako vozlišče iz V , tako da fiksna vozlišča tvorijo konveksen poligon P ;
 1 postavi vsa fiksna vozlišča $u \in V_0$ na poligon P ;
 2 postavi vsa prosta vozlišča v izhodišče;
 3 repeat
 4 foreach prosto vozlišče $v \in V_1$ do
 5
$$x_v = \frac{1}{\deg(v)} \sum_{(u,v) \in E} x_u;$$

 6
$$y_v = \frac{1}{\deg(v)} \sum_{(u,v) \in E} y_u;$$

 7 until x_v in y_v ne konvergirajo za vse proste točke v

Algoritem 1: Psevdokoda Tuttove baricentrične metode [1].

3 ALGORITEM FRUCHTERMANA IN REINGOLDA

Algoritmi, ki so želeli izračunati čim boljše estetske postavitve grafov, so imeli dva glavna cilja: naj bodo dolžine vseh povezav enake in naj bo postavitve grafa čim bolj simetrična. V letu 1991 se je pojavil algoritem Fruchtermana in Reingolda, ki je omenjenima ciljema dodal še cilj, da je porazdelitev vozlišč enakomerna. Vozlišča je obravnaval kot atomske delce, ki med seboj ustvarjajo privlačne in odbojne sile. Te so definirane kot

$$f_a(d) = d^2/k, \quad f_r(d) = -k^2/d,$$

kjer je d razdalja med vozliščema in k optimalna razdalja med vozliščema definirana kot

$$k = C \sqrt{\frac{\text{površina}}{\text{število vozlišč}}},$$

pri čemer je C neka konstanta.

Algoritem med vsemi pari vozlišč izračuna odbojne sile, med vsemi pari sosednjih vozlišč pa tudi privlačne sile. Dodan je še pojem temperature, uporabljen na naslednji način: temperatura je določena na neko začetno vrednost (npr. desetino širine risalne površine) in se linearno znižuje k 0. S tem je nadzorovano premikanje vozlišč tako, da boljša kot je postavitve, manjša je temperatura in s tem so manjše prilagoditve pozicij vozlišč (poseben primer simuliranega ohlajanja).

Osnovni algoritem v vsaki ponovitvi izračuna $O(|E|)$ privlačnih sil in $O(|V|^2)$ odbojnih sil. Fruchterman in Reingold sta predstavila tudi t. i. mrežno različico njunega osnovnega algoritma, kjer sta ignorirala odbojne sile med zelo oddaljenimi vozlišči in s tem zmanjšala kvadratno zahtevnost izračuna odbojnih sil. Za grafe z malo povezavami in enakomerno porazdelitvijo vozlišč na risalni površini lahko časovno zahtevnost izračuna odbojnih sil aproksimiramo celo na $O(|V|)$.

Vhodni grafi algoritma so običajno majhni grafi, ki nimajo več kot 40 vozlišč.

```

Vhod:  $W, L, G := (V, E)$ ;
Izhod: Pozicije vseh vozlišč iz  $V(G)$ ;
1  $k := \sqrt{\text{območje}/|V|}$ ;
2 for  $i := 0$  to iteracije do begin
3     for  $v \in V$  do begin
4          $v.\text{disp} := 0$ ;
5         for  $u \in V$  do
6             if  $(u \neq v)$  then begin
7                  $\delta := v.\text{pos} - u.\text{pos}$ ;
8                  $v.\text{disp} := v.\text{disp} + (\delta/|\delta|) * (k^2/|\delta|)$ ;
9             end
10        end
11    for  $e \in E$  do begin
12         $\delta := e.v.\text{pos} - e.u.\text{pos}$ ;
13         $e.v.\text{disp} := e.v.\text{disp} - (\delta/|\delta|) * (|\delta|^2/k)$ ;
14         $e.u.\text{disp} := e.u.\text{disp} + (\delta/|\delta|) * (|\delta|^2/k)$ ;
15    end
16    for  $v \in V$  do begin
17         $v.\text{pos} := v.\text{pos} + (v.\text{disp}/|v.\text{disp}|) * \min(v.\text{disp}, t)$ ;
18         $v.\text{pos}.x := \min(W/2, \max(-W/2, v.\text{pos}.x))$ ;
19         $v.\text{pos}.y := \min(L/2, \max(-L/2, v.\text{pos}.y))$ ;
20     $t := \text{ohladi}(t)$ 
21 end

```

Algoritem 2: Psevdokoda algoritma Fruchtermana in Reingolda [1].

Algoritem za vhodna parametra prejme števili W in L , ki predstavljata širino in dolžino risalne površine. Vsa vozlišča vhodnega grafa G imajo določeno začetno pozicijo in vsako posamezno vozlišče je predstavljeno z vektorjem pozicij pos in vektorjem premikov disp . Z δ je označen vektor razlike med pozicijama dveh vozlišč. V *for* zanki 3. vrstice izračunamo odbojne sile, v *for* zanki 11. vrstice pa privlačne sile. V zadnji *for* zanki omejimo največji odmik pozicije vozlišča na temperaturo t in zagotovimo, da odmik ni zunaj risalne površine. Na koncu posamezne ponovitve znižamo temperaturo.

4 IMPLEMENTACIJA IN REZULTATI

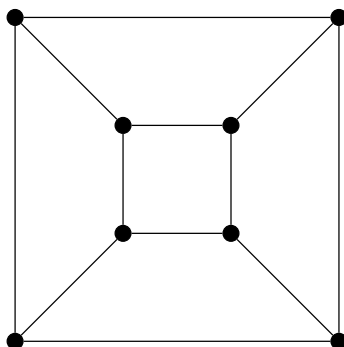
Oba algoritma smo programirali v programskem jeziku Java.

Najprej smo se lotili implementacije Tuttove baricentrične metode. Linearni sistem n enačb z n neznankami v tem algoritmu smo rešili z metodo Gaussove eliminacije z delnim pivotiranjem.

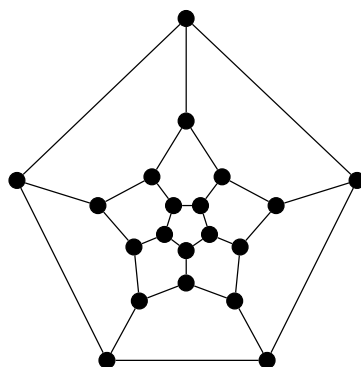
Prvi graf, nad katerim smo preizkusili algoritem, je bil kocka. V množico fiksnih vozlišč smo dali 4 vozlišča. Pozicije preostalih izračuna algoritem in vrne graf na sliki 2.

V drugem preizkusu algoritma smo za vhodni graf izbrali dodekaeder. V množico fiksnih vozlišč smo tokrat dali 5 vozlišč. Pozicije preostalih 15 je izračunal program. Izris grafa prikazujemo na sliki 3.

Implementirali smo tudi algoritem Fruchtermana in Reingolda.



Slika 2: Izris kocke s pomočjo Tuttovega algoritma.



Slika 3: Izris dodekaedra s pomočjo Tuttovega algoritma.

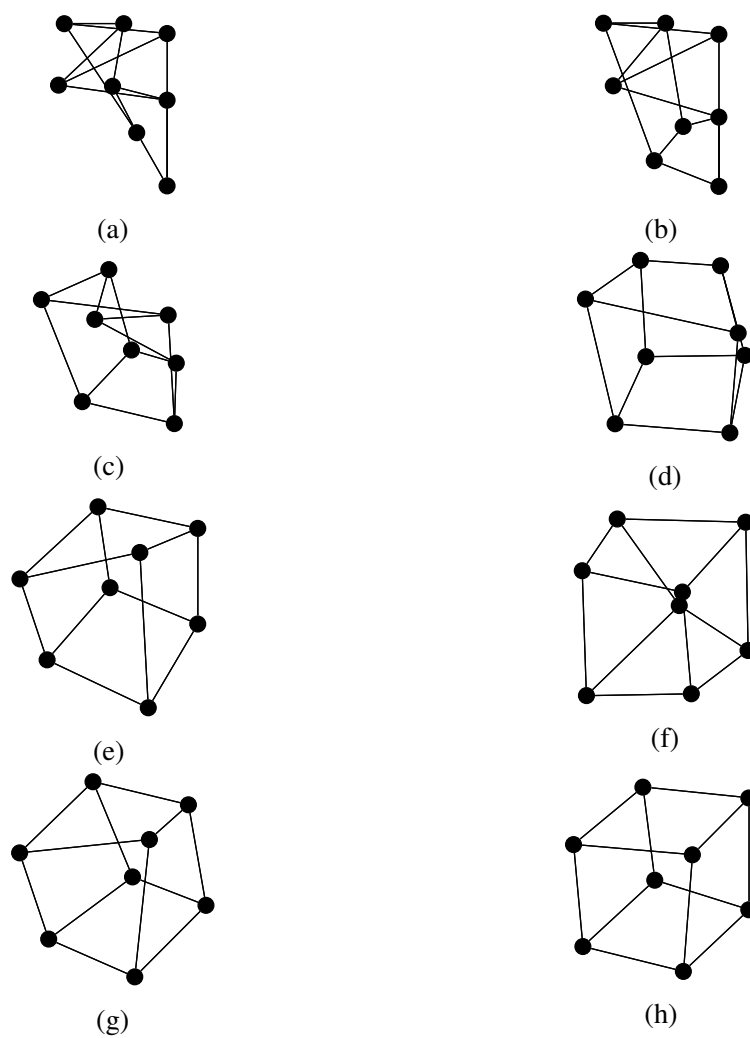
Tudi tega smo preizkusili na različnih vhodnih grafih, najprej na kocki. Potek izrisa je prikazan na sliki 4. Hitro lahko opazimo, da je bil izris grafa s Tuttovim algoritmom ravninski, medtem ko smo pri tem algoritmu dobili 3D sliko. Iz te je lažje razvidno, kateri graf smo želeli izrisati.

Delovanje Tuttove baricentrične metode je odvisno od množice fiksni vozlišč. Na podlagi teh algoritmov izračuna pozicijo preostalih vozlišč, tako da za vsako vozlišče v končni sliki velja, da je na težišču (baricentru) svojih sosedov.

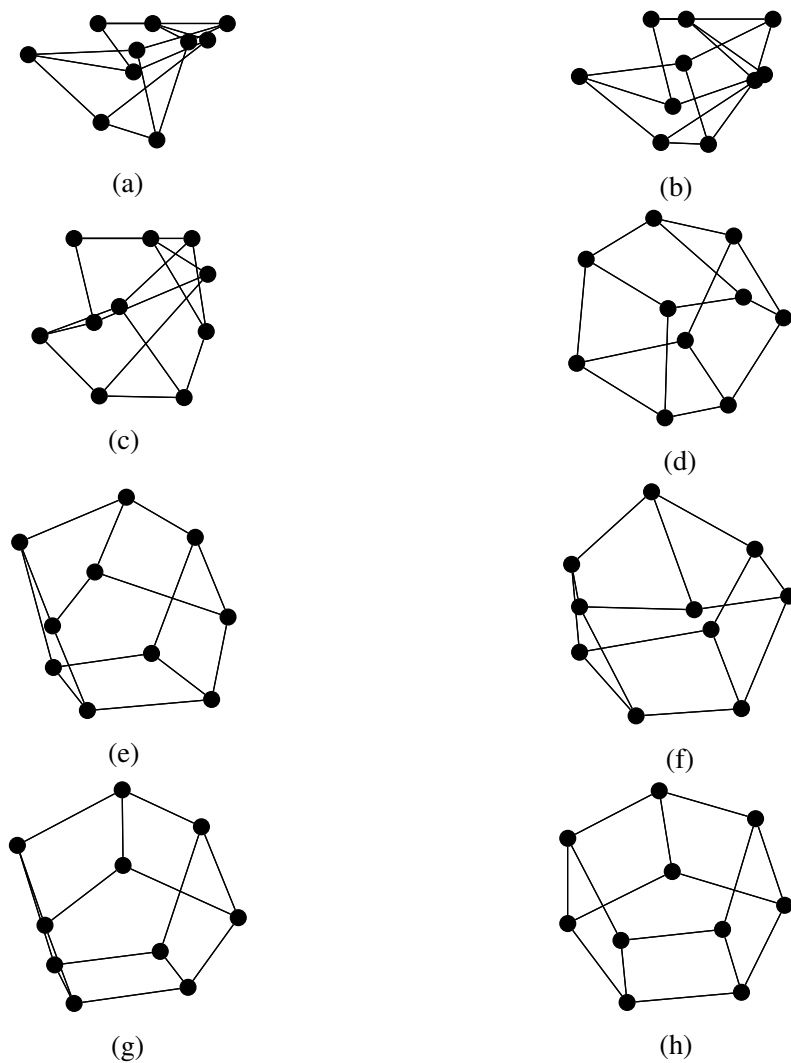
Algoritem Fruchtermana in Reingolda se začne s poljubno postavitvijo vozlišč. To postavitev nato z uporabo privlačnih in odbojnih sil izboljšuje, cilj algoritma pa je takšen 3D izris grafa, iz katerega lahko hitro prepoznamo, kateri graf smo želeli izrisati.

Algoritem smo preizkusili še na drugih grafih. Na sliki 5 prikazujemo potek izrisa petstrane prizme.

Za konec prikazujemo še dva izrisa: izris pravilne tristrane piramide 6 a in izris dvojne kocke 6 b.



Slika 4: Potek izrisa kocke s pomočjo algoritma Fruchtermana in Reingolda.



Slika 5: Potek izrisa pravilne petstrane prizme s pomočjo algoritma Fruchtermana in Reingolda.



Slika 6: Izris pravilne tristrane piramide in dvojne kocke s pomočjo algoritma Fruchtermana in Reingolda.

Literatura

- [1] R. Tamassia, *Handbook of Graph Drawing and Visualization*, CRC Press, 2013.
- [2] W.T. Tutte, Convex Representation of Graphs, *Proceedings of the London Mathematical Society* **10** (1960), 304-320.
- [3] T.M.J. Fruchterman and E.M. Reingold, Graph Drawing by Force-directed Placement, *Software-Practice and Experience* **21** (1991), 1129-1164.
- [4] Peter Eades, A heuristic for graph drawing, *Congressus Numerantium* **42** (1984), 149–160.
- [5] T. Kamada and S. Kawai, An algorithm for drawing general undirected graphs, *Information Processing Letters* **31** (1989), 7–15.
- [6] B. Jurčič-Zlobec, A. Perne, *Octave z uvodom v numerične metode*, Fakulteta za elektrotehniko, Ljubljana, 2009.

Optimizacija procesa proizvodnje elektro razdelilnih omar

Optimizing the production process of electric distribution boxes

Petra Fic, Blaž Meh, Drago Bokal

Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Koroška cesta 160, 2000 Maribor, Slovenija

Povzetek

Namen tega članka je razčleniti uporabo ustreznih matematičnih metod za optimizacijo proizvodnje in povečanje prihodkov podjetja EL-COMM, d. o. o., ki se nanaša na proizvodnjo petih različnih vrst elektro razdelilnih omar z vnaprej postavljenimi omejitvami. Le-te vključujejo razpoložljivost določenih sestavin, časa, ki je potreben za izvedbo določenih dejavnosti, in prostora, kjer lahko stoji zaloga. Elektro razdelilne omare se delajo po naročilu in na zalogo. Problem je, kako delati zalogo. Problem smo rešili v Excel reševalcu, kjer je narejen matematični model, ki na optimalen način predlaga izdelavo zaloge. Z uporabo Excel reševalca za optimizacijo proizvodnega procesa podjetja EL-COMM d. o. o. bodo doseženi rezultati, iz katerih je mogoče zmanjšati stroške in proizvajalcu zagotoviti večje dobičke.

Ključne besede: operacijske raziskave, linearno programiranje, proizvodnja, elektro razdelilna omara, Excel Reševalec

Abstract

The purpose of this paper is to use appropriate mathematical methods in order to optimize production and increase the income of a company called EL-COMM d.o.o. with a focus on pre-set limits. Among others, one of the main services of the company EL-COMM d.o.o is the production of five different types of electric distribution boxes. The limits include the availability of certain electro-material, the time which is necessary to carry out certain activities, and the place where the stock is held. Electro distribution boxes are made according to client's orders and for the stock. The main decision the company consists of allocating the available production resources to production of a stock items. This problem was solved in Excel Solver, where a mathematical model, which optimally suggests the production of stock, is made. By using Excel Solver to optimize the production process of EL-COMM d.o.o., certain results were achieved, which show the possibility of reducing costs and increasing profit.

Key words: operational research, linear programming, production, electrical distribution box, Excel Solver

1 UVOD

Podjetje EL-COMM, d. o. o. se ukvarja s proizvodnjo električnih razdelilnih omar za stanovanjske in poslovne prostore ter veleprodajo elektromateriala po vsej Hrvaški. Ustanovljeno je bilo leta 1994, sedež pa ima v Žiškovcu v Medžimurju. Sodelovali so pri izgradnji številnih objektov po vsej Hrvaški, na primer Auto Centar Baumgartner, d. o. o., v Čakovcu, Srednja italijanska šola v Puli, Policijska postaja v Glini, Hotel Adriatic v Opatiji, Moderna galerija v Zagrebu, PC Baška na Krku, Auto salon Elcon Peugeot v Zaboku in Panda, d. o. o., v Čakovcu.

Problem, s katerim se zgoraj predstavljeno podjetje trenutno sooča, nastaja na oddelku proizvodnje razdelilnih omar za elektriko. Električna razdelilna omara se uporablja za distribucijo električne energije v industrijskih, stavbnih in distribucijskih omrežjih. Proizvajajo 5 različnih tipov omar. V vse tipe ohišij se kasneje vgradijo varovalke, števeci, glavna ter druga stikala, vse skupaj pa se spoji z električnim kablom. Proizvajalec te

E-mail naslovi: petra.ficc@gmail.com (Petra Fic), blaz.meh@gmail.com (Blaž Meh), d@bokal.net (Drago Bokal)

komponente naroči pri dobavitelju mesec vnaprej, nato te zaloge skladišči v lastnih prostorih. Za vsak model razdelilne omare se razlikujejo komponente in količina potrebnega elektromateriala za izdelavo.

V podjetju so v tem oddelku zaposleni trije delavci, ki delajo pet dni na teden, vsak dan po osem ur. Razdelilne omarice se izdelujejo glede na naročila, ki zajemajo tip omarice, količino in rok, do katerega mora biti naročilo opravljeno. Če naročila ne zapolnijo proizvodnje, se izdeluje omarice na zalogo, ki je omejena s prostorom skladišča.

Poglejmo si zgled problema. Podjetje prejme 3 naročila za 3 različne vrste razdelilnih omar. Prvo za omaro z *id1* in količino 1, drugo za omaro z *id2* in količino 1 in tretjo za omaro z *id4* in količino 1. Rok za vsa naročila je en teden, torej 5 delovnih dni. Podjetje zanima, koliko morajo poleg naročil izdelati razdelilnih omar za v zalogo in katere, da se bo ustvaril največji dobiček in da bodo vsa naročila uresničena v roku.

2 ZAMISLI

Za rešitev problema iščemo ekstrem kriterijske funkcije več neodvisnih spremenljivk tako, da spremenljivke zadoščajo predpisanim pogojnim enačbam oz. neenačbam. Poleg tega opazimo tudi, da so kriterijska funkcija in pogojne enačbe oz. neenačbe linearne glede na vse spremenljivke ter da so rešitve spremenljivk nenegativne vrednosti.

Iz zgoraj opaženih lastnosti lahko vidimo, da opisani problem spada med probleme, ki se rešujejo s pomočjo linearnega programiranja, še več, iščemo celoštevilsko rešitev in posledično je področje, ki nam pomaga pri reševanju, celoštevilsko linearno programiranje.

Osnovo linearnega programiranja predstavlja linearna algebra, začetki linearnega programa pa datirajo v čas pred drugo svetovno vojno. Prve formulacije problemov in prve metode reševanja je leta 1939 v svoji knjigi zapisal ruski matematik Kantorovič.

To smer so neodvisno od ruskih kolegov za optimizacijo industrijskih procesov razvijali tudi na ameriških tleh, na primer l. 1941 Hitchcock. Malo kasneje, okoli leta 1947, je Dantzig odkril splošno algebrasko metodo reševanja linearnih programov, imenovano metoda simpleksov. S to metodo je mogoče numerično rešiti vsak problem linearnega programiranja. V praksi morajo linearni programi upoštevati številne okoliščine in posledično zahtevajo za reševanje veliko računskih operacij. Posledično se je linearno programiranje zares uveljavilo šele z razvojem računalnikov. V razvoju linearnega programiranja je zato pomemben mejnik leto 1952, ko je bil prvič izdelan program za elektronsko reševanje problemov linearnega programiranja po metodi simpleksov.

Z matematičnega vidika problemi linearnega programiranja ne povzročajo več nobenih težav. Probleme linearnega programiranja v splošnem računamo z algebraskimi metodami, matematična sredstva, ki jih pri tem uporabljamo, pa so odvisna od števila nastopajočih spremenljivk in od števila pogojnih enačb oz. neenačb. Dandanes imamo številna programska orodja, ki nam pomagajo pri reševanju takšnih problemov (npr. AMPL).

V tem delu smo uporabili kar vgrajeno možnost programa Microsoft Office Excel. Omenjeni program je najbolj razširjeno orodje za urejanje podatkov in iz tega naslova je smiselno nalogo opreti nanj.

Po obdelavi naročil in rokov in ob predpostavki zadostnih količin sestavnega materiala je obstoječi model, ki ustreza našemu problemu izdelave zaloge in ga podjetje rešuje vsak teden, problem nahrbtnika z dvema viroma, prostornino skladišča in razpoložljivim delovnim časom

zaposlenih (ang. *2d knapsack problem*), kjer dodamo spodnje meje za proizvodnjo naročenih izdelkov. Nahrbtnik predstavlja skladišče, kamor hočemo shraniti izdelke s kar največjo možno vrednostjo. Omejitev predstavlja volumen skladišča V , vsak izdelek pa ima svoj volumen v_i in svojo vrednost c_i . Glede količine ponovitev določenega tipa izdelka nimamo omejitev, čeprav bi jih bilo mogoče smiselno uvesti. Zatorej spada med neomejene probleme nahrbtnika. V praksi pa vpeljemo omejitve na dejanske zaloge materiala ob začetku tedna, zato dejanski končni problem poimenujemo večdimenzionalni problem nahrbtnika z neomejeno zalogo predmetov. Iščemo torej rešitev $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ z maksimalno vrednostjo, torej $\max \sum_{i=1}^n (x_i - n_i) * c_i$

pri naslednjih omejitvah:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - n_i) * v_i \leq V, \text{ kjer je } n_i \text{ število naročil elektro razdelilne omare } x_i.$$

$$x_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Problem se v večini rešuje z dinamičnim programiranjem. Glavna ideja za tem pristopom je, da lahko rešitev problema, torej optimalni nahrbtnik, razdelimo na nek pravilni izdelek in na nahrbtnik, katerega prostornina je natanko za prostornino prej omenjenega izdelka manjša. S ponavljanjem te lastnosti pridemo do zelene rešitve.

3 KORAKI REŠEVANJA PROBLEMA

1. korak: pridobitev podatkov

Zberemo potrebne podatke za reševanje problema: čas, potreben za izdelavo vsake vrste elektro razdelilne omare, in razpoložljiv čas v tednu, material, potreben za izdelavo vsake vrste elektro razdelilne omare, in količino razpoložljivega materiala, prostornina prostora, kjer se skladišči narejena zaloge, prostornina vsake vrste elektro razdelilne omare, profit, ustvarjen s prodajo vsake vrste elektro razdelilne omare, število omar na zalogi na začetku tedna in aktualna naročila.

2. korak: ureditev pridobljenih podatkov

Najprej vpišemo vse pridobljene podatke v Excel kot vhodne podatke. Ti se razlikujejo za vsak tip elektro razdelilne omare, so pa sledeči: delo, potrebno za izdelavo v urah, dolžina žice v metrih, količina varovalk, stikal, števecv in glavnih stikal, volumen vsake vrste elektro razdelilne omare, zalogo, ki je v skladišču na začetku tedna za vsako vrsto elektro razdelilnih omar, in naročila, ki se morajo izdelati v tem tednu.

	A	B	C	D	E	F	G	H
	Ulazni podaci		GRO INDUSTRIJSKI OMAR	HIŠNI OMAR	GRADILIŠ NI OMAR	PRIKLJUČ NI OMAR	MERNI OMAR	
1								
2		Delo (h)	40	8	23	22	39	
3		Žica (m)	200	20	50	10	150	
4		Varovalke	50	20	10	2	10	
5		Stikala	5	0	2	0	0	
6		Števci	0	1	0	0	10	
7		Glavna stikala	1	1	1	1	1	
8		Volumen	0,96	0,02	0,80	0,16	0,27	
9		Začetna zaloga	4	2	1	13	1	
10		Naročila	3	2	0	7	2	
11		Končna zaloga	5	2	2	17	0	
12		Profit (kn)	4800	282	1450	1560	2520	
13								

Slika 1: Vhodni podatki, vpisani v Excel.

3. korak: identifikacija spremenljivk

Nato identificiramo spremenljivke. Spremenljivke so vrednosti, ki jih je treba določiti za rešitev problema.

V konkretnem problemu so to količine vsake vrste elektro razdelilnih omar, ki jih treba izdelati. Spremenljivke označimo z x_1 , x_2 , x_3 , x_4 in x_5 , kjer je x_1 količina GRO industrijskih omar, x_2 količina hišnih omar in tako dalje, celotno peterico pa z x .

		GRO INDUSTRIJSKI OMAR	HIŠNI OMAR	GRADILIŠ NI OMAR	PRIKLJUČ NI OMAR	MJERNI OMAR
Spremenljivke						
	Proizvedene količine	0	0	0	0	0

Slika 2: Spremenljivke, vpisane v Excel.

4. korak: določitev pogojev

Vrednosti spremenljivk niso poljubne, ampak so odvisne od zahtev konkretnega problema. To so naše pogojne enačbe oz. neenačbe.

V tem problemu imamo 7 pogojskih neenačb: število delovnih ur, dolžina žice za vgradnjo, količina varovalk, stikal, števecv in glavnih stikal in prostor, kjer skladiščimo zalogo.

Skupno število delovnih ur na teden je 120. Ure, ki so potrebne za izdelavo posameznega tipa omare, so naslednje: 40 ur za izdelavo GRO industrijske omare, 8 ur za hišno omaro, 23 ur za gradbeno omaro, 22 ur za priključno omaro in 39 ur za izdelavo merne omare:

$$40x_1 + 8x_2 + 23x_3 + 22x_4 + 39x_5 \leq 120$$

Skupna tedenska zaloga žice, namenjene za proizvodnjo, znaša 1200 metrov, za izdelavo pa potrebujemo: 200 metrov za GRO industrijsko omaro, 20 metrov za hišno omaro, 50 metrov za gradbeno omaro, 10 metrov za priključno omaro in 150 metrov za merno omaro:

$$200x_1 + 20x_2 + 50x_3 + 10x_4 + 150x_5 \leq 1200$$

Tedenska zaloga varovalk je 300 kosov. Za izdelavo GRO industrijske omare potrebujemo 50 kosov, za hišno omaro 20 kosov, za gradbeno omaro 10 kosov, za priključno omaro 2 kosa in 10 kosov za izdelavo merne omare:

$$50x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 2x_4 + 10x_5 \leq 300$$

Na voljo imamo 50 kosov stikal na teden. Za izdelavo GRO industrijske omare potrebujemo 5 kosov, gradbeno omara potrebuje 2 kosa, medtem ko za izdelavo preostalih vrst elektro razdelilnih omar ne potrebujemo stikal.

$$5x_1 + 2x_3 \leq 50$$

Potrebujemo tudi števec, katerih tedenska zaloga znaša 25 kosov. Vgrajujemo jih v hišne omare, tu potrebujemo enega, ter 10 za merno omaro.

$$x_2 + 10x_5 \leq 25$$

Na zalogi imamo 20 kosov glavnih stikal. Za izdelavo vsake vrste elektro razdelilne omare potrebujemo po eno glavno stikalo:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 20$$

Omejen imamo tudi prostor, kjer bomo shranjevali narejene izdelke. To skladišče je veliko 10 m³, pri čemer GRO industrijska omara zavzame 0,96 m³ prostora, hišna omara 0,02 m³, gradbeno omara 0,80 m³, priključna omara 0,16 m³ in merna omara 0,27 m³. Pri tem n_1 predstavlja skupno število naročenih izdelkov tipa 1 itd.:

$$0,96(x_1 - n_1) + 0,02(x_2 - n_2) + 0,8(x_3 - n_3) + 0,16(x_4 - n_4) + 0,27(x_5 - n_5) \leq 10$$

Spremenljivke x_1 , x_2 , x_3 , x_4 in x_5 morajo biti tudi pozitivne, saj ni mogoče izdelati negativno število omar:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

Meje	=SUMPRODUCT(C2:G2;C16:G16)			180
Žica (m)	0	≤		1200
Osigurači	0	≤		300
Sklopke	0	≤		50
Brojila	0	≤		25
Glavni prekidač	0	≤		20
Volumen	0	≤		10

Slika 3: Omejitve, vpisane v Excel.

5. korak: ustvarjanje kriterijske funkcije

Naslednji korak je ustvarjanje kriterijske funkcije modela. Kriterijska funkcija matematično izraža razmerje med spremenljivkami v modelu, ponavadi iščemo minimum ali maksimum te funkcije.

V konkretnem primeru kriterijska funkcija izraža največji možni profit, ki ga lahko dobimo z izdelovanjem produktov za v zalogo (proizvodnja poleg dobljenih naročil). Pri tem n_1 predstavlja skupno število naročenih izdelkov tipa 1 itd.:

$$f(x) = 4800(x_1 - n_1) + 282(x_2 - n_2) + 1450(x_3 - n_3) + 1560(x_4 - n_4) + 2520(x_5 - n_5)$$

Ker nas zanima največji možni dobiček, bomo izbrali take vrednosti spremenljivk, da bo vrednost kriterijske funkcije maksimalna.

Ciljna funkcija	=SUMPRODUCT(C12:G12;C16:G16)
-----------------	------------------------------

Slika 4: Kriterijska funkcija, vpisana v Excel.

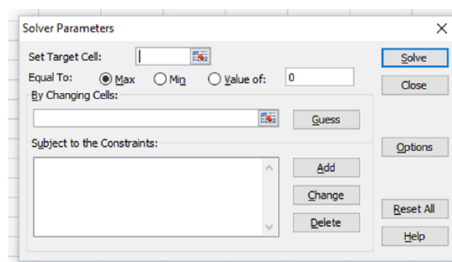
Ko vpišemo vse podatke, dobimo naslednjo tabelo v Excelu:

	A	B	C	D	E	F	G	H
	Ulazni podaci		GRO INDUSTRIJSKI OMAR	HIŠNI OMAR	GRADILNI OMAR	PRIKLUČNI OMAR	MERNI OMAR	
1								
2		Delo (h)	40	8	23	22	39	
3		Žica (m)	200	20	50	10	150	
4		Varovalke	50	20	10	2	10	
5		Stikala	5	0	2	0	0	
6		Števci	0	1	0	0	10	
7		Glavna stikala	1	1	1	1	1	
8		Volumen	0,96	0,02	0,80	0,16	0,27	
9		Začetna zaloga	4	2	1	13	1	
10		Naročila	3	2	0	7	2	
11		Končna zaloga	1	0	1	6	0	
12		Profit (kn)	4800	282	1450	1560	2520	
13								
14								
	Spremenljivke		GRO INDUSTRIJSKI OMAR	HIŠNI OMAR	GRADILNI OMAR	PRIKLUČNI OMAR	MJERNI OMAR	
15								
16		Proizvedene količine	0	0	0	0	0	
17								
18	Meje	Rad (h)	0	≤	120			
19		Žica (m)	0	≤	1200			
20		Osigurači	0	≤	300			
21		Sklopke	0	≤	50			
22		Brojila	0	≤	25			
23		Glavni prekidač	0	≤	20			
24		Volumen	0	≤	10			
25								
26	Ciljna funkcija	Profit	0 kn					
27								

Slika 5: Excel tablica.

6. korak: Vnos modela linearnega programiranja

Rešitev dobimo z uporabo dodatka imenovanega *Reševalec* (ang. *Solver*) v programu Microsoft Excel. Definicija problema linearnega programiranja se ohranja kot objekt s podatkovno tabelo Excel. Nato uporabimo program *Excel Solver*. Najdemo ga pod razdelkom *Data*, v sklopu *Analysis*. Ob njegovem zagonu se nam odpre okno z imenom *Solver Parameters*.



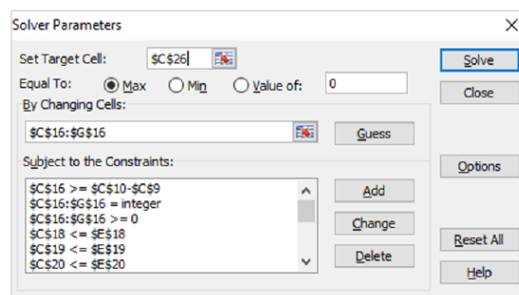
Slika 6: Solver Parameters.

V *Set Target Cell* vpišemo polje, v katerem smo definirali kriterijsko funkcijo. V konkretnem primeru je to polje C26.

Pod *Equal to* določimo vrsto optimizacijskega problema, v konkretnem primeru maksimum. Spremenljivke problema vpišemo v polje z imenom *By Changing Cells*, v konkretnem problemu so to celice C16, D16, E16, F16 in G16.

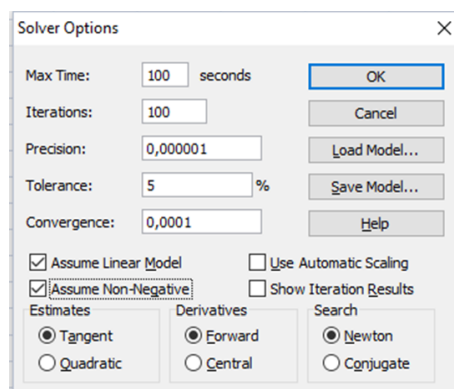
Pogoje vnesemo v polje z imenom *Subject to the Constraints*. Tu definiramo tudi celoštevilске vrednosti spremenljivk.

Solver Parameters v konkretnem problemu je prikazan na naslednji sliki:



Slika 7: Excel Solver v konkretnem problemu.

V oknu *Solver Parameters* lahko izberemo tudi *Options*, kjer imamo možnost spreminjati prednastavljene dodatne možnosti, s katerimi bolj natančno opredelimo način reševanja naloge. Tu izberemo *Assume linear problem*.



Slika 8: Nastavitve Excel reševalca.

Pri uspešno rešenem optimizacijskem problemu se nam odpre pogovorno okno *Solver Results*. Rešitev se izpiše v celice spremenljivk, v konkretnem primeru v C16:G16.

Ulazni podaci		GRO INDUSTRIJSKI OMAR	HIŠNI OMAR	GRADILIŠNI OMAR	PRIKLJUČNI OMAR	MIERNI OMAR	Raspoloživo
	Delo (h)	40	8	23	22	39	120
	Žica (m)	200	20	50	10	150	1200
	Varovalke	50	20	10	2	10	300
	Stikala	5	0	2	0	0	50
	Števci	0	1	0	0	10	25
	Glavna stikala	1	1	1	1	1	20
	Volumen	0,96	0,02	0,80	0,16	0,27	10
	Začetna zaloga	1	2	0	0	0	
	Naročila	1	0	0	0	0	
	Končna zaloga	3	2	0	0	0	
	Profit (kn)	4800	282	1450	1560	2520	
Spremenljivke		GRO INDUSTRIJSKI OMAR	HIŠNI OMAR	GRADILIŠNI OMAR	PRIKLJUČNI OMAR	MIERNI OMAR	
	Proizvedene količine	3	0	0	0	0	
Meje	Rad (h)	120	≤	120			
	Žica (m)	600	≤	1200			
	Osiguradci	150	≤	300			
	Sklopke	15	≤	30			
	Brojila	0	≤	25			
	Glavni prekidač	3	≤	20			
	Volumen	2,88	≤	10			
Ciljna funkcija		Profit	14.400 kn				

Slika 9: Rešitev problema.

5 POMEN ZA UPORABNIKA

Po izdelavi modela smo naredili primerjavo s podatki izdelave elektro razdelilnih omar v podjetju EL-COMM, d. o. o. v naslednjih mesecih: september, oktober in november. Podatki njihove izdelave so podani v naslednji tabeli:

		GRO INDUSTRIJSKI OMAR	HIŠNI OMAR	GRADILIŠNI OMAR	PRIKLJUČNI OMAR	MIERNI OMAR	Max možni profit
September	Začetna zaloga	1	2	0	3	0	
	Naročilo	1	2	4	3	2	
	Moramo narediti	0	0	4	0	2	
	Za zalogo	1	3	1	1	2	34.580,00 kn
	Prodano	1	2	4	3	2	
Oktober	Zaloga	1	3	1	1	2	
	Naročilo	4	2	4	4	3	
	Moramo narediti	3	0	3	3	1	
	Za zalogo	0	0	0	0	0	39.364,00 kn
	Prodano	4	2	4	4	3	
November	Zaloga	0	0	0	0	0	
	Naročilo	3	2	0	7	2	
	Moramo narediti	3	2	0	7	2	
	Za zalogo	0	2	1	1	1	36.002,00 kn
	Prodano	3	2	0	7	2	
Zaloga		0	2	1	1	1	
							109.946,00 kn

Tabela 1: Izdelava elektro razdelilnih omar za september, oktober in november v podjetju EL-COMM, d. o. o.

S preučevanjem poteka dela iz dane tabele smo ugotovili naslednje:

- Kljub temu da je imel en delavec v septembru dopust, nismo porabili vseh ur, namenjenih za izdelavo elektro razdelilnih omar, pri čemer nastaja izguba.
- Zaloga, ki so jo pripravili v septembru, ni bila zadostna, da bi pokrila vsa naročila. Zaradi tega ni ostalo dovolj časa za izdelavo izdelkov za skladiščenje. Temu bi se lahko izognili z boljšim izkoristkom delovnega časa.

• V novembru ni bilo toliko naročil in so lahko proizvajali tudi produkte za skladiščenje. Predlog izdelave elektro razdelilnih omar na temelju modela za isto obdobje je podan v naslednji tabeli:

		GRD INDUSTRIJSKI OMAR	HIŠNI OMAR	GRADILNIŠNI OMAR	PRIKLJUČNI OMAR	MIERNI OMAR	Max možni profit
Začetna zaloga		1	2	0	3	0	
September	Naročilo	1	2	4	3	2	
	Moramo narediti	0	0	4	0	2	
	Za zalogo	3	2	4	6	2	56.048,00 kn
	Prodano	1	2	4	3	2	
	Zaloga	3	2	4	6	2	
Oktober	Naročilo	4	2	4	4	3	
	Moramo narediti	1	0	0	0	1	
	Za zalogo	4	2	1	11	1	45.094,00 kn
	Prodano	4	2	4	4	3	
	Zaloga	4	2	1	13	1	
November	Naročilo	3	2	0	7	2	
	Moramo narediti	0	0	0	0	1	
	Za zalogo	4	2	1	11	1	32.882,00 kn
	Prodano	3	2	0	7	2	
	Zaloga	5	2	2	17	1	
							134.024,00 kn

Tabela 2: Izdelava elektro razdelilnih omar za september, oktober in november po narejenem modelu.

Model predlaga takšno proizvodnjo, da pri morebitnem večjem naročilu naročilo opravimo s skladiščenimi izdelki.

S primerjavo teh 2 tabel oziroma dejanske izdelave v podjetju EL-COMM, d. o. o. in predloga, ki ga poda naš model, lahko ugotovimo, da z našim modelom dobiček povečamo za 24.078,00 kn v treh mesecih oziroma povprečno za mesec 8.026,00 kn.

6 ZAKLJUČEK

V podjetju EL-COMM, d. o. o., so problem reševali tako, da so dobljena naročila izdelovali po roku naraščajoče, za skladiščenje pa so delali izdelke, za katere se jim je zdelo, da bodo najprej prodani. Če se je zgodilo, da se katero od naročil ne bi izvedlo v roku, so podaljšali delovni čas, da zadostijo roku. Rezultat tega so povečani stroški zaradi plačila nadur. Organizacija dela je bila manj učinkovita, zaradi česar niso vedno porabili vseh razpoložljivih ur v tednu. Naš model pomaga uporabniku optimalno izkoristiti delovne ure in pri tem narediti zalogo za primer, če pride do takega števila naročil, da jih ne bi bilo mogoče zadostiti v tekočem tednu. S tem znižamo stroške z manj plačanimi nadurami. Slabost našega modela pa je, da niti intuitivno (kot so to počeli v obstoječem poslovnem procesu) ne upošteva časa, ko izdelki ležijo v skladišču in s tem povezane stroške. Nadgradnjo modela, ki te stroške upošteva, bi lahko pripravili z večmesečnim ali celo večletnim spremljanjem ležalnega časa izdelkov, kjer bi dobiček v prihodnosti prodanih izdelkov revalorizirali na neto sedanjo vrednost glede na njihovo pričakovano ležalno dobo. Dokler podatkov nimamo, pa je v nadaljevanju raziskav smiselno pripraviti Monte Carlo simulacijo uporabe takega modela, s čimer bi ocenili upravičenost stroškov, povezanih z zbiranjem podatkov.

Literatura

- [1] Z.~Babić, Linearno programiranje, Ekonomski fakultet, Split, 2010.
- [2] El-comm d.o.o., 01.12.2017., <https://el-comm.hr>
- [3] J.~Grasselli, A.~Vadnal, Linearno programiranje, DMFA-ZALOŽNIŠTVO, Ljubljana, 2003.
- [4] T.~Jerkovič, *Zmogljivosti programa Excel za optimizacijo*, 05.01.2018., https://www.fmf.uni-lj.si/~juvan/Racunalninstvo3/0809/gradivo/excel_in_optimizacija.pdf

- [5] Optimization with excel, HEC MONTREAL, 10.01.2018.,
www.hec.ca/en/cam/help/topics/optimization-with-excel.pdf
- [6] T.~Perić, Linearni model proizvodnje, 05.01.2018.,
web.efzg.hr/dok/MAT/tperic/2_OI_20151.pdf
- [7] J.~Povh, Simpleksna metoda za linearno programiranje, Presek 35 (2007/2008), 3.
- [8] L.~Zadnik Stirn, Metode operacijskih raziskav za poslovno odločanje, Visoka šola za upravljanje in poslovanje, Novo Mesto, 2001.

Pomen inštrukcij matematike

The meaning of mathematics instructors

Metka Majcen

Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Koroška cesta 160, 2000 Maribor, Slovenija

Povzetek

Rezultati spodaj opisane vzorčne raziskave so pokazali, da današnji učenci in dijaki potrebujejo največ dodatne zunajšolske pomoči v obliki inštrukcij pri predmetu matematika, saj predstavljajo kar polovico inštrukcij v primerjavi z drugimi predmeti. Običajno si delo inštruktorja predstavljamo tako, da učencu oziroma dijaku obrazložimo učno temo, mu pokažemo postopek reševanja določene naloge, ga spodbujamo ter namenimo celoten čas le enemu učencu ali dijaku izven časa in prostora šole.

V članku nas je zanimalo, kako inštruktor matematike vpliva na znanje in na uspešnost pri preverjanju znanja učencev in dijakov. Zagotovo vpliva tudi na samozavest; lahko jo izboljša, lahko pa dodatno izniči samopodobo učenca. Zanimalo nas je, kakšen pogled imajo današnji učenci in starši šol ptujskega območja na inštruktorje matematike. Opravljena je bila anketa, katere rezultati so pokazali, da je trend inštruiranja pri predmetu matematika v primerjavi z drugimi predmeti šolskimi predmeti največji in se še povečuje. Učenci in dijaki se odločijo za inštrukcije zaradi nerazumljene razlage, odsotnosti od pouka, novih učnih sklopov ... in menijo, da so dolgoročno uspešne. Po prejemanju inštrukcij so veliko bolj samozavestni in motivirani. Raziskava je nadalje potrdila, da tudi starši podpirajo inštrukcije.

Ključne besede: inštrukcije, pouk matematike, učna uspešnost, izobraževanje.

Abstract

The results of the sample survey described below showed that today's students need most extracurricular help in the form of mathematics instructions, as they account for as much as half of all instructions. We usually imagine that the instructor's work is comprised of explaining the incomprehensible subject to the student, showing him the process of solving a certain task, encouraging him and devoting all his time to only one student at once outside of school. In the article, I was interested in how a mathematics instructor influences knowledge and successfulness in student's knowledge testing. He certainly also affects self-esteem; he can improve it, or he can further worsen the student's self-image. I was interested in what nowadays students and parents of Ptuj region think of mathematics instructors. A survey was made and the results of which showed that the trend of mathematics instructions, compared to other subjects in school, is the biggest and is still increasing. Students decide to get instructions because of an incomprehensible explanation, absence from classes, new learning units, and because they believe that instructions are successful in the long-term. After getting instructions, they are much more self-confident and motivated. The research further confirmed that parents also support instructions.

Key words: instructions, mathematics, learning success, education.

1 UVOD

Praksa inštruiranja je zelo stara, a je med učenci prejšnjega stoletja kot oblika dodatne učne pomoči prevladovala medvrstniška pomoč (Kesič Dimić, 2005). Na tem mestu se sprašujemo, kaj se je z učenci spremenilo v zadnjih desetletjih ter zakaj se je povečalo povpraševanje po inštrukcijah. Morda je razlog v spremembi organizacije šolskega sistema, učiteljih predmetnega pouka, novih generacij otrok, itd.

Osnovna šola pomeni elementarno osnovno izobrazbo in s tem dosegljiv nivo znanja za vse otroke. Devetletka je vnesla individualizacijo in hkrati možnost dela v homogenih skupinah ter strategije dela z učenci s posebnimi potrebami. Kljub temu je vedno več učencev, ki potrebujejo dodatno razlago in učno pomoč pri matematiki (Žerovnik, 2007). Vzrokov je več: ker jim je določena učna tema še nepoznana ali preprosto niso razumeli učiteljeve razlage ali niso bili dovolj zbrani ali pa so bili odsotni od pouka. Učenec ali dijak ima lahko tudi težave z

motivacijo ter dojemanjem znanja kot vrednoto, zato posledično ne razvijejo matematične samozavesti ter pozitivnega odnosa do predmeta, ki je eden izmed splošnih ciljev v učnem načrtu matematike v osnovnih in srednjih šolah.

Gimnazija velja za srednješolski program z najzahtevnejšim učnim načrtom, vendar se ob naraščajočem številu inštrukcij sprašujem, ali učitelji pri delu ne uporabljajo ustreznih učnih prijemov ter strategij in ali se dijaki v šolo vpisujejo s slabim predznanjem in učnimi zmožnostmi. Morda so se za izobraževanje v določenem programu odločili starši in ne dijak.

Med razloge za potrebo po inštrukcijah lahko uvrstimo tudi slab učni uspeh kot posledico razvajanosti in pretirane odvisnosti od pomoči staršev pri učenju (Žerovnik, 2007). V vsaki generaciji imamo tudi učence ali dijake, ki se ne znajo samostojno učiti, npr. učence s splošnimi in specifičnimi učnimi težavami, katerim jim moramo učitelji in strokovni delavci nuditi dodatno učno pomoč.

Med aktivnostmi, ki so na voljo učencem z nerazumevanjem tekoče snovi pri matematiki ter pri drugih predmetih, štejemo dopolnilni pouk (izvaja ga predmetni učitelj), individualno pomoč (v izvedbi mobilnih socialnih pedagogov, šolske svetovalne službe, predmetnega ali razrednega učitelja), skupinsko obliko pomoči (sodelovalno učenje skupaj z učiteljem), vrstniško pomoč (sodelovalno učenje z vrstniki), starševsko aktivnost (spodbuda, samozavest) ter inštrukcije (težave pri učenju zaradi slabega predznanja), (Golob, 2012, str. 45). Pri vseh oblikah dodatne učne pomoči se prepričamo, da bi se začasne učne težave razvile v stalne težave, ki bi jim sledil slab učni uspeh. Učencem se ponovno razloži učna tema, z dodatnimi nalogami se vpeljejo nazaj v tekočo snov, posledično pa ne začutijo, da zaostajajo v razumevanju (Brne, 2016).

V primerjavi z zgoraj omenjenimi sistemskimi rešitvami se inštrukcije lahko zdijo manj učinkovite, vendar je raziskava (Karsenty, 2009) pokazala, da zunajšolsko poučevanje in učenje lahko pripomore k boljšemu razumevanju in hitrejšemu doseganju zadanih ciljev, ki naj bi jih učenci dosegli glede na letni delovni načrt učitelja matematike (Brne, 2016).

Učni neuspeh je treba preprečevati. Ko se pojavijo slabše ocene in pomoč v okviru šole ne rešuje več učnega neuspeha, je treba poiskati pomoč zunaj šole (Žerovnik, 2007). Preden starši svojim otrokom priskrbijo inštruktorja, morajo skupaj z delavci šole ter strokovnimi delavci prepoznati njegove učne težave. Če gre za specifične učne težave (npr. motnje branja, pisanja, računanja, koncentracije, itd.), je priporočljiva strokovna pomoč svetovalnih delavcev ali specialnih pedagogov. Inštruktor ob specifičnih učnih težavah ne bo vedno znal učinkovito reagirati, saj mora obvladati snov, ki jo bo razlagal, in hkrati poznati značilnosti učne težave pri otroku, prilagoditi metode razlage in poučevanja ter uporabiti primerne didaktične pripomočke. Karsenty (2009) v svojem članku tudi poudarja, da je pri poučevanju učencev z učnimi težavami ključna čustvena vez med inštruktorjem in učencem, ki omogoča, da učenec napreduje, ne da bi se pri tem primerjal s hitrejšimi in zmožnejšimi sošolci.

Prav tako so pomembne naslednje lastnosti inštruktorja:

- prilagodi se situaciji in učencu, ki ga uči,
- zelo dobro obvlada učne vsebine,
- je iznajdljiv, zna motivirati učenca, pritegne njegovo pozornost in poslušnost (Kesič Dimić, 2005),
- je vztrajen in dovolj zahteven (razlaga je posredovana prilagojeno otrokovi stopnji razumevanja), (Golob, 2012, str. 50).

V primerjavi s strokovnimi delavci so inštruktorji šibkejši v strokovnem znanju, delovnih izkušnjah in načinu poučevanja, vendar imajo velikokrat boljše socialne veščine (povezanost z učencem, večje razumevanje, dostopnost, itd.) (Brne, 2016, str. 21). Inštruktor nudi večjo pozornost in podporo v domačem okolju, v katerem se učenec počuti dobro in udobno. Prav tako nudi takojšnjo povratno informacijo in spodbuja učenca.

Ena izmed dodatnih oblik učne pomoči je tudi starševska pomoč, ki se z odraščanjem otroka zmanjšuje. Starši vedno težje dohajajo učne cilje, ki naj bi jih otrok dosegel. »Zgodi se, da zaradi prezaposlenosti in pomanjkanja volje za ukvarjanje z otrokom starši prelagajo skrb na nekoga drugega. Nekateri starši se ob tem umikajo, otrok izgublja stik s starši, ukvarjanje z otrokom se seli iz družine. Instrukcije nikoli ne morejo nadomestiti vzgoje, so samo učna pomoč, torej individualno posredovanje znanja, ki ga otrok v razredu ni zmozel osvojiti« (Žerovnik, 2007, str. 5). Nikakor pa instrukcije ne smejo podpirati lenobe. Instrukcije morajo praviloma dajati hitre rezultate: najprej izboljšanje učnega uspeha in dvig motivacije, potreba po učni pomoči se mora zmanjševati, odločitev za samostojno učenje pa povečevati. Običajno se pri otroku izboljša tudi samopodoba in okrepi prizadevanje na celotnem učnem področju (Žerovnik, 2007, str. 5).

Instrukcije so postale del pridobitne dejavnosti, zato so jih starši ali kasneje dijaki prisiljeni plačati. Zneski so različni, saj so instruktorji zasebniki, ki to opravljajo kot svojo zaposlitev, ali študentje matematike, ki ponudijo svojo pomoč za (pogosto) manjše plačilo.

Zanimalo me je, kaj instrukcije pomenijo učencem in dijakom ter kako jih podpirajo starši. Ugotoviti sem želela naslednje:

- Ali so učenci in dijaki že kdaj prejeli dodatno učno pomoč v obliki instrukcij?
- Kaj so razlogi za pojav potrebe po dodatni učni pomoči?
- Kaj je učencem in dijakom pri instrukcijah matematike všeč v primerjavi z drugimi oblikami dodatne učne pomoči?
- Ali so instrukcije matematike dejansko uspešne?
- Ali instrukcije matematike vplivajo na samopodobo učencev?
- Ali starši podpirajo instrukcije?

Na podlagi teorije ter raziskovalnih vprašanj sem sestavila naslednje hipoteze:

1. Največ učencev in dijakov prejema instrukcije pri predmetu matematika.
2. Učenci in dijaki posežejo po dodatni učni pomoči zaradi nerazumljene razlage.
3. Instrukcije matematike so učencem in dijakom všeč, ker je razlaga učne snovi počasnejša, instruktor pa jih spodbuja, kar poveča samozavest pri učencih.
4. Instrukcije matematike so uspešne.
5. Starši podpirajo instrukcije.

2 METODOLOGIJA RAZISKOVANJA

Raziskovalni vzorec:

Raziskava je bila opravljena v mesecu aprilu in maju 2017. Osnovni vzorec so predstavljali osnovnošolci ter dijaki, stari med 11 in 18 let. V raziskavo sem vključila naključne učence zadnje triade Osnovne šole Markovci, naključne dijake Ekonomske šole Ptuj in Gimnazije Ptuj. Skupno je bilo vključenih 246 učencev in dijakov. Vzorec sem razdelila na štiri skupine, in sicer glede na smer šolanja. Za takšen vzorec sem se odločila, ker me zanima primerjava pogostosti instrukcij glede na smer in stopnjo izobraževanja ter glede na spol.

Raziskovalne metode:

Za raziskovanje sem sestavila vprašalnik, ki je vseboval 11 vprašanj (od tega 3 splošna vprašanja). Anketiranje je potekalo skupinsko pod nadzorom učitelja, ki ne poučuje matematike. Ko sem prejela rezultate, sem površne odgovore odstranila. Tako sem v nadaljevanju obdelala 222 izpolnjenih anketnih vprašalnikov. Rezultate sem predstavila s

pomočjo tabele ter paličnega grafikona, kjer sem uporabila program Excel. Vprašalnik je priložen na koncu članka.

3 REZULTATI

Tabela 1: Prikaz števila anketirancev glede na spol in smer šolanja.

	dekle		fant		skupno
	f	f %	f	f %	
osnovna šola	29	49	30	51	59
srednja poklicna šola	39	89	5	11	44
srednja tehniška in strokovna šola	52	90	6	10	58
gimnazija	35	57	26	43	61
SKUPNO	155	70	67	30	222

Tabela 2: Prejemanje inštrukcij.

	dekle				fant			
	DA		NE		DA		NE	
	f	f %	F	f %	f	f %	f	f %
osnovna šola	15	52	14	48	14	47	16	53
srednja poklicna šola	20	51	19	49	4	80	1	20
srednja tehniška in strokovna šola	20	38	32	62	3	50	3	50
gimnazija	27	77	8	23	15	58	11	42
SKUPNO	82	53	73	47	36	54	31	46

Rezultati raziskave so pokazali, da je več kot polovica anketirancev vsaj enkrat že prejela inštrukcije kot obliko dodatne učne pomoči pri kateremkoli predmetu. Približno enak delež deklet in fantov je že prejelo inštrukcije. Če pa pogledamo delež prejetja inštrukcij glede na vrsto izobraževalnega programa, so rezultati pokazali, da je v osnovni šoli ta delež precej podoben, v srednjih poklicnih šolah ter srednjih tehniških in strokovnih šolah je izjemno povečan delež fantov, v gimnazijskem izobraževanju je povečan delež deklet (77 %).

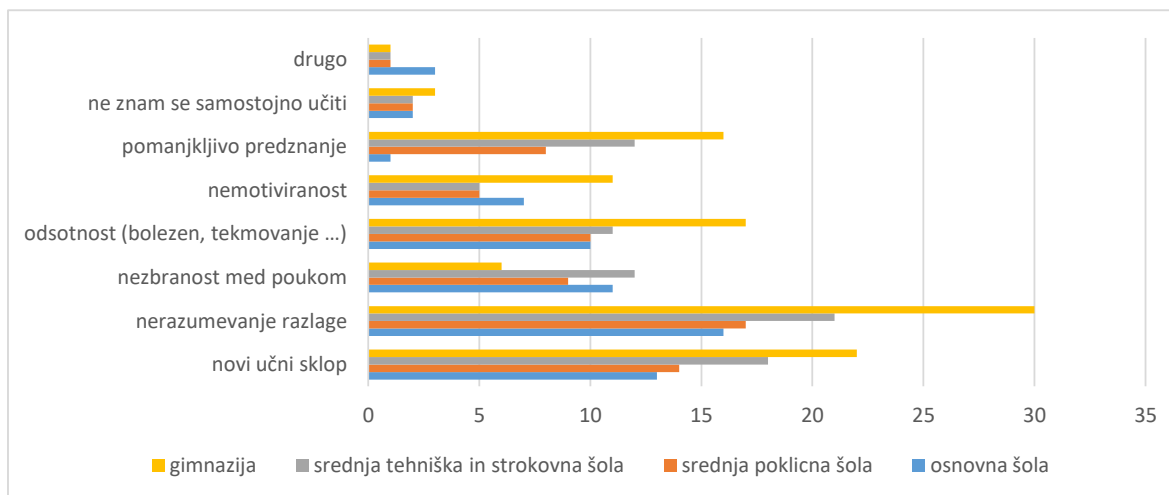
Tabela 3: Delež prejetja inštrukcij glede na učni predmet.

	osnovna šola		srednja poklicna šola		srednja strokovna in tehnična šola		gimnazija	
	f	f %	F	f %	f	f %	f	f %
matematika	21	64	24	80	20	74	32	73
angleščina	9	27	2	7	3	11	6	14
nemščina	-	-	-	-	2	8	-	-
fizika	1	3	3	10	-	-	3	7
kemija	-	-	1	3	-	-	1	2
drugo	2	6	-	-	2	7	2	4

Na to vprašanje so odgovorili učenci in dijaki, ki so na prejšnje vprašanje odgovorili z DA (107). Ker so nekateri učenci in dijaki označili več predmetov, sem izračunala deleže glede na

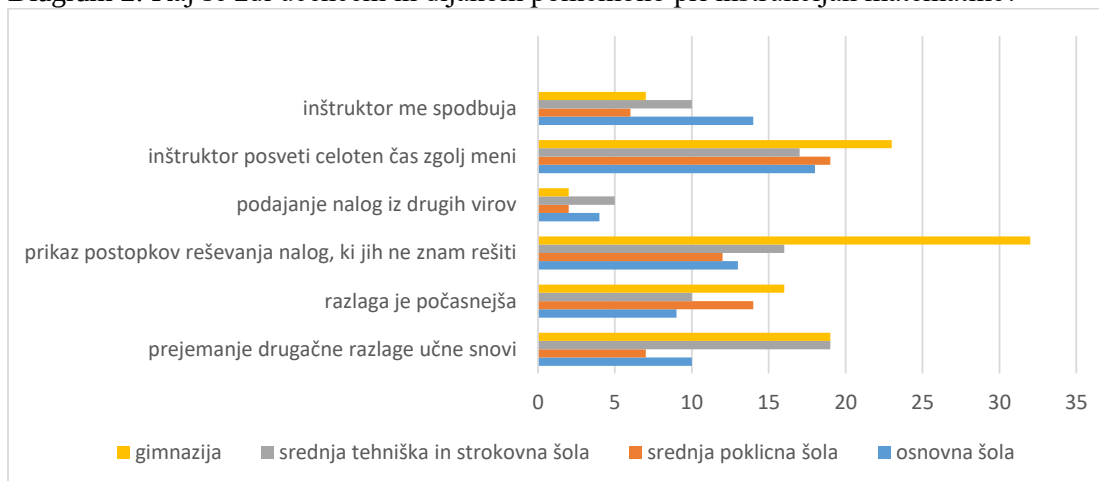
vse označene odgovore (134). V vseh smereh izobraževanja je matematika predmet, za katerega se je več kot 64 % učencev in dijakov odločilo za prejemanje inštrukcij, sledijo tuji jeziki, fizika, kemija in drugi. V srednjih šolah je delež še višji.

Diagram 1: Zakaj se pojavi potreba po prejemanju inštrukcij matematike?



Učence in dijake, ki so že kdaj prejeli inštrukcije (107), sem vprašala, zakaj se pojavi potreba po prejemanju inštrukcij matematike. Označili so več izmed naslednjih odgovorov: nove učne vsebine, nerazumljiva učiteljeva razlaga, nezbranost, nemotiviranost, odsotnost od pouka, pomanjkljivo predznanje, nesamostojno učenje ter drugo. Najpogostejša razloga sta nerazumljiva razlaga ter novi učni sklop.

Diagram 2: Kaj se zdi učencem in dijakom pomembno pri inštrukcijah matematike?

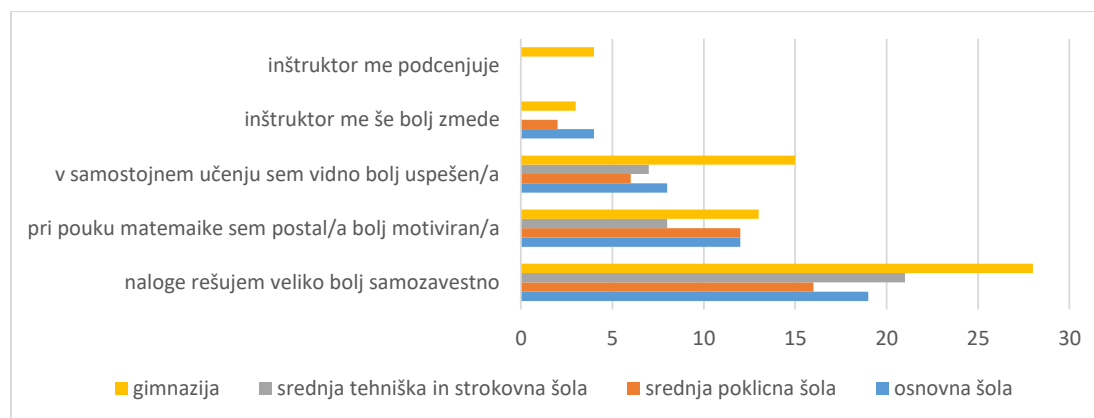


Učenci in dijaki (107), ki so že kdaj prejeli inštrukcije so izbirali med naslednjimi razlogi: prejemanje drugačne razlage učne snovi, počasnejša razlaga, prikaz postopka reševanja nalog, ki jih sami ne znajo rešiti, dodatne naloge iz drugih virov, inštruktor posveti celoten čas zgolj njemu, spodbuda inštruktorja ter drugo. Najpogostejši odgovori so izpostavili prednost inštruktorja, da posveti celoten čas zgolj enemu učencu ali dijaku. Najmanj pomembno se učencem in dijakom zdi prejemanje nalog iz drugih virov.

USPEŠNOST INŠTRUKCIJ

Vprašanje številka 5 je učence in dijake vprašalo po uspešnosti inštrukcij matematike. 92 % anketiranih učencev in dijakov je potrdilo uspešnost. Rezultati odgovorov na vprašanje o dolgoročni ali kratkoročni uspešnosti (vprašanje 6) so pokazali, da je skupno 66 % učencev in dijakov mnenja, da prejemanje inštrukcij matematike dolgoročno vpliva na uspešnost posameznika, 34 % učencev in dijakov jih meni obratno.

Diagram 3: Kako inštrukcije matematike vplivajo na učence in dijake?



Učenci in dijaki (107), ki so že kdaj prejeli inštrukcije, menijo, da inštrukcije matematike vplivajo na večjo samozavest pri reševanju nalog, večjo motiviranost pri pouku matematike ter vidno uspešnost v samostojnem učenju. Majhen delež anketirancev je odgovoril, da jih inštruktor zmede ali podcenjuje.

Tabela 4: Starši in inštrukcije.

	osnovna šola		srednja poklicna šola		srednja strokovna in tehnična šola		gimnazija	
	f	f %	f	f %	f	f %	f	f %
starši podpirajo inštrukcije	41	75	21	75	28	90	40	77
starši ne podpirajo inštrukcij	14	25	7	25	3	10	12	23
SKUPNO ODGOVOROV	55	100	28	100	31	100	52	100

Vprašanje številka 8 v anketnem vprašalniku je učence in dijake vprašalo o mnenju staršev o inštrukcijah. Na vprašanje so odgovorili učenci in dijaki, ki so že kdaj prejeli inštrukcije, kot tudi drugi (skupno 166 odgovorov). Rezultati raziskave so pokazali, da v več kot 75 % starši podpirajo inštrukcije, dijaki srednjih strokovnih in tehničnih šol so pritrdili s kar 90 %.

4 DISKUSIJA

Namen raziskave je bil ugotoviti pomen inštruktorja matematike za učence ter dijake. Zanimalo me je, kako pogosto se učenci in dijaki odločijo za prejemanje dodatne učne pomoči v obliki inštrukcij pri kateremkoli predmetu. Rezultati so potrdili, da je kar polovica učencev

v osnovni šoli že prejelo inštrukcije pri kateremkoli predmetu. Ta rezultat me je zaskrbljujoče presenetil. Morda je glede na ta rezultat premalo izkoriščene medvrstniške pomoči ter starševske dodatne učne pomoči. Visok delež prejemanja inštrukcij je tudi med dijaki srednjih tehniških in strokovnih šol ter na gimnaziji (77–80 %) zaradi prezahtevnosti programa ali nezadostnega predznanja, kot je nadaljevanju pokazala raziskava.

Rezultati raziskave so potrdili hipotezo, da je matematika predmet, pri katerem učenci in dijaki potrebujejo največ dodatne učne pomoči v obliki inštrukcij. Ta trend je mogoče opaziti že med osnovnošolci, v kasnejših obdobjih šolanja pa se še povečuje.

Zanimalo me je, zakaj se pri učencih in dijakih pojavi potreba po prejemanju inštrukcij matematike. Večina jih je označila nerazumljivo razlago, nove učne vsebine, odsotnost od pouka, pomanjkljivo predznanje. Razumljivo je, da je med osnovnošolci manj pogost odgovor pomanjkljivo predznanje, saj učenci še nimajo občutka za samoocenjevanje znanja in so ocenjeni le znotraj svojega razreda, kjer pa že poznajo uspešnejše ali manj uspešne učence. Kljub temu učenci na razredni stopnji pri matematiki usvojijo elementarno znanje, ki ga predmetni učitelji že lahko ocenijo in tako lahko govorimo o pomanjkljivem predznanju. Ko učenci prestopijo v srednješolsko izobraževanje, sledi primerjanje ter ocenjevanja predznanja glede na širše krajevno območje ter s tem odkrivanje morda pomanjkljivega predznanja.

Raziskava je nadalje pokazala, da se učenci in dijaki iz različnih razlogov odločijo za prejemanje inštrukcij matematike kot dodatne oblike učne pomoči: inštruktor posveti celoten čas zgolj enemu učencu/dijaku, prikaže postopke reševanja nalog, ki jih sami ne znajo rešiti, inštruktor spodbuja učenca/dijaka ... Inštruktorjeva spodbuda je pomembnejša osnovnošolcem, saj učenci v tej starosti še potrebujejo spodbudo, pohvalo ter priznanje s strani druge osebe. Posledično so srednješolci že bolj samostojni, samozavestni in jim spodbuda inštruktorja ni tako pomembna.

Odgovori anketnega vprašalnika so potrdili hipotezo, da so glede na rezultate na preverjanjih znanja inštrukcije matematike bile uspešne. Velik delež učencev in dijakov trdi, da je uspešnost oziroma vpliv inštrukcij dolgoročen, čeprav večina poseže po inštrukcijah zadnje dni pred preverjanjem znanja in s tem ne vzdržuje trajnega učenja.

Pričakovano je, da starši podpirajo inštrukcije in tako pomagajo učencem in dijakom. To je popolnoma razumljivo za osnovnošolce, saj so manj samostojni ter odvisni od staršev (prevoz, dogovarjanje, itd.). Velik delež osnovnošolcev ter srednješolcev je pritrdil, da jim inštrukcije plačajo starši. Največ osnovnošolcev je odgovorilo, da jim starši raje pomagajo sami. Pri srednješolcih je ta odgovor manj zastopan, saj so že bolj samostojni ali pa je razlaga določenih učnih vsebin staršem prezahtevna. Menim, da so starši manj naklonjeni oziroma ne podpirajo prejemanja inštrukcij pri gimnazijcih, ker pričakujejo, da se bodo ti znali samostojno učiti ter da bodo sami sposobni predelati učno snov, pa tudi zato, ker ne sledijo zahtevnim vsebinam. S tem morda želijo svoje otroke spodbuditi, da bi bolj zavzeto urili učno snov, saj se gimnazijci pogosto vpišejo na zahtevnejše višje in visokošolske programe.

Velik delež anketiranih, ki še nikoli niso prejeli inštrukcij pri matematiki, ni odgovorilo na večji del vprašanj ankete, razen na vprašanje o naklonjenosti staršev na prejemanje inštrukcij. Odgovorili so, da jim pri učenju ali v primeru nerazumevanja učne snovi oz. nalog pomagajo starši. Predvidevam, da jim znajo pomagati ter razlago staršev razumejo, s čimer profesionalna pomoč s strani inštruktorja matematike ni potrebna.

5 ZAKLJUČEK

V raziskavi smo želeli ugotoviti pomen inštrukcij matematike za učence in dijake. Učenci in dijaki pogosto potrebujejo inštrukcije kot obliko dodatne učne pomoči pri kateremkoli predmetu, večina se jih izvaja pri predmetu matematika. Inštrukcije matematike so učencem

in dijakom vseč predvsem zaradi počasnejše razlage, inštruktorjeve spodbude, prikaza postopkov reševanje nalog. Po prejemanju inštrukcij so učenci in dijaki veliko bolj samozavestni pri reševanju nalog in pri učenju, zato jih je večina anketirancev ocenila kot dolgoročno uspešne. Starši se v takšno obliko dodatne pomoči vključujejo na način, da poiščejo inštruktorja ter ga plačajo. Starši inštrukcije v večini podpirajo; večji delež takšnih, ki ne podpirajo inštrukcij, je v osnovni šoli, kjer so starši bolj vpeti v proces učenja svojih otrok.

Glede na naravo vzorca (večji delež deklet kot fantov, večja zastopanost osnovne šole ter gimnazijcev), ki sem ga zajela v raziskavo, rezultatov ne moremo posploševati na celotno populacijo osnovnošolskih in srednješolskih otrok. Raziskava je omogočila vpogled v temo prejemanja inštrukcij matematike, kjer je to vedno pogostejše, čeprav sem mnenja, da bi se morale zmanjšati. Menim, da bi z medvrstniško pomočjo učenci in dijaki dosegli enak uspeh kot pri inštrukcijah, vendar mora biti dobro načrtovana. Treba jo je izvajati z ustreznimi strategijami vključevanja vrstnikov v inkluzivni proces. Osnovna šola predstavlja elementarno osnovno izobrazbo in s tem nivo znanja, ki ga morajo usvojiti vsi osnovnošolci. Povečevanje trenda inštrukcij izzove opazko, da ima naš šolski sistem ogromne pomanjkljivosti, ki bi jih bilo potrebno odpraviti.

Literatura

- [1] Brne, D. (2016). Načini izvajanja dodatne pomoči pri matematiki (magistrsko delo, Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta). Pridobljeno: http://pefprints.pef.uni-lj.si/4180/1/magistrska_naloga_DorisBrne_01092016.pdf.
- [2] Golob, M. (2012). Kvaliteta učne pomoči učencem pri matematiki (Diplomsko delo, Univerza v Mariboru, Filozofska fakulteta). Pridobljeno: <https://dk.um.si/Dokument.php?id=52403>.
- [3] Karsenty, R. (2009). Nonprofessional mathematics tutoring for low-achieving students in secondary schools: A case study. Springer science.
- [4] Kesić Dimic, K. (2005). Instrukcije – da ali ne?. Viva. Pridobljeno: <http://www.katarinakesticdimic.com/uploads/3/4/6/5/34653316/instrukcije.pdf>.
- [5] Žerovnik, A. (2007). Instrukcije – potreba ali potuha?. Naša družina, 5. Pridobljeno: [http://www.druzina.si/icd/spletnastran.nsf/0/1b4aa807e99b0894c12572d00036be76/\\$file/nd_05_07.pdf](http://www.druzina.si/icd/spletnastran.nsf/0/1b4aa807e99b0894c12572d00036be76/$file/nd_05_07.pdf).

Steinerjev problem s praktičnim primerom

Steiner problem with practical example

Magdalena Sovič¹, Tomislav Letnik², Matej Mencinger²

¹Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Koroška cesta 160, 2000 Maribor, Slovenija

²Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo, Smetanova ulica 17, 2000 Maribor, Slovenija

Povzetek

V članku obravnavamo evklidski Steinerjev problem in pojme, ki so potrebni za njegovo definicijo. Obravnavamo tudi zgodovinski razvoj tega problema in njegove teoretične aspekte ter omenimo nekatere sorodne probleme. Poseben primer topologije evklidskega Steinerjevega problema z eno dodano Steinerjevo točko predstavimo na praktičnem primeru določanja optimalne lokacije skladišča.

Ključne besede: Fermat-Torricellijev problem, Steinerjev problem, evklidski Steinerjev problem, problem prirejanja skladišč, praktičen primer.

Abstract

The Euclidean Steiner problem is considered and some related problems are defined together with the historical background and aspects of these problems. A special case of topology of the Euclidean Steiner tree with exactly one Steiner point added is presented as an example originating from a practical facility location problem.

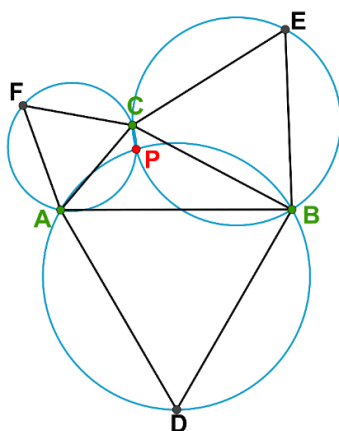
Key words: Fermat-Torricelli problem, Steiner problem, euclidean Steiner problem, facility location problem, practical problem.

1 UVOD

Evklidski Steinerjev problem se je prvič pojavil kot Fermatov problem (1601–1665) in v osnovi obravnava tri točke v ravnini. Pierre Fermat je okoli leta 1643 predstavil problem, ki se glasi: »Za izbrane tri točke oziroma trikotnik v ravnini je treba poiskati četrto točko tako, da bo vsota razdalj od iskane točke do danih točk trikotnika minimalna.« Še pred letom 1690 je Torricelli podal geometrijsko rešitev tega problema. Obravnaval je trikotnike z notranjimi koti, manjšimi ali kvečjemu enakimi 120° . Trdil je, da se krožnice, ki očrtajo tri enakostranične trikotnike, konstruirane nad stranicami takega trikotnika, sekajo v eni točki, ki jo imenujemo Torricellijeva točka in je tudi dokazal, da je ta točka rešitev Steinerjevega problema za takšne trikotnike. Isti problem je kasneje posplošil Thomas Simpson. Joseph Diaz Gergonne je v svoji matematični reviji podal posplošitve Fermat-Torricellijevega problema. Od takrat je bilo narejenih kar nekaj posplošitev tega problema, nekatere so opisane v nadaljevanju tega članka (več lahko najdete npr. v [11]). Najprej se je problem razvijal v smeri teorije grafov – natančneje minimalnih dreves in Steinerjevih dreves. Leta 1934 sta matematika Vojtech Jarník in Miloš Kössler predstavila problem, kjer sta iskala najkrajše drevo, ki poveže n točk v ravnini. Richard Courant in Herbert Robbins sta s kombinacijo Fermatovega in Jarník-Kösslerjevega problema predstavila Steinerjev problem, ki je v nadaljevanju podrobneje opisan in obravnavan [7, 11].

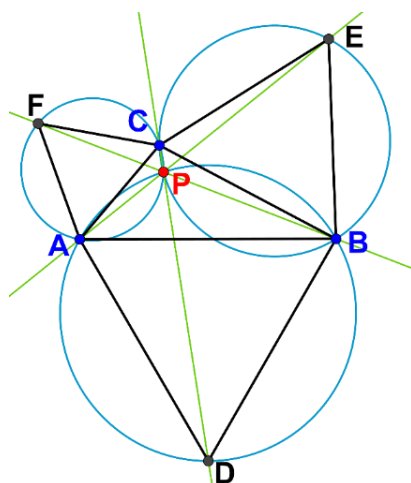
2 ZGODOVINA STEINERJEVEGA PROBLEMA NA TREH TOČKAH

Prva znana rešitev Fermatovega problema je geometrijska konstrukcija Evangelista Torricellija (1608–1647), ki je danemu trikotniku $\triangle ABC$ nad stranicami konstruiral enakostranične trikotnike in jim očrtal krožnice. Dokazal je, da obstaja enolično presečišče očrtanih krožnic in, da to presečišče (imenovano Torricellijeva točka) reši Steinerjev oziroma Fermat-Torricellijev problem za trikotnik $\triangle ABC$. Na *sliki 1* vidimo konstrukcijo Torricellijeve točke v programu Geogebra.



Slika 1: Konstrukcija Torricellijeve točke P v programu Geogebra 5.0.

Fermatov problem je študiral tudi angleški matematik in izumitelj Thomas Simpson (1710–1761), ki je leta 1750 razvil alternativno metodo konstrukcije Torricellijeve točke. Najprej je konstruiral enakostranične trikotnike na vse tri stranice trikotnika $\triangle ABC$, nato pa še premice, ki potekajo skozi tisto oglišče enakostraničnega trikotnika, ki ni del prvotnega trikotnika $\triangle ABC$, in skozi temu oglišču nasprotno oglišče trikotnika $\triangle ABC$. Na *sliki 2* so to premice skozi točke F, B in D, C ter E, A . Te premice imenujemo Simpsonove premice. Simpson je dokazal, da je presečišče vseh treh Simpsonovih premic v Torricellijevi točki (*slika 2*).



Slika 2: Presečišče vseh treh (zelenih) Simpsonovih premic sovpada s Torricellijevo točko.

Bonaventura Francesco Cavalieri (1598–1647) je v knjigi *Exercitationes Geometricae* leta 1647 pokazal, da Torricellijeva in Simpsonova metoda veljata le v primeru, ko so vsi notranji koti trikotnika manjši ali kvečjemu enaki 120° . Če je en notranji kot trikotnika večji od 120° , metodi ne delujeta, saj je presečišče krožnic oziroma premic zunaj prvotnega trikotnika.

Francoski matematik in logik Joseph Diaz Gergonne (1771–1859) je v svojem delu *Annales de Gergonne* leta 1810 podal posplošitve Fermat-Torricellijeva problema in problema Steinerjevega drevesa. Predstavil je naslednji problem: »Dano je število mest z znanimi lokacijami (koordinatami) v ravnini. Mesta je treba med seboj povezati v sistem kanalov tako, da bo skupna dolžina kanalov najmanjša.« Ta problem se razlikuje od Fermat-Torricellijevega problema, saj ni nujno, da ima mreža kanalov z minimalno skupno dolžino samo eno dodatno točko. Več dodatnih točk lahko namreč dodatno zmanjša skupno dolžino mreže. Lahko pa se zgodi, da ni treba dodati nobene točke (če so podane točke že v optimalni postavitvi ali pa kolinearne).

Alfred Weber je leta 1909 posplošil Fermatov problem v smislu stroškov transporta. Podal je posplošitev, pri kateri je potrebno za danih n točk v ravnini poiskati točko, ki minimizira vsoto transportnih stroškov od danih točk do iskane točke. Pri tem za različne relacije (od iskane točke do podanih točk) dopušča različne stroške transporta na enoto dolžine (uteži).

V vektorskem prostoru z dimenzijo n , z evklidsko normo $\|\dots\|$, nastopi tako imenovan (posplošen) Fermat-Torricellijev problem, kjer iščemo točko $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ki minimizira funkcijo

$$f(x) = \sum_{i=1}^m w_i \|p_i - x\|, x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

kjer je $P := \{p_1, \dots, p_m\}$, $m \geq 3$, množica podanih (nekolinearnih) točk s pozitivnimi utežmi $w_1, \dots, w_m$.

Gergonne je predstavil tudi problem Steinerjevega drevesa, ki se glasi: »Poveži n danih točk v sistem črt tako, da bo njihova skupna dolžina najmanjša možna.« Tukaj nas torej zanimajo samo dane točke in njihove povezave (brez dodajanja dodatnih točk v omrežje) [6].

Richard Courant in Herbert Robbins sta leta 1941 izdala knjigo z naslovom *What is Mathematics*. To delo je povzročilo največjo razpoznavnost Steinerjevega drevesa. Njune raziskave se nanašajo na Fermatov problem za $n = 3$. V knjigi sta zapisala tudi posplošitev tega problema za več kot tri točke [1,3,5,6].

Kot zadnjo posplošitev Steinerjevega problema omenimo problem prirejanja skladišč (angl. Facility Location Problem), ki z uporabnega vidika spada na področje logistike [2]. V klasičnem problemu prirejanja skladišč je glede na množico strank C in nabor lokacij F , treba izbrati podmnožico lokacij F' , kjer želimo postaviti skladišče in povezati vsako stranko $j \in C$ z nekim skladiščem. Cilj je najti rešitev, ki bo kar se da zmanjšala stroške odpiranja skladišč in čim bolj služila strankam. Natančneje: ob predpostavki, da je c_{ij} strošek povezovanja skladišča i s stranko j in da je f_i strošek za odpiranje skladišča i , je cilj zmanjšati naslednjo namensko funkcijo:

$$\sum_{i \in F'} f_i + \sum_{j \in C} \left(\min_{i \in F'} c_{i,j} \right). \quad (2)$$

Posebna možnost problema prirejanja skladišč je »zvezni problem prirejanja skladišč«, kjer lahko skladišče odpremo v kateri koli točki evklidskega prostora (najpogosteje ravnine), medtem ko je v klasičnem problemu prirejanja skladišč nabor možnih lokacij omejen na diskretno množico F , ki je običajno prav tako vložena v nek evklidski prostor [4,9]. Webrov

problem pri konstantni ceni na enoto razdalje je soroden primeru prirejanja skladišč in sovпада s Steinerjevim problemom z eno Steinerjevo točko.

POMEMBNI POJMI IN DEFINICIJE

Definicije in pojmi, ki jih navedemo v tem razdelku so večinoma povzete iz [11] in [12]. Obravnavamo enostavne neusmerjene grafe. Naj bo V končna neprazna množica in naj bo E poljubna družina dvo-elementnih podmnožic množice V . Urejen par $G = (V, E)$ imenujemo *graf*, $V = V(G)$ imenujemo množica *vozlišč*, $E = E(G)$ pa je množica *povezav* grafa G . Vozlišči $u, v \in V(G)$ sta v grafu G *sosednji*, če obstaja povezava $e = uv \in E(G)$. Zaporedje točk in povezav $S = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{n-1} e_n v_n$, kjer je $e_i = v_{i-1} v_i$ imenujemo *sprehod* v grafu. Če so v sprehodu vsa vozlišča različna, ga imenujemo *pot*. Graf $H = (V(H), E(H))$ je *podgraf* grafa $G = (V(G), E(G))$, če je $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$. Podgraf H grafa G je *vpeti podgraf* grafa G , če je $V(H) = V(G)$. *Utežen graf* ali *omrežje* je graf $G = (V(G), E(G))$ z dano preslikavo $\lambda: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$, ki vsaki povezavi grafa priredi neko utež. Uteži lahko smatramo tudi kot razdalje med točkami ali cene povezav.

Evklidski graf je utežen graf, v katerem so vozlišča točke v evklidski ravnini, evklidske razdalje med vozlišči pa so uteži ustreznih povezav. Graf G je *povezan*, če za vsaki dve vozlišči obstaja pot, ki ima ti dve vozlišči za krajišči. *Drevo* je povezan graf brez ciklov. *Stopnja vozlišča* $v \in V(G)$, $\deg_G(v)$, je število povezav, ki v grafu G izhajajo iz vozlišča v . Naj bo G poljuben končen, povezan graf. *Vpeto drevo* v grafu G je vsak vpet podgraf, ki je drevo.

Definicija 1. Naj bo $G = (V, E)$ utežen graf. *Minimalno vpeto drevo* $D_G = (\tilde{V}, \tilde{E})$ je podgraf grafa G , ki je drevo, vsebuje vsa vozlišča $\tilde{V} = V$ in zanj velja, da je vsota uteži po vseh njegovih povezavah $\tilde{E}$ minimalna.

Definicija 2. Naj bo $G = (V, E)$ utežen graf z nenegativnimi utežmi in naj bo $T \subseteq V$ množica točk, ki jo imenujemo *terminali*. *Steinerjevo minimalno drevo* v grafu $G = (V, E)$ je tisto drevo $S = (\tilde{V}, \tilde{E}) \subseteq G = (V, E)$, ki ima minimalno vsoto uteži in velja, da S vsebuje vse terminale: $T \subseteq \tilde{V}$.

Torej, poleg terminalov T lahko Steinerjevo minimalno drevo v grafu vsebuje še nekaj dodatnih točk iz množice $V \setminus T$, ki jih imenujemo *Steinerjeve točke* $s_1, s_2, \dots, s_k$ [8,10].

3 EVKLIDSKI STEINERJEV PROBLEM

Evklidski graf smo definirali kot utežen graf, katerega vozlišča sestavlja končna podmnožica točk evklidske ravnine, povezave med vozlišči (če obstajajo) pa imajo uteži, ki sovpadajo z evklidskimi razdaljami med njimi. *Evklidsko drevo* je vsak evklidski graf, ki je drevo. *Evklidsko vpeto drevo* je drevo, vpeto v evklidski graf.

Evklidski Steinerjev problem za danih n terminalov $t_1, t_2, \dots, t_n$ v ravnini je konstruirati minimalno evklidsko drevo na $n + k$ vozliščih, ki vsebuje vseh n terminalov in dodatnih k Steinerjevih točk, $s_1, s_2, \dots, s_k$. Če je $n > 3$ ima vsaka Steinerjeva točka stopnjo tri [11]. Vsaka Steinerjeva točka je povezana z dvema terminaloma in neko Steinerjevo točko.

Topologija drevesa D z vozlišči $t_1, t_2, \dots, t_n, s_1, s_2, \dots, s_k$ je opis topoloških značilnosti drevesa D . S tem mislimo natančen opis sosednosti vseh terminalov $t_1, t_2, \dots, t_n$, vseh Steinerjevih točk $s_1, s_2, \dots, s_k$ in vseh »mešanih parov« $t_i s_j$. Pripomnimo, da topologija drevesa določa samo povezave med vozlišči, ne pa tudi pozicije Steinerjevih točk in posledično tudi ne uteži povezav.

Drevo, ki je krajše od katerega koli drevesa z enako topologijo, imenujemo *relativno minimalno drevo* (za dano topologijo). Relativno minimalno drevo ne sme imeti povezav dolžine nič. Zaradi te zahteve za izbrane terminale nekatere topologije nimajo relativnega minimalnega drevesa. Obstajata dve verziji problema Steinerjevega drevesa [12], v tem

članku pa bomo obravnavali samo optimizacijski problem, kjer iščemo Steinerjevo drevo z minimalno vsoto uteži. Ker ima vsaka Steinerjeva točka stopnjo tri in zaradi odsotnosti ciklov v drevesu se da dokazati [11], da vsako Steinerjevo drevo z n terminali vsebuje največ $n - 2$ Steinerjevih točk.

3.1 Steinerjevo minimalno drevo

Problem evklidskega minimalnega vpetega drevesa za dane točke $v_1, v_2, \dots, v_n$ je poiskati minimalno vpeto drevo na (polnem) evklidskem grafu, ki ga določajo točke $v_1, v_2, \dots, v_n$ (in vse možne povezave med njimi). Pri evklidskem Steinerjevem problemu za točke $v_1, v_2, \dots, v_n$ lahko z namenom zmanjšanja skupne vsote uteži dodajamo dodatne (Steinerjeve) točke $s_1, s_2, \dots, s_k$. Zaradi dodanih točk postane evklidski Steinerjev problem problem evklidskega minimalnega vpetega drevesa na točkah $v_1, v_2, \dots, v_n, s_1, s_2, \dots, s_k$. Pri tem so točke $v_1, v_2, \dots, v_n$ podane/znane, točke $s_1, s_2, \dots, s_k$ pa iščemo.

Pri dodajanju Steinerjevih točk imajo drevesa na točkah $v_1, v_2, \dots, v_n$ ter $s_1, s_2, \dots, s_k$ lahko različne (Steinerjeve) topologije. Število polnih Steinerjevih topologij (tj. topologij z maksimalnim številom Steinerjevih točk) pri danem številu terminalov (n) superekspONENTNO narašča v skladu s spodnjo funkcijo

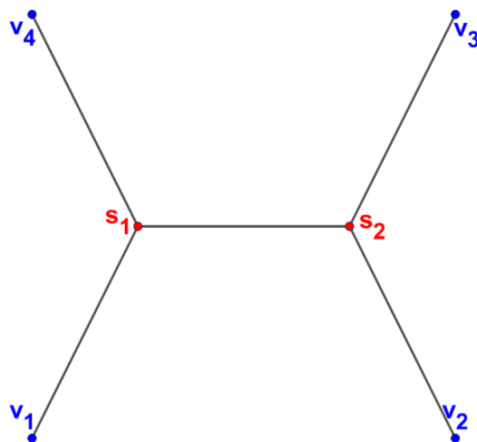
$$f(n) = \frac{(2n-4)!}{2^{n-2}(n-2)!} \quad (3)$$

Pri maksimalnem številu dodanih Steinerjevih točk je vsota uteži pri neki topologiji najmanjša, s tem je določeno minimalno Steinerjevo drevo in predstavlja globalno optimalno rešitev Steinerjevega problema (več lahko najdete v [11]). Za Steinerjevo minimalno drevo na terminalih $v_1, \dots, v_n$ z dodanimi Steinerjevimi točkami $s_1, \dots, s_k$ veljajo zanimive geometrijske lastnosti [11], med katerimi poudarimo, da ima vsaka Steinerjeva točka stopnjo 3 in da predstavlja Steinerjevo točko za trikotnik s terminali, določenimi z njej sosednjimi vozlišči.

3.2 Primer evklidskega Steinerjevega drevesa za $n = 4$

V tem primeru Steinerjevo minimalno drevo vsebuje največ dve Steinerjevi točki. Obravnavali bomo oba primera: z dodano eno in z dodanima dvema Steinerjevima točkama. Pripomnimo, da v primeru dodanih dveh Steinerjevih točk realno obstajata dve topologiji drevesa (glej *sliki 8 in 9*).

Pri $n = 4$ so terminali $t_1, \dots, t_4$ oglišča nekega (ne nujno konveksnega) štirikotnika. Vzemimo primer, kjer so oglišča štirikotnika v točkah $v_1 (0,0)$, $v_2 (1,0)$, $v_3 (1,1)$, $v_4 (0,1)$ (*slika 3*).



Slika 3: Steinerjevo drevo za $n = 4$ z dodanima dvema Steinerjevima točkama. Narisano v Geogebri 5.0.

Evklidski Steinerjev problem oziroma minimalno Steinerjevo drevo za $n = 4$ vsebuje največ dve Steinerjevi točki. Ti dve Steinerjevi točki imata naslednje koordinate: $s_1 (0.28868, 0.5)$, $s_2 (0.71133, 0.5)$. Steinerjevi točki sta med seboj povezani, prav tako pa sta povezani s terminali, kot kaže *slika 3*.

Pri reševanju tega problema smo definirali funkcijo

$$f(x, y, w, v) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-w)^2 + (y-v)^2} + \sqrt{(w-1)^2 + (v-1)^2} + \sqrt{w^2 + (v-1)^2}, \quad (4)$$

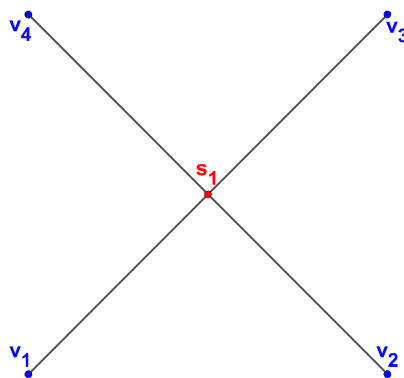
katere gradient smo enačili z $(0,0,0,0)$ in dodali dve točki: $A(x, y), B(w, v)$. Ustrezni sistem enačb smo rešili s programom Mathematica (*slika 4*) in dobili: $x = 0.5$; $y = 0.288675$; $w = 0.5$; $v = 0.711325$. V tem primeru je vsota dolžin oziroma uteži pri dodanih dveh točkah enaka 2.73205.

```
f[x_, y_, w_, v_] := Sqrt[x^2 + y^2] + Sqrt[(x - 1)^2 + y^2] + Sqrt[(x - w)^2 + (y - v)^2] +
Sqrt[(w - 1)^2 + (v - 1)^2] + Sqrt[w^2 + (v - 1)^2]

NMinimize[f[x, y, w, v], {x, y, w, v}]
{2.73205, {x -> 0.5, y -> 0.288675, w -> 0.5, v -> 0.711325}}
```

Slika 4: Izračun v programu Mathematica 10.1.

Če dodamo samo eno Steinerjevo točko (*slika 5*), in sicer v presečišče diagonal štirikotnika, s koordinatama $s_1(0.5, 0.5)$, je minimalna dolžina Steinerjevega drevesa enaka vsoti obeh diagonal, kar znaša $2\sqrt{2} \approx 2.8284$. Torej, če Steinerjevemu drevesu za $n = 4$ dodamo dve Steinerjevi točki, je vsota uteži najmanjša.

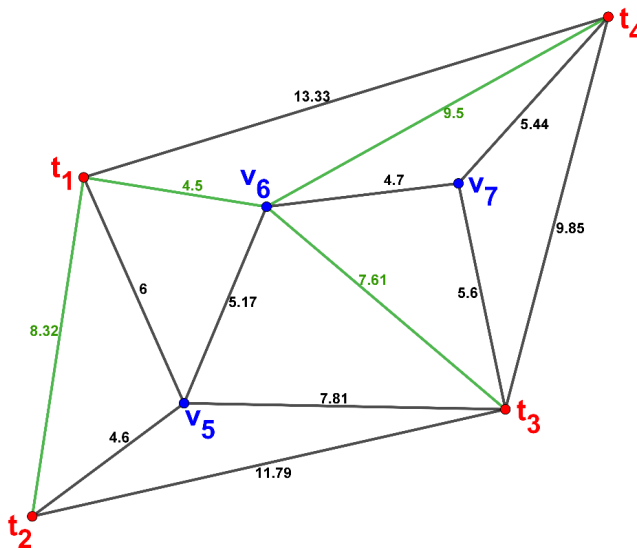


Slika 5: Steinerjevo drevo za $n = 4$ z dodano eno Steinerjevo točko. Narisano v Geogebri 5.0.

4 APROKSIMATIVNI ALGORITMI ALI HEVRISTIKE

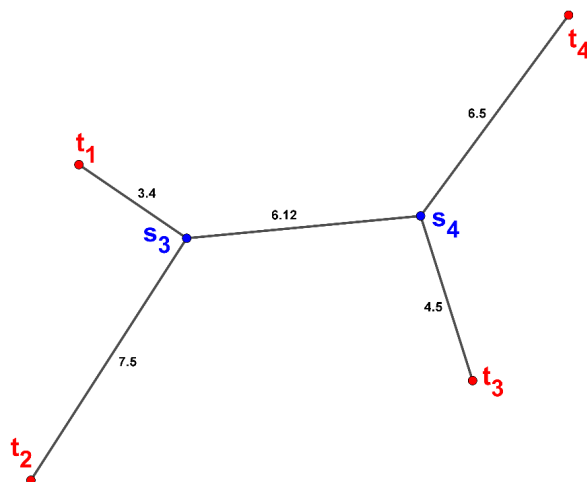
Steinerjev problem na več kot treh točkah običajno rešujemo s pomočjo aproksimativnih algoritmov (hevristik). Aproksimativni algoritem želi poiskati rešitev problema, ki je čim bližje optimalni rešitvi. Ena izmed metod reševanja Steinerjevega problema je uporaba minimalnega vpetega drevesa. Za začetek je minimalno vpeto drevo sprejemljiva rešitev in je blizu optimalni rešitvi problema. Kruskalov in Primov algoritem sta algoritma za iskanje minimalnega vpetega drevesa [11, str. 7–9]. Vendar tak algoritem še vedno ne vključuje

Steinerjevih točk. Dreyer in Overton sta leta 1998 v delu *Two Heuristics for the Steiner Tree Problem* razvila heuristiko vstavljanja, ki vključuje dodajanje Steinerjevih točk [11, str. 43–44]. Heuristika vstavljanja Steinerjevih točk poteka tako, da najprej poiščemo minimalno vpeto drevo na danih terminalih, nato pa zmanjšamo vsoto dolžin povezav z dodajanjem Steinerjevih točk. Heuristika temelji na pogoju, da se povezave v Steinerjevem drevesu stikajo pod kotom 120° ali več. Dreyer in Overton sta uporabila algoritem za lokalno optimizacijo, ki poišče najbolj optimalne lokacije Steinerjevih točk. Poglejmo si delovanje heuristike na primeru.



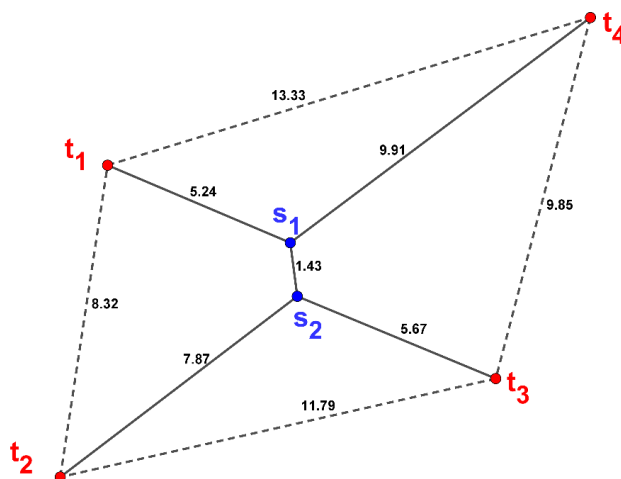
Slika 6: Primer drevesa s štirimi terminali in tremi pomožnimi vozlišči. Narisano v Geogebri 5.0.

Poglejmo graf s štirimi terminali t_1, t_2, t_3, t_4 in tremi pomožnimi vozlišči v_5, v_6, v_7 na sliki 6. Če terminale povežemo s povezavami na robovih, $(t_1 t_2), (t_2 t_3), (t_3 t_4)$, je vsota dolžin povezav enaka 29.96. Terminale lahko povežemo tudi s pomočjo pomožnih vozlišč in dobimo minimalno vpeto drevo (zelene povezave), ki da manjšo vsoto dolžin povezav: 29.93.



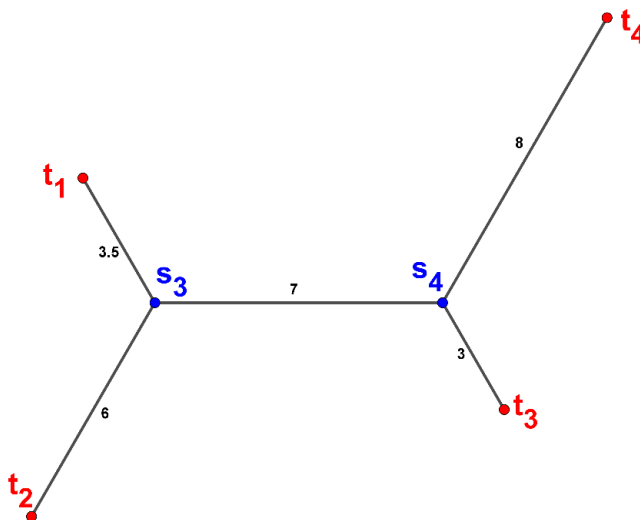
Slika 7: Primer drevesa s štirimi terminali in dvema Steinerjevima točkama. Narisano v Geogebri 5.0.

Sedaj obravnavajmo evklidski primer (ohranimo pozicije terminalov in kjerkoli v ravnini vstavimo dve Steinerjevi točki). Terminale povežemo s Steinerjevima točkama in tako dobimo graf s petimi povezavami (*slika 7*). Skupna dolžina povezav je v tem primeru enaka 27.50. Rešitev ni najboljša – za drugo topologijo je optimalna rešitev prikazana na *sliki 9*.



Slika 8: Drevo s 4 terminali in 2 Steinerjevima točkama. Narisano v Geogebri 5.0.

Na *sliki 8* je graf s štirimi terminali (ki imajo enake pozicije kot prejšnja dva grafa) in dvema Steinerjevima točkama. Graf nima enake topologije kot graf na *sliki 7*. V grafu na *sliki 8* sta terminala t_1 in t_4 povezana s Steinerjevo točko s_1 , medtem ko sta na grafu na *sliki 7* s Steinerjevo točko s_3 povezana terminala t_1 in t_2 . Opazimo, da vsi koti na *sliki 8* okoli Steinerjevih točk merijo 120° , pa vendar rešitev očitno ni optimalna, saj če terminale povežemo s povezavami na robovih (t_1t_2) , (t_2t_3) , (t_3t_4) , vsota dolžin povezav znaša 29.96, med tem, ko je vsota dolžin povezav za drevo na *sliki 7* (čeprav gre za Steinerjevo drevo) večja in znaša 30.12. To se zgodi, ker izbrana topologija ne da globalnega minimuma (dobili smo samo relativno minimalno Steinerjevo drevo pri izbrani topologiji).



Slika 9: Minimalno Steinerjevo drevo. Narisano v Geogebri 5.0.

Na *sliki 9* je prav tako graf s štirimi terminali (pri enaki poziciji terminalov kot v prejšnjih treh primerih) in dvema Steinerjevima točkama. Graf predstavlja isto topologijo kot graf iz *slike 7*. Vsota dolžin povezav je v tem primeru 27.5. Ta rešitev je najmanjša možna, saj so vsi koti enaki 120° . Graf na *sliki 9* je minimalno Steinerjevo drevo za terminale t_1, t_2, t_3, t_4 .

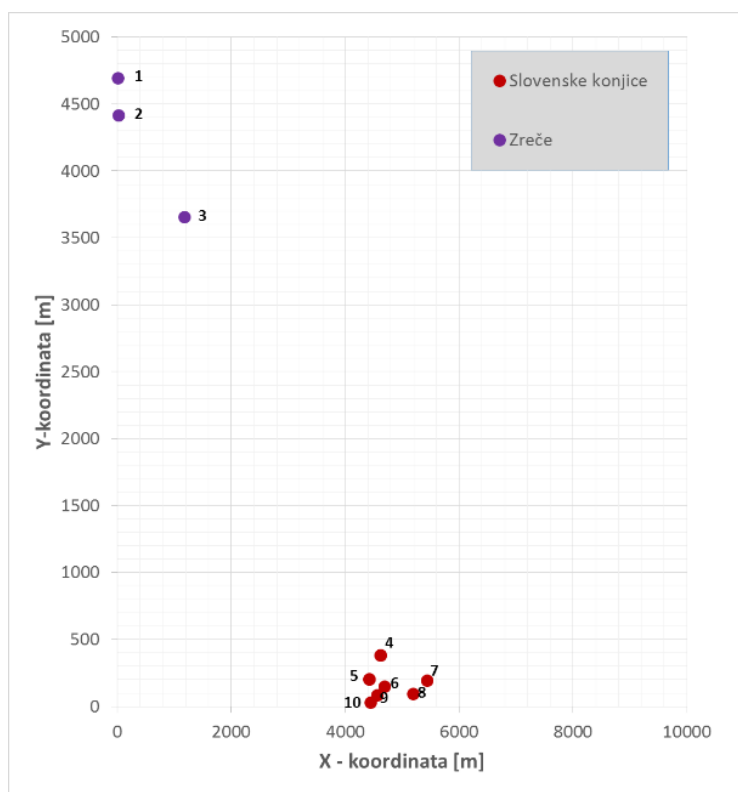
5 REŠITEV PRIMERA IZ REALNEGA ŽIVLJENJA

Teoretična spoznanja iz prejšnjih poglavij smo aplicirali na problem, s katerim smo se srečali v okviru izvajanja študentskega projekta Organiziranje in optimiranje dostav tovora na območju Dravinjske doline, ki je bil izveden v okviru javnega razpisa Projektno delo z negospodarskim in neprofitnim sektorjem – študentski inovativni projekti za družbeno korist 2016–2018.

Projekt se je ukvarjal z reševanjem problematike mirujočega prometa tovornih vozil na območju občine Slovenske Konjice in Zreče. Na osnovi poglobljene analize je bilo namreč ugotovljeno, da proizvodna podjetja na prej omenjenih lokacijah nimajo na voljo zadostnih parkirnih površin za tovorna vozila, ki vršijo dostavo in čakajo na vstop v podjetja, prav tako pa v okolici ni na voljo javnih parkirnih površin za tovorna vozila. Posledično so tovorna vozila parkirana na cesti in ob njej ovirajo promet ter povzročajo zastoje.

Ena izmed rešitev problema je vzpostavitev skupnega skladišča za lokalna podjetja, ki bi omogočilo dovolj velike kapacitete za skladiščenje tovora za vsa lokalna podjetja. Iz skupnega skladišča bi nato sekvenčno dobavljali z lastnimi manjšimi tovornimi vozili v skladu s potrebo. To bi privedlo do zmanjšanja zastojev in razbremenitve prometnih tokov v lokalnem okolju. Naša naloga je bila, da poiščemo lokacijo za skladišče, do katerega bo vsota razdalj iz podjetij v tem območju najmanjša. Problem smo reševali z dodajanjem ene Steinerjeve točke z metodo ničelnega gradienta funkcije več spremenljivk, in sicer ločeno za lokacijo Zreče in Slovenske Konjice.

Pri Zrečah smo v izračun vključili podjetja Unior kovaška industrija, Swatycomet in GKN Driveline. V Slovenskih Konjicah smo v izračun vključili podjetja Kostroj, Ramax, Baumuller in podjetja iz poslovne cone Konus (Konus, Konex, Konitex, Iskon, Grah Group, Unior, d. d. obrat II.), ki smo jih zaradi relativne bližine obravnavali kot eno enoto. Določili smo izhodišče lokalnega koordinatnega sistema in s pomočjo spletnega programa LatLong na osnovi zemljepisne širine in dolžine prej omenjenih podjetij izračunali njihove koordinate in jih vrisali v koordinatni sistem (*Slika 10*).

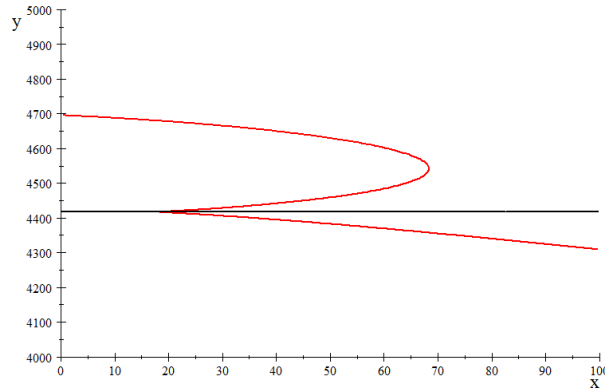


Slika 10: Podjetja v Zrečah in Slovenskih Konjicah označena v lokalnem kartezičnem koordinatnem sistemu. Legenda: 1-Swatycomet, 2-Unior, 3-GKN, 4-Konus Konex in Konitex, 5-Iskon, 6-Grah Group, 7-Baumuller, 8-Ramax, 9-Unior d.d. obrat II., 10-Kostroj.

Najprimernejšo lokacijo za skladišče smo iskali na osnovi centralne pozicije med strankami oziroma na osnovi evklidskih razdalj. Za iskanje optimalne lokacije skladišča v Zrečah smo definirali funkcijo:

$$d(x, y) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} + \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2} \quad (5)$$

in vanjo vnesli koordinate podjetji v Zrečah. S pomočjo programa Scientific WorkPlace 5.5 smo izvedli izračun in poiskali ekstrem ter tako dobili točko (18,4417). Dodatno smo enoličnost rešitve preverili tako, da smo obe funkciji implicitno narisali. Slika 11 potrjuje, da imamo eno samo rešitev problema.

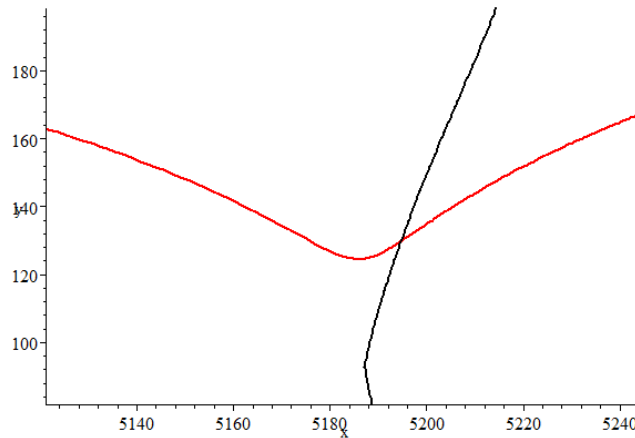


Slika 11: Situacija za Zreče. Iz grafa lahko razberemo, da je rešitev enolična.

Po enakem postopku smo izračunali optimalno lokacijo skladišča za podjetja v Slovenskih Konjicah. Definirali smo funkcijo za štiri lokacije:

$$d(x, y) = \frac{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} + \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2} + \sqrt{(x - x_4)^2 + (y - y_4)^2}}{(6)}$$

in vanjo vnesli koordinate lokacij v Slovenskih Konjicah. Ker rešitve sistema $\text{grad}(d(x, y)) = (0, 0)$ v programu Scientific WorkPlace 5.5 in v programu Mathematica 10.1 direktno ni mogoče dobiti, smo rešitev poiskali z grafično metodo: iz grafa na *sliki 12* smo razbrali rešitev (5195, 130).



Slika 12: Grafično določanje rešitve s pomočjo presečišča krivulj $\frac{\partial d(x, y)}{\partial x} = 0$ in $\frac{\partial d(x, y)}{\partial y} = 0$.

Izračunane lokacije so optimalne, če privzamemo smiselno uporabo evklidskih razdalj. Dodatno je rešitve treba smatrati kot teoretično optimalne, zato kaže v primeru implementacije poiskati praktično mogoče rešitve v bližini izračunanih teoretičnih lokacij.

6 ZAKLJUČEK

Problem Steinerjevega drevesa spada v teorijo grafov in ga lahko uporabimo v številnih realnih situacijah. V članku smo Steinerjev problem povezali z logistiko in opisali klasični problem prirejanja skladišč. Opisali smo zgodovinski razvoj problema Steinerjevega drevesa in predstavili matematike, ki so vplivali na njegov razvoj. Najprej smo predstavili Fermatov problem, za katerega je prvi podal rešitev Torricelli. Omenili smo Thomasa Simpsona, ki je študiral Fermatov izrek in zapisali posplošitve, ki jih je zapisal Gergonne. Definirali smo problem Steinerjevega drevesa in ga preizkusili na realnem primeru.

Za reševanje konkretne situacije smo izbrali Slovenske Konjice in Zreče. V obeh krajih, smo s pomočjo Steinerjevega problema z eno dodano Steinerjevo točko poiskali lokaciji, ki bi bili najbolj optimalni za izgradnjo skladišča. Rešitvi smo podali na osnovi evklidskih razdalj.

Literatura

- [1] Brazil, M., Graham, R. L., Thomas D. A., Zachariasen, M. (2014). On the history of Euclidean Steiner tree problem. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 68, str. 327-354.
- [2] Clausen, U., Hompel, M., Souza, R. (2013-2017). Lecture Notes in Logistics. *Springer*
- [3] Courant, R., Robbins, H. (1996). What is Mathematics? 2th ed. New York. *Oxford University Press*, str. 354-361.
- [4] Dasgupta, S. (2008). The hardness of k-means clustering. *Tech. Rep. CS2008-0916, Department of Computer Science and Engineering, University of California.*
- [5] Dreyer, D. R., Overton, M. L. (1998). Two heuristics for the Euclidean Steiner tree problem. *Journal of Global Optimization*, 13, str. 95-106.
- [6] Herring, M. (2004). The Euclidean Steiner tree problem. Dension University. Pridobljeno 1. 10. 2017 s:
<https://pdfs.semanticscholar.org/93ff/ab235da0d97ebad60399660bac5fb6719582.pdf>
- [7] Hwang, F. K., Richards, D.S., Winter, P. (1992). The Steiner Tree Problem. *Annals of Discrete Mathematics*. 53. North-Holland: Elsevier. ISBN 0-444-89098-X. Pridobljeno 1. 10. 2017 s:
https://books.google.si/books/about/The_Steiner_Tree_Problem.html?id=-_yKbY3X_jUC&redir_esc=y
- [8] Ivanov, A., Tuzhilin, A. (1994). Minimal Networks: The Steiner Problem and Its Generalizations. N.W., Boca Raton, Florida: *CRC Press*. ISBN 978-0-8493-8642-8
- [9] Mahajan, M., Nimbhorkar, P., Varadarajan, K. (2009). The planar k-means problem is NP-hard. *Proceedings of the 3rd International Workshop on Algorithms and Computation*, str. 274-285.
- [10] Olsen, A. E., Lorenzen, S. S., Fonseca, R., Winter, P. (2014). Steiner Tree Heuristics in Euclidean d-Space. *Paper presented at 11th DIMACS Implementation Challenge, Providence, USA*. Pridobljeno 1. 10. 2017 s:
<https://pdfs.semanticscholar.org/89c5/25576ccab31d9fafb1cf003317c37af0ecfa.pdf>
- [11] Soothill, G. (2010). The Euclidean Steiner Problem. Pridobljeno 17. 10. 2017 s:
http://fourier.dur.ac.uk/Ug/projects/highlights/CM3/Soothill_Steiner_report.pdf
- [12] Wilson, R. J., Biggs, N. L., Lloyd, E. K. (1998). Graph Theory. United States: *Oxford University Press Inc. New York*. Pridobljeno 1. 10. 2017 s:
[https://books.google.si/books?hl=sl&lr=&id=XqYTk0sXmpoC&oi=fnd&pg=PR9&dq=R.J.WILSON+%27%27GRAPH+THEORY%27%27&ots=BKc6nAcGDV&sig=I7Wc4wRYyohC60GwSnT8-yBsAPE&redir_esc=y#v=onepage&q=R.J.WILSON%20"GRAPH%20THEORY"&f=false](https://books.google.si/books?hl=sl&lr=&id=XqYTk0sXmpoC&oi=fnd&pg=PR9&dq=R.J.WILSON+%27%27GRAPH+THEORY%27%27&ots=BKc6nAcGDV&sig=I7Wc4wRYyohC60GwSnT8-yBsAPE&redir_esc=y#v=onepage&q=R.J.WILSON%20)

Biodiverziteta štirinožcev (Tetrapoda) v Sloveniji v primerjavi z drugimi evropskimi državami

Biodiversity of tetrapods in Slovenia in comparison to other European countries

Natalija Špur, Mojca Cimerman

Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Koroška cesta 160, 2000 Maribor, Slovenija

Povzetek

Biotska raznovrstnost (biodiverziteta) štirinožcev (Tetrapoda) se v zadnjih desetletjih zmanjšuje. Na upadanje biodiverzitete dvoživk (Amphibia), plazilcev (Reptilia) in ptičev (Aves) vplivajo predvsem človekove dejavnosti v okolju. Najmanjši upad biodiverzitete beležimo pri sesalcih (Mammalia). Slovenijo nekateri avtorji uvrščajo med "vroče točke" biodiverzitete, kar pomeni, da najdemo na relativno majhni površini razmeroma veliko število različnih vrst. Slovenija ima največ vrst ptic ($y = 317$), sledijo sesalci ($y = 107$), plazilci ($y = 27$) in dvoživke ($y = 19$). Na podlagi razmerja med številom vrst in površino (SAR) smo z regresijsko analizo in Arrheniusovo enačbo za evropske države izračunali napovedano število vrst posameznih skupin štirinožcev. Rezultate smo primerjali z dejanskimi števili vrst, saj nas je zanimalo, ali je v Sloveniji večja pestrost štirinožcev kot v drugih 42 evropskih državah. Slovenija ima večjo biodiverzitetu vseh štirih skupin štirinožcev od pričakovane. Biodiverziteta štirinožcev je višja kot v nekaterih državah z večjo površino. V primerjavi s preostalimi evropskimi državami ima Slovenija večjo pestrost plazilcev in dvoživk, manj pa sesalcev in ptic.

Ključne besede: biodiverziteta, dvoživke, plazilci, ptice, SAR, sesalci

Abstract

Biodiversity of quadrupeds (Tetrapoda) has been decreasing in last few decades mostly because of human activities. The lowest decrease in biodiversity is that of mammals (Mammalia). Some authors defined Slovenia as the biodiversity »hot spot«, which means that we can find a large number of different species on a small area. Slovenia has the highest number of birds ($y = 317$), followed by number of mammals ($y = 107$), reptilians ($y = 27$) and amphibians ($y = 19$). Based on the relationship between the number of species and area (SAR), with the regression analysis and Arrhenius equation, the predicted number of quadruped species was calculated. The results were compared with the actual number of species to examine whether Slovenia has higher diversity than the other 42 European countries. Slovenia has higher biodiversity of all groups of quadrupeds than expected. Biodiversity of quadrupeds in Slovenia is higher than in some other countries with larger area. In comparison to other European countries, Slovenia has higher biodiversity of reptilians and amphibians than of mammals and birds.

Key words: amphibians, birds, biodiversity, mammals, reptilians, SAR

1 UVOD

Število rastlinskih in živalskih vrst ter habitatov (biodiverziteta) v Evropi pada predvsem zaradi izgube habitata, onesnaževanja okolja, prekomerne rabe virov, podnebnih sprememb in naseljevanja invazivnih vrst. Po podatkih Evropske okoljske komisije je kar 60 % vrst in 70 % habitatov v neugodnem stanju [1]. Na robu izumrtja je 25 % evropskih živalskih vrst. Največji upad vrst štirinožcev imajo dvoživke (Amphibia), (59 %). Sledijo vrste iz skupine plazilcev (Reptilia) z 42 % upadom [1]. Najmanjši upad vrstne diverzitete (27 %) imajo sesalci (Mammalia).

S ciljem vzdrževati biodiverzitetu ogroženih vrst in habitatov se je vzpostavilo evropsko ekološko omrežje Natura 2000, ki se razteza čez vseh 28 držav Evropske unije [2]. Največja pestrost dvoživk je v Franciji, v Nemčiji, na Češkem in tudi na jugu [3]. Gradient naraščanja vrst plazilcev se širi od severa proti jugu, največja diverziteta je na Balkanskem polotoku [4]. Največja pestrost kopenskih sesalcev je na jugovzhodu Evrope, v goratem območju

E-mail naslovi: natalija.spur@um.si (Natalija Špur), mojcim1@nlzoh.si (Mojca Cimerman)

mediterana in na območju zmerne podnebja [5]. Slovenija ima na majhni površini veliko biotsko raznovrstnost, ki je predvsem posledica prepletanja različnih vrst podnebja, geološke strukture, višinskih razlik in tradicionalne kmetijske rabe. Zajema le 0,004 odstotka zemeljske površine, na kateri je približno 26.000 vrst živih bitij. Slovenija tako sodi med območja z nadpovprečno biodiverzitetno na majhni površini in zato spada med »vroče točke« (ang. *Biodiversity Hotspots*) biodiverzitete [6].

Na biodiverzitetno vplivajo različni dejavniki, kot so razpoložljivost hrane, količina organskega materiala [7], temperatura [8], klima, kompleksnost habitata in izolacija oz. oddaljenost od kopnega.

V ekologiji velja razmerje med številom vrst in površino ozemlja (SAR: *Species Area Relationship*): število vrst narašča z večanjem površine. Razmerje SAR izhaja iz otoške diverzitete. V skladu z modelom dinamičnega ravnotežja (ETIB = *Equilibrium Theory of Island Biogeography*) [9] je število vrst na otokih odvisno od ravnovesja dveh dejavnikov, od velikosti otoka in oddaljenosti od kopnega. Otoki imajo manjše število vrst kot enako velike površine kopnega. Na manjših območjih obstaja manjša verjetnost, da so tam redke vrste kot na večjih. Vrste se lažje naseljujejo na otoke, ki so bližje kopnemu. Čim večje je število vrst na otoku, manjši je uspeh kolonizacije novih vrst, saj otok lahko vzdrži le določeno število vrst, preostale pa morajo izumreti [9].

Hubbell [10] je s pomočjo nevtralne teorije poskušal pojasniti biodiverzitetne vzorce. Po tej teoriji je število vrst odvisno od izumiranja, naseljevanja vrst in evolucije s predpostavko, da imajo vsi organizmi enake možnosti za razmnoževanje in umrljivost. Na podlagi osnovnih procesov, kot so rojstvo, smrt, razširjanje in evolucija, nevtralna teorija podaja razlago za vrstno porazdelitev v naravnih okoljih. Z nevtralno teorijo, ki predstavlja ničelno hipotezo, se osredotočimo na število vrst v različno velikih območjih, njihovo porazdelitev ter spreminjanje v čaas in od območja do območja. Na podlagi te teorije je razmerje SAR od lokalnega do globalnega merila trifazno. (1) Na lokalnem merilu (manjša območja, npr. jadranski otoki) je krivulja vrst zelo strma, (2) na regionalnem merilu (srednje velika območja, npr. evropske države) je krivulja položna, (3) na globalnem merilu (zelo velika območja, npr. kontinenti) pa krivulja števila vrst narašča eksponentno in je spet strma.

V naši študiji se osredotočamo na SAR v regionalnem merilu ter na število različnih vrst v skupinah štirinožcev. Zastavili smo si sledeča raziskovalna vprašanja:

R1: Ali je biodiverziteta štirinožcev (absolutno število vrst), dvoživk, plazilcev, ptičev in sesalcev (Tetrapoda: Amphibia, Reptilia, Aves in Mammalia) v Sloveniji večja kot v drugih evropskih državah?

R2: Ali je biodiverziteta štirinožcev (relativno število vrst), dvoživk, plazilcev, ptičev in sesalcev (Tetrapoda: Amphibia, Reptilia, Aves in Mammalia) v Sloveniji večja, kot je pričakovana glede na površino ozemlja?

2 MATERIALI IN METODE

Podatke o biodiverziteti štirinožcev: dvoživk, plazilcev, ptičev in sesalcev evropskih držav smo pridobili iz spletne strani Fauna Europaea [11], kjer smo število vrst filtrirali glede na razrede (ang. Class) štirinožcev (Amphibia, Reptilia, Aves in Mammalia) in posamezne evropske države. Površino posameznih evropskih držav smo pridobili s spletne strani World By Map [12]. Pridobljene podatke smo uredili in statistično obdelali v programu Microsoft Office Excel in SPSS (Statistical package for the Social Sciences). Razmerje med številom vrst in površino območja smo opisali z Arrheniusovo enačbo $S = cAz$, kjer S predstavlja število vrst, c predstavlja začetno vrednost regresijske premice, A predstavlja površino v km² in z predstavlja smerni koeficient (naklon) regresijske premice [13]. Naklon (z) je odvisen od

tipa območja (oz. njegove velikosti: majhne, srednje, veliko) in skupine živih bitij, ki smo jih vključili v analizo (glej v Uvodu: Model dinamičnega ravnotežja). Vrednosti c in z smo izračunali s pomočjo regresijske analize in na podlagi tega izračunali napovedano število vrst (y'). Razmerje med površino in biodiverzitetjo je logaritemsko, zato smo surove podatke najprej logaritmirali ($\log_{10}$). Na logaritemski skali sta biodiverzitetja in površina v linearnem razmerju, zato smo napovedano število vrst izračunali po enačbi: $\log S = \log c + z \log A$.

Po enačbi $e = y - y'$, kjer y predstavlja opazovano vrednost in y' napovedano vrednost, smo izračunali ostanke regresije (e) in na podlagi tega opisali razlike med dejansko (y) in napovedano (y') biodiverzitetjo. S pomočjo testa hi-kvadrat smo primerjali opazovano (y) in napovedano število vrst (y') ter na podlagi tega primerjali stanje štirinožcev v Sloveniji.

3 REZULTATI

V tabeli 1 so predstavljene opazovane vrednosti (y) in napovedane vrednosti (y') števila vrst posameznih skupin štirinožcev za 42 evropskih držav. Največje število vrst predstavljajo ptice, od 4 do 576 vrst. Na Islandiji ni bilo zabeleženih dvoživk.

Država	Površina države [km ²]	Dvoživke (Amphibia)			Plazilci (Reptilia)			Ptice (Aves)			Sesalci (Mammalia)			Skupno število vrst		
		yAm	y'Am	eAm	yR	y'R	eR	yAv	y'Av	eAv	yM	y'M	eM	yS	y'S	eS
Severozahodna Rusija	1687000	10	23	-13	5	16	-11	272	749	-477	90	138	-48	377	925	-548
Francija	643801	34	19	15	35	15	20	546	590	-44	146	120	26	761	743	18
Ukrajina	603628	19	19	0	25	15	10	400	580	-180	146	119	27	590	732	-142
Španija	505990	27	18	9	49	15	34	493	555	-62	128	116	12	697	704	-7
Švedska	447435	13	18	-5	4	15	-11	471	539	-68	90	114	-24	578	684	-106
Norveška	385178	5	17	-12	4	15	-11	460	519	-59	88	111	-23	557	662	-105
Nemčija	357376	19	17	2	17	14	3	498	510	-12	117	110	7	651	651	0
Finska	338424	6	17	-11	4	14	-10	439	503	-64	90	109	-19	539	643	-104
Poljska	312679	18	16	2	9	14	-5	431	493	-62	124	108	16	582	631	-49
Italija	301338	31	16	15	42	14	28	478	488	-10	131	107	24	682	626	56
Romunija	238391	19	15	4	21	14	7	371	461	-90	125	104	21	536	594	-58
Velika Britanija	209331	10	15	-5	9	14	-5	576	446	130	76	102	-26	671	577	94
Belorusija	207595	13	15	-2	7	14	-7	307	445	-138	95	101	-6	422	576	-154
Grčija	131957	17	14	3	51	14	37	427	398	29	110	95	15	605	520	85
Bolgarija	110994	18	13	5	33	14	19	384	381	3	120	93	27	555	501	54
Madžarska	93030	17	13	4	15	13	2	374	365	9	105	90	15	511	481	30
Portugalska	92212	20	13	7	36	13	23	392	364	28	90	90	0	538	480	58
Avstrija	83879	20	13	7	13	13	0	419	356	63	128	89	39	580	470	110

Češka republika	78866	20	12	8	9	13	-4	384	350	34	107	88	19	520	464	56
Irska	70273	3	12	-9	4	13	-9	429	340	89	41	87	-46	477	452	25
Litva	65300	11	12	-1	6	13	-7	323	334	-11	79	86	-7	419	445	-26
Latvija	64589	12	12	0	6	13	-7	330	333	-3	82	86	-4	430	444	-14
Hrvaška	56594	20	12	8	32	13	19	358	323	35	117	84	33	527	431	96
Bosna in Hercegovina	51197	17	11	6	31	13	18	303	315	-12	104	83	21	455	422	33
Slovaška	49035	19	11	8	12	13	-1	348	311	37	113	82	31	492	418	74
Estonija	45339	11	11	0	5	13	-8	339	305	34	80	81	-1	435	411	24
Danska	42931	15	11	4	9	13	-4	447	301	146	69	81	-12	540	406	134
Nizozemska	41543	17	11	6	8	13	-5	473	299	174	80	80	0	578	403	175
Švica	41285	19	11	8	14	13	1	398	298	100	112	80	32	543	402	141
Moldavija	33846	14	10	4	16	13	3	298	284	14	92	78	14	420	385	35
Belgija	30528	17	10	7	9	13	-4	427	277	150	86	77	9	539	376	163
Albanija	28748	17	10	7	36	13	23	343	273	70	85	76	9	481	371	110
Makedonija	25713	13	10	3	28	13	15	315	265	50	104	75	29	460	362	98
Sicilija	25711	6	10	-4	26	13	13	282	265	17	53	75	-22	367	362	5
Sardinija	24090	7	10	-3	20	13	7	253	261	-8	47	74	-27	327	357	-30
Evropski del Turčije	23764	11	10	1	35	13	22	313	260	53	90	74	16	449	356	93
Slovenija	20273	19	9	10	27	12	15	317	250	67	107	72	35	470	344	126
Severna Irska	14130	1	9	-8	3	12	-9	230	229	1	36	69	-33	270	318	-48
Ciper	9251	2	8	-6	26	12	14	342	206	136	33	64	-31	403	290	113
Luksemburg	2586	15	6	9	5	11	-6	265	150	115	78	53	25	363	221	142
Malta	316	3	4	-1	12	10	2	346	89	257	21	39	-18	382	142	240
Lihtenštajn	160	3	4	-1	4	10	-6	4	75	-71	59	36	23	70	124	-54

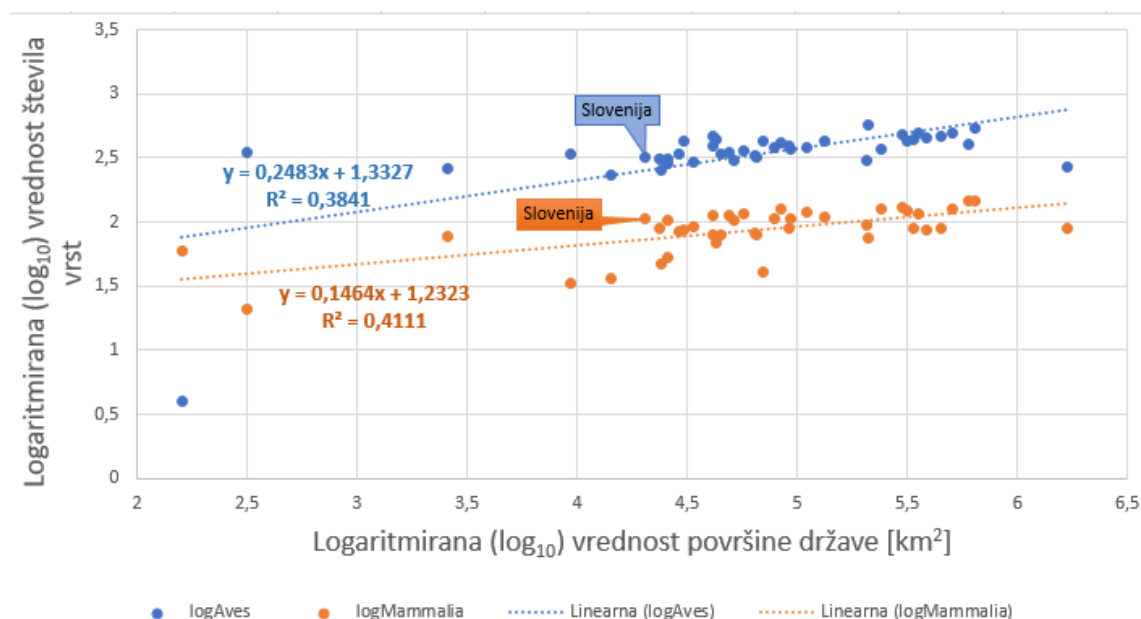
Tabela 1: Biodiverziteta (y = dejansko število različnih vrst; y' = napovedano število različnih vrst; $e = y - y'$) štirinožcev (Tetrapoda) v evropskih državah in površina države.

Iz podatkov razberemo, da je največja pestrost dvoživk v Franciji ($y = 34$), Italiji ($y = 31$) in Španiji ($y = 27$). V Sloveniji je evidentiranih 19 različnih vrst dvoživk in je glede na število vrst dvoživk na 5. mestu od 42 držav. Največje pestrost plazilcev najdemo v Grčiji ($y = 51$), Španiji ($y = 49$) in Italiji ($y = 42$). V Sloveniji je 27 različnih vrst plazilcev in je glede na število vrst plazilcev na 10. mestu od 42 držav. Visoka pestrost ptic je v Veliki Britaniji ($y = 576$), Franciji ($y = 546$) in v Nemčiji ($y = 498$). Slovenija ima 317 vrst ptic in je glede na število vrst ptic na 29. mestu od 42 držav. Sesalci so po številu vrst najboljše zastopani v

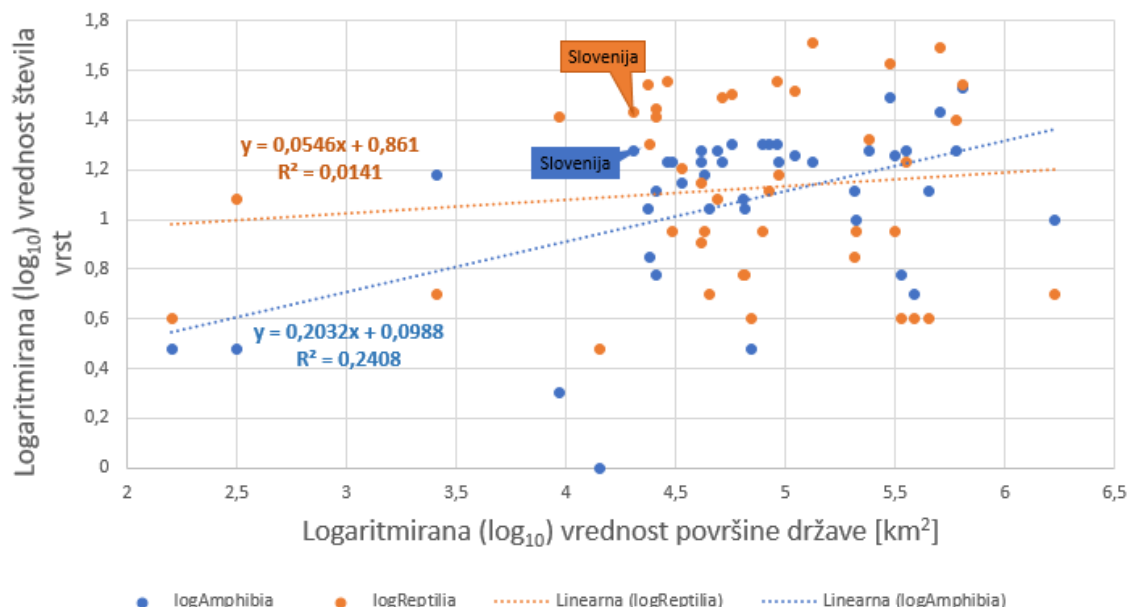
Franciji, Ukrajini ($y = 146$) in v Italiji ($y = 131$). V Sloveniji je 107 vrst sesalcev in je glede na število vrst sesalcev na 11. mestu od 42 držav.

Ugotavljamo, da ima 27 držav višjo in 14 nižjo biodiverziteto štirinožcev od napovedane. Od tega ima 25 držav večjo in 17 držav nižjo biodiverziteto dvoživk, 22 držav večjo in 19 nižjo biodiverziteto plazilcev, 25 držav večjo in 17 nižjo biodiverziteto ptic in 24 držav večjo in 16 držav nižjo biodiverziteto sesalcev, kot napovedano. Ali se dejanska in napovedana biodiverziteta štirinožcev v Sloveniji statistično značilno razlikujeta, smo preverili s Hi-kvadrat testom, ki vrne signifikantno razliko ($\chi^2 = 17,87$, $p < 0,001$, $df = 3$), kar pomeni, da je dejanska biodiverziteta značilno višja od napovedane.

Z regresijsko analizo pojasnimo manj kot 50 % variance med biodiverziteto posameznih skupine štirinožcev in velikostjo države (slika 1 in 2). Največ variance lahko pojasnimo za število vrst iz skupine sesalcev (41 %), najmanj pa za plazilce (1,4 %). Iz enačbe lahko razberemo, da z večanjem površine območja najbolj narašča število vrst ptic ($\log Aves$) ($z = 0,248$), najmanj pa narašča število vrst plazilcev ($\log Reptilia$) ($z = 0,054$).



Slika 1: Regresijski premici in regresijski enačbi razmerja med biodiverziteto ptic (Aves), sesalcev (Mammalia) in površino države (km^2). *Legenda:* $\log Aves$ = logaritmirana vrednost števila vrst ptic (Aves), $\log Mammalia$ = logaritmirana vrednost števila vrst sesalcev (Mammalia).



Slika 2: Regresijski premici in regresijski enačbi razmerja med biodiverziteto dvoživk (Amphibia), plazilcev (Reptilia) in površino države (km^2). *Legenda: logAmphibia = logaritmirana vrednost števila vrst dvoživk (Amphibia), logReptilia = logaritmirana vrednost števila vrst plazilcev (Reptilia).*

5 DISKUSIJA

R1: Ali je biodiverzitet štirinožcev (absolutno število vrst): dvoživk, plazilcev, ptičev in sesalcev (Tetrapoda: Amphibia, Reptilia, Aves in Mammalia) v Sloveniji večja kot v drugih evropskih državah?

Od vseh skupin štirinožcev je v Sloveniji največ ptic, sledijo sesalci, plazilci in dvoživke. Slovenija ima večje število vrst dvoživk kot 29 držav (npr. Litva, Estonija, Latvija), večje število vrst plazilcev kot 30 držav (npr. Avstrija, Švica, Madžarska), večje število vrst ptic kot 11 držav (npr. Belorusija, Moldavija, Severna Irska) in večje število vrst sesalcev kot 16 držav (npr. Portugalska, Finska, Švedska). Največjo pestrost vseh skupin štirinožcev imajo Francija (34 vrst dvoživk, 49 vrst plazilcev, 546 vrst ptic, 146 vrst sesalcev), Španija (27 vrst dvoživk, 49 vrst plazilcev, 493 vrst ptic, 128 vrst sesalcev) in Italija (31 vrst dvoživk, 42 vrst plazilcev, 478 vrst ptic, 131 vrst sesalcev).

R2: Ali je biodiverzitet štirinožcev: dvoživk, plazilcev, ptičev in sesalcev (Tetrapoda: Amphibia, Reptilia, Aves in Mammalia) v Sloveniji večja od pričakovanj glede na površino?

Iz rezultatov lahko povzamemo, da je biodiverzitet štirinožcev v Slovenije nad povprečjem Evrope, saj je dejanska biodiverzitet vseh skupin štirinožcev višja od napovedane glede na površino. Slovenija ima 10 vrst več dvoživk, 12 več vrst plazilcev, 67 več vrst ptic in 35 več vrst sesalcev, kot je napovedano število vrst. Za vrednost z bi lahko uporabili 0,18, saj je večina držav velikosti do 10^5 km^2 (z izjemo severozahodne Rusije). V tem primeru bi bila dejanska biodiverzitet dvoživk višja za 12 vrst, biodiverzitet plazilcev nižja za 16 vrst, biodiverzitet ptic višja za 190 vrst in biodiverzitet sesalcev višja za 6 vrst od napovedane.

Nekatere države z večjo površino, kot je Slovenija, imajo manjšo diverzitet vrst dvoživk (npr. Makedonija, Irska, Finska), plazilcev (npr. Belgija, Danska, Nizozemska), ptic (npr. Belorusija, severozahodna Rusija, Moldavija) in sesalcev (npr. Albanija, Estonija, Latvija). Na podlagi teh rezultatov lahko trdimo, da ima Slovenija visoko biodiverzitet štirinožcev

glede na njeno površino v primerjavi z nekaterimi državami z večjo površino. Površina Slovenije je na primer približno 83-krat manjša od severozahodne Rusije in ima približno enkrat več vrst dvoživk, ptic, sesalcev in petkrat več plazilcev. V primerjavi s površino Norveške, ki je približno 19-krat večja od Slovenije, ima le-ta približno štirikrat več dvoživk, sedemkrat več vrst plazilcev in enkrat več vrst sesalcev. Površina Slovenije je približno 16-krat manjša v primerjavi s Finsko in ima približno trikrat več vrst dvoživk, sedemkrat več vrst plazilcev in enkrat več vrst sesalcev. Tudi v primerjavi s površino Velike Britanije, ki je približno 10-krat večja od Slovenije, ima le-ta približno dvakrat več vrst dvoživk, plazilcev in enkrat več vrst sesalcev.

6 ZAKLJUČKI

Glede na rezultate lahko ugotovimo osem držav z visoko biodiverziteto posameznih skupin štirinožcev. Visoko biodiverziteto dvoživk imajo Francija, Italija, Španija, Portugalska, Avstrija, Češka, Hrvaška in Slovenija. Visoko biodiverziteto plazilcev ima Grčija, Španija, Italija, Portugalska, Albanija, Francija, evropski del Turčije in Bolgarija. Najvišjo biodiverziteto ptic imajo Velika Britanija, Francija, Nemčija, Španija, Italija, Nizozemska, Švedska in Norveška. Najvišjo biodiverziteto sesalcev imajo Francija, Ukrajina, Italija, Španija, Avstrija, Romunija, Poljska in Bolgarija. Za Slovenijo lahko trdimo, da ima večjo diverziteto predvsem plazilcev in dvoživk v primerjavi z drugimi državami. V splošnem je biodiverziteta vseh skupin štirinožcev v Sloveniji nad povprečjem (višja kot napovedana) med vsemi analiziranimi evropskimi državami. Prav tako ima Slovenija višjo biodiverziteto štirinožcev v primerjavi z nekaterimi državami, ki imajo večjo površino.

7 ZAHVALA

Za idejo, pomoč in nasvete pri nastajanju tega prispevka se iskreno zahvaljujeva prof. dr. Francu Janžekoviču. Članek je nastal v okviru doktorskega študija Ekološke znanosti pri predmetu Biodiverzitetna metodologija.

Literatura

- [1] EEA: Biodiversity (online). (citirano 19.5.2017) Dostopno na naslovu: <https://www.eea.europa.eu/soer-2015/europe/biodiversity#tab-based-on-indicators>.
- [2] European Commission (c) (EC): Natura 2000 (online). (citirano 22.5.2017) Dostopno na naslovu: http://ec.europa.eu/environment/nature/natura2000/index_en.htm.
- [3] European Commission (EC): Geographic Patterns (online). (citirano 19.5.2017) Dostopno na naslovu: http://ec.europa.eu/environment/nature/conservation/species/redlist/amphibians/geographic_patterns.htm.
- [4] Biodiversity: Reptiles (online). (citirano 19.5.2017) Dostopno na naslovu: <http://biodiversity.europa.eu/topics/species/reptiles>.
- [5] Biodiversity: Mammals (online). (citirano 19.5.2017) Dostopno na naslovu: <http://biodiversity.europa.eu/topics/species/mammals>.
- [6] Biotska raznovrstnost (online). (citirano 4.6.2017) Dostopno na naslovu: http://www.arso.gov.si/soer/biotska_raznovrstnost.html.

- [7] M.A. Rex: Community structure in the deep-sea benthos. (1981). *Annual Review of Ecology and Systematics*, 12, 331-353.
- [8] D. Jablonski, K. Roy in J. W. Valentine: Out of the tropics: evolutionary dynamics of the latitudinal diversity gradient, 2006. *Science*, 314, 102-106.
- [9] R.H. Whittaker: Vegetation of the siskiyou mountains, oregon and California. (1960). *Ecological Monographs*, 30, 280-338.
- [10] S.P. Hubbell: The unified neutral theory of species abundance and diversity. (2001). *Quarterly Review of Biology*, 79, 96-97.
- [11] Fauna Europaea (2000-2015). (citirano 15.5.2017) Dostopno na naslovu: <http://www.fauna-eu.org/>.
- [12] World By Map (2017). (online) (citirano 16.5.2017) Dostopno na naslovu: <http://world.bymap.org/LandArea.html>.
- [13] O. Arrhenius: On the relation between species and area: a reply. (1923). *Ecology*, 4, 90-91.

Kemijska teorija grafov in resonančni grafi

Chemical graph theory and resonance graphs

Niko Tratnik, Petra Žigert Pleteršek

Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Fakulteta za kemijo in kemijsko tehnologijo, Slovenija

Povzetek

Kemijska teorija grafov je področje matematike, natančneje teorije grafov, ki se ukvarja z uporabo grafov pri modeliranju molekul v kemiji. V članku bomo predstavili molekule, imenovane benzenoidni ogljikovodiki in ogljikove nanocevke, ki so zaradi svojih nenavadnih lastnosti in široke uporabnosti doživele velik razmah v zadnjih 30 letih. Zanimali nas bodo predvsem njihovi resonančni grafi, ki modelirajo interakcije med različnimi postavitvami dvojnih vezi v molekuli.

Ključne besede: Ogljikova nanocevka, resonančni graf.

Abstract

The chemical graph theory is the field of mathematics, more precisely of the graph theory, which deals with the use of graphs in modeling molecules in chemistry. In the paper we present molecules called benzenoid hydrocarbons and carbon nanotubes, which due to their unusual properties and wide usability have undergone a great expansion in the last 30 years. We will, in particular, be interested in their resonance graphs, which model interactions between different layouts of double bonds in the molecule.

Key words: Carbon nanotube, resonance graph.

1 Uvod

Matematika in kemija sta se srečali že v sredini 18. stoletja, ko je ruski matematik M.V. Lomonosov želel “matematizirati” kemijo. Stoletje kasneje lahko začnemo govoriti o nastanku področja matematike, imenovane kemijska teorija grafov, ko je A. Cayley preštel izomere alkanov. Eno od pomembnejših odkritij na področju kemijske teorije grafov sega 70 let v preteklost, ko je H. Wiener povezal vsoto vseh razdalj med atomi alkanov z nekaterimi njihovimi fizikalno-kemijskimi lastnostmi, kot je na primer vrelišče molekule. Molekulo predstavimo z matematičnim objektom, imenovanim graf, ki je določen z vozlišči in povezavami med njimi, pri čemer so vozlišča grafa (določeni) atomi molekule, povezava v grafu pa predstavlja vez med dvema atomoma.

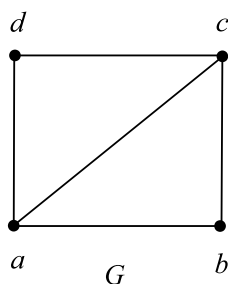
Cilj našega zanimanja bodo aromatski ogljikovodiki – to so molekule, sestavljene v glavnem iz benzenovih obročev. V aromatskih molekulah poznamo t. i. oblak π -elektronov, ki tvorijo večkratne vezi med atomi. Ti pari elektronov niso fiksni in posamezno stanje imenujemo Kekuléjeva struktura. Določene Kekuléjeve strukture so v medsebojni interakciji in ta odnos nam v matematičnem modelu predstavlja resonačni graf. V zadnjih 30 letih je bilo precej pozornosti namenjeno benzenoidnim sistemom in ogljikovim nanocevkam, kamor

prištevamo tudi nekatere fullerene. V nadaljevanju bomo definirali kemijske grafe, ki pripadajo naštetim molekulam, jih na kratko predstavili in pogledali pripadajoče resonančne grafe.

2 Teorija grafov

Teorija grafov je novejšo področje matematike, ki raziskuje grafe. Graf G je matematični objekt, sestavljen iz *vozlišč* (rišemo jih kot točke) in *povezav* (rišemo jih kot črte med vozlišči). Množico vozlišč običajno označimo z $V = V(G)$, množico povezav pa z $E = E(G)$, graf pa zapišemo kot $G = (V, E)$, s čimer nakažemo, kateri dve množici sestavljata graf.

Oglejmo si primer grafa. Za vozlišča vzemimo množico $V = \{a, b, c, d\}$, za povezave med njimi pa množico $E = \{ab, bc, cd, ad, ac\}$. Oznaka ab pomeni, da je med vozliščema a in b povezava. Graf $G = (V, E)$ je prikazan na sliki 1.



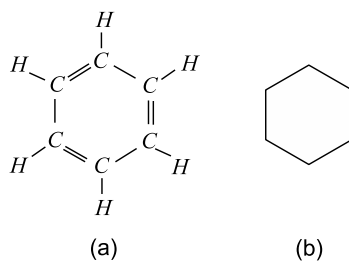
Slika 1: Primer grafa.

Teorija grafov je izjemno uporabna veja matematike, saj lahko grafe uporabljamo za modeliranje različnih relacij in procesov v računalništvu, informatiki, fiziki, biologiji, kemiji, geografiji prometa, ekonomiji ter v družboslovnih vedah. Mi si bomo ogledali uporabo teorije grafov v kemiji.

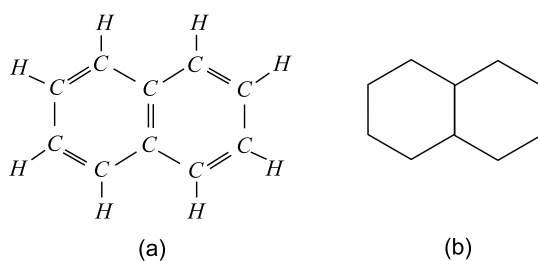
3 Benzenoidni ogljikovodiki in ogljikove nanocevk

Benzenoidni ogljikovodiki so aromatski ogljikovodiki, sestavljeni samo iz benzenovih obročev. Osnovna molekula benzenoidnih ogljikovodikov je torej benzen C_6H_6 , molekule pa vsebujejo enega ali več takih obročev. Iz benzenoidnega ogljikovodika pa tvorimo *benzenoidni graf* tako, da za vozlišča vzamemo ogljikove atome, pri tem pa med dvema vozliščema naredimo povezavo, če v molekuli obstaja vez med ustreznima atomoma. Vodikove atome v grafu zanemarimo. Na sliki 2 je primer benzena in njegovega benzenoidnega grafa, na sliki 3 pa primer naftalena. Vozlišč benzenoidnih grafov ne bomo označevali z debelimi pikami, saj običajno rišemo benzenoidne grafe tako, da so vozlišča vedno oglišča šestkotnikov. Več o benzenoidnih grafih najdemo v [1].

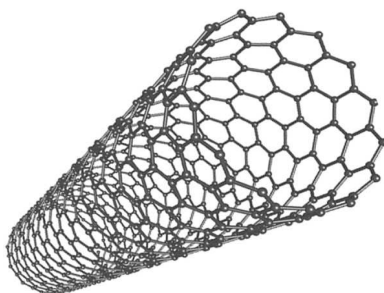
Benzenoidni graf si lahko zamislimo kot del ravninske šestkotne mreže. Predstavljajmo si, da imamo na šestkotni mreži benzenoidni graf G , mrežo pa zvijemo v valj tako, da se nekaj povezav grafa G združi – torej benzenoidni graf ni več vložten v ravnino, temveč ga gledamo na plašču valja. Novo dobljeno strukturo imenujemo *ogljikova nanocevka* – glej sliko 4.



Slika 2: (a) Benzenoidni ogljikovodik benzen in (b) njegov benzenoidni graf.

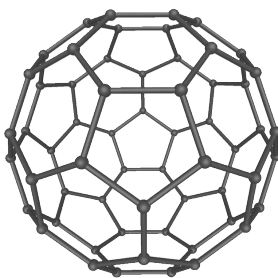


Slika 3: (a) Benzenoidni ogljikovodik naftalen in (b) njegov benzenoidni graf.



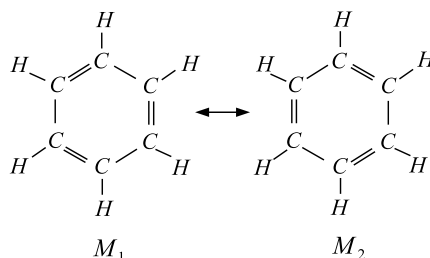
Slika 4: Ogljikova nanocjevka (vir: Wikipedia).

Dejansko so to zelo dolge molekule v primerjavi s svojim premerom, ki se meri v nanometrih, tj. 10^{-9} m. Ogljikove nanocjevke so v zadnjih 30 letih zelo pomembne v konstrukciji novih materialov, nanomaterialov, saj imajo nenavadne prevodne lastnosti, so močne kot jeklo, a obenem lahke. Postajajo nepogrešljive v zračni in vesoljski tehnologiji, a zaradi visoke cene proizvodnje (še) niso tako razširjene v vsakdanjem življenju. Ogljikovo nanocjevko lahko “zapremo” na obeh odprtih koncih plašča valja z dvema kapicama, sestavljenima iz 6-členih benzenovih obročev, skupaj z nekaj (izkaže se, da jih je ravno 12) 5-členimi obroči, s čimer dobimo strukturo *fulerena*. Fulereni so grafi, sestavljeni iz 6 in 5-členih obročev, v katerem je vsako vozlišče povezano z natanko tremi drugimi vozlišči. Čeprav so to ravninski grafi, so atomi v molekulah razporejeni tako, da tvorijo kroglasto, cevasto ali elipsoidno obliko. Najbolj znan fuleren C_{60} je podoben nogometni žogi, glej sliko 5. Zanimiva je uporaba fulerenov v farmaciji in kozmetiki, saj so močni antioksidanti.

Slika 5: Fuleren C_{60} (vir: Wikipedia).

4 Kekuléjeve strukture in popolna prirejanja

Na slikah v prejšnjem razdelku lahko opazimo, da molekula benzenoidnega ogljikovodika, ogljikove nanocevke ali fulerena vsebuje tudi dvojne vezi, ki morajo biti postavljene tako, da ima vsak ogljikov atom natanko eno dvojno vez. Pravzaprav za vsako tako molekulo ne obstaja samo ena možna postavitev dvojnih vezi, ampak je teh možnosti več. Vsako tako razporeditev dvojnih vezi pa imenujemo *Kekuléjeva struktura*. Nobena od teh postavitev dvojnih vezi pa ni popolnoma pravilna, saj lahko snov ves čas prehaja iz enega stanja v drugega. Razlog za to so prosti π -elektroni, ki so v molekuli. Oglejmo si dva primera. Očitno je, da pri benzenu dobimo dve možni Kekuléjevi strukturi, ki sta prikazani na sliki 6 (označeni sta z M_1 in M_2). Puščica med njima označuje, da lahko molekula prehaja iz enega stanja v drugega.

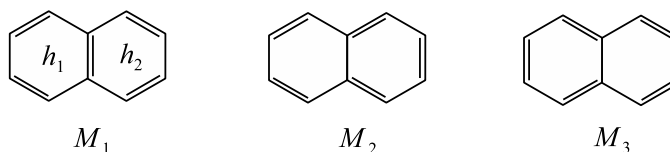


Slika 6: Kekuléjevi strukturi benzena.

V teoriji grafov pojmu Kekuléjeve strukture ustreza pojem *popolno prirejanje*. Za nek graf je popolno prirejanje taka podmnožica povezav grafa, da je vsako vozlišče krajišče natanko ene povezave iz popolnega prirejanja. Na slikah povezave, ki so v popolnem prirejanju, običajno označujemo z dvojnimi povezavami. Očitno je, da vsaki Kekuléjevi strukturi ustreza točno določeno popolno prirejanje in obratno. Na sliki 7 so prikazana vsa tri popolna prirejanja naftalena, ki smo jih označili z M_1 , M_2 in M_3 .

5 Resonančni grafi

Pojem resonančnega grafa je precej naraven in motivacija za njegovo vpeljavo izhaja iz kemije. Omenili smo že, da za dani ogljikovodik praviloma obstaja več možnih razporeditev dvojnih vezi oziroma Kekuléjevih struktur. V primeru, ko se dve Kekuléjevi strukturi razlikujeta v dvojnih vezeh enega benzenovega obroča, med njima nastopi interakcija, sicer pa

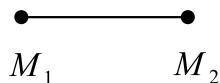


Slika 7: Kekuléjeve strukture (popolna prirejanja) naftalena.

te interakcije ni. Naj bo G benzenoidni graf, ogljikova nanocevka ali fuleren. *Resonančni graf* grafa G opisuje interakcije med Kekuléjevimi strukturami. Definiran je torej kot graf, katerega vozlišča so vse Kekuléjeve strukture (oz. popolna prirejanja) grafa G , pri tem pa je med dvema vozliščema povezava, ko se ustrezni Kekuléjevi strukturi razlikujeta samo v dvojnih vezeh natanko enega šestkotnika. Drugače povedano, med dvema vozliščema je povezava, ko eno Kekuléjevo strukturo dobimo iz druge tako, da obrnemo tri dvojne vezi v enem šestkotniku. Resonančni graf benzenoidnega grafa G označimo z $R(G)$.

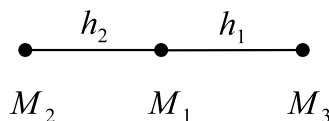
Raziskave na področju resonančnih grafov skušajo odkriti čimveč zanimivih lastnosti teh grafov, saj lahko razumevanje teh lastnosti pomaga tudi pri razumevanju strukture in stabilnosti molekul.

Najprej si oglejmo resonančni graf benzena. Na sliki 6 vidimo, da ima dve popolni prirejanji, M_1 in M_2 , zato bo imel resonančni graf dve vozlišči. Med tema dvema vozliščema pa bo povezava, saj se popolni prirejanji razlikujeta samo v dvojnih vezeh enega šestkotnika.



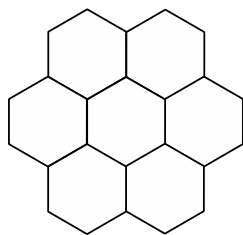
Slika 8: Resonančni graf benzena.

Narišimo še resonančni graf naftalena. Vemo, da ima tri popolna prirejanja, to so M_1 , M_2 in M_3 . Na sliki 7 opazimo tudi, da M_1 dobimo iz M_2 tako, da obrnemo tri dvojne vezi v šestkotniku h_2 . Podobno M_3 dobimo iz M_1 tako, da obrnemo tri dvojne vezi v šestkotniku h_1 . Torej bo v grafu potekala povezava med M_1 in M_2 ter med M_1 in M_3 . Povezave med M_2 in M_3 ne bo, saj enega popolnega prirejanja ne moremo dobiti iz drugega tako, da obrnemo dvojne vezi v enem izmed šestkotnikov.

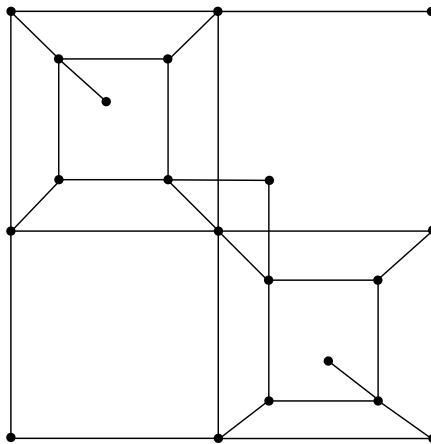


Slika 9: Resonančni graf naftalena.

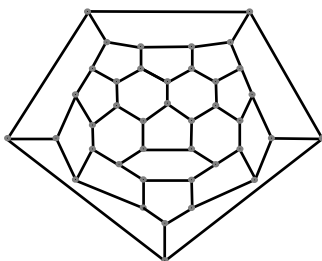
Za naslednji zgled vzemimo nekoliko večji benzenoidni graf – koronen (glej sliko 10), tj. molekula, ki jo najdemo v pepelu. Ta ima že 20 Kekuléjevih struktur, zato jih ne bomo risali. Resonančni graf lahko vidimo na sliki 11. Več o lastnostih resonančnih grafov benzenoidnih grafov najdemo v [5], o resonančnih grafih ogljikovih nanocevk pa v [3].



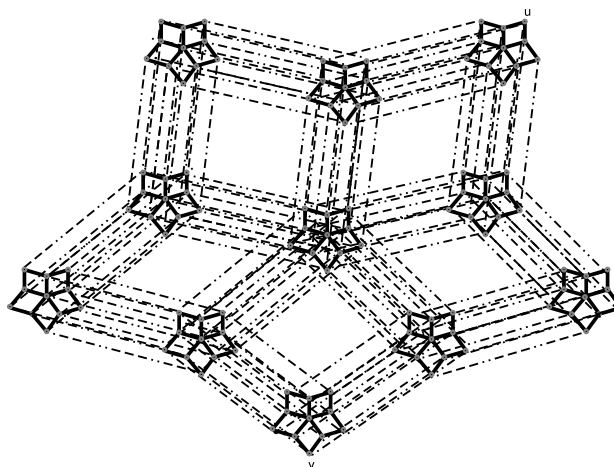
Slika 10: Benzenoidni graf koronena.



Slika 11: Resonančni graf koronena.

Slika 12: Fuleren C_{40} .

Zaključimo s primerom fulerena C_{40} na sliki 12 ([2, 4]). Ta graf ima kar 562 popolnih prirejanj, njegov resonančni graf pa je sestavljen iz več komponent. Največjo komponento resonančnega grafa vidimo na sliki 13.



Slika 13: Največja povezana komponenta resonančnega grafa fullerena C_{40} .

Literatura

- [1] I. Gutman, S. J. Cyvin, *Introduction to the Theory of Benzenoid Hydrocarbons*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [2] M. Randić, D. Vukičević, Kekulé structures of fullerene C_{70} , *Croat. Chem. Acta* **79** (2006), 471–481.
- [3] N. Tratnik, P. Žigert Pleteršek, Some properties of carbon nanotubes and their resonance graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **74** (2015), 175–186.
- [4] N. Tratnik, P. Žigert Pleteršek, Resonance graphs of fullerenes, *Ars Math. Contemp.* **11** (2016), 425–435.
- [5] H. Zhang, Z-transformation graphs of perfect matchings of plane bipartite graphs: a survey, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **56** (2006), 457–476.

VABILO AVTORJEM

Dianoia (grško διάνοια) po Platonu označuje védenje, razmišljanje o modelih stvarnosti, o naravoslovno-matematičnih in tehničnih temah. Uporabljajo ga matematiki (modeliranje) in znanstveniki (formuliranje problema), inženirji (načrtovanje sistema). Opredeljuje kompetenco, proces ali rezultat diskurzivnega razmišljanja, za razliko od neposrednega razumevanja obravnavane tematike. Aristotel to védenje naprej razdeli na teoretično (episteme) in praktično (phronesis).

Dianoia po Platonu torej označuje vmesni nivo človeškega spoznanja, prehod od intuitivnih občutkov do najglobljšega spoznanja dejanskosti. Tako je idealna oznaka za objave v pričujoči reviji, ki povezujejo teoretična, znanstvena izhodišča z njihovo uporabno namembnostjo. Študentje, avtorji teh člankov, ste na prehodu od učenja k delu, od teoretičnega h konkretnemu, ki vas bo pripeljalo do kruha, do dela, s katerim boste odigrali svojo vlogo v družbi. Na tem prehodu pa poleg znanja, ki ga ponuja redno izobraževanje, potrebujete tudi izkušnje s konkretnih izzivov in mehke kompetence sodelovanja v ekipah delodajalcev, k čemur vas spodbuja in vam pri tem pomaga revija Dianoia.

V reviji bomo objavljali poljudne in strokovne članke s področja naravoslovja, matematike ali znanosti, ki uporabljajo znanja teh področij. Ciljna publika bralcev so v prvi vrsti delodajalci, ki tovrstna znanja potrebujejo in želijo izvedeti, kaj je kdo zanimivega razmislil na njihovem področju. V drugi vrsti so ciljna publika študentje, ki iščejo zamisli za svojo poklicno pot in lahko v reviji najdejo navdih za lastna raziskovanja in iskanje stikov s trgom dela.

Za kakovost izdelkov bo skrbel uredniški odbor in uredniški svet, v katerih so vrhunski strokovnjaki, povezani s področji, ki jih revija obravnava. Članki bodo anonimno recenzirani, o objavi pa na podlagi recenzije odloča uredniški odbor. Priporočljivo je, da avtorji besedilo spremenijo v skladu s priporočili recenzentov in da popravljeni članek z utemeljitvijo sprejema ali zavrnitve sprememb ponovno pošljejo v pregled. Uredništvo lahko objavo članka zavrne, če vsebinsko ali po merilih kakovosti ne ustreza standardom revije, o čemer avtorje obvestimo v najkrajšem možnem času.

S prispevkom v reviji bodo avtorji spodbujali širjenje znanja s področja naravoslovja in matematike ter tehnike oziroma izobraževanja teh področij in svoje poglede prenašali na trg dela in na prihajajoče generacije.

NAVODILA AVTORJEM

Avtorje prosimo, da pri pripravi članka upoštevajo naslednja navodila.

Če je članek napisan v slovenščini, naj ima angleški prevod naslova, povzetka in ključnih besed. Veseli bomo tudi prispevkov v angleščini, ki pa morajo imeti naslov, razširjen povzetek v obsegu 300 – 400 besed in ključne besede v slovenščini. Ključnih besed naj bo do šest.

Prispevki naj bodo zanimivi za širši krog bralcev. Ključna je intuitivna predstavitev zamisli in rezultatov, podrobnosti pa lahko ostanejo prihranjene za morebitni znanstveni članek, ki bi bil nadgradnja članka, objavljenega v reviji Dianoia.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (avtorjev) in sedež ustanove, kjer avtor(ji) dela(jo). Sledi naj povzetek, z največ 150 besedami, seznam ključnih besed in besedilo, ki ne presega 3000 besed. Besedilo naj bo zapisano v urejevalniku besedil MS Word 2010 oz. kasnejši ali LaTeX in naj uporablja objavljeno predlogo. Slike in tabele morajo biti oštevilčene in imeti natančen opis, da jih lahko razumemo brez preostalega besedila. Slike v elektronski obliki naj bodo visoke kakovosti v formatu PNG ali JPEG.

Prispevek v PDF obliki pošljite na naslov dianoia@um.si z zadevo: »Za revijo Dianoia«. Če bo sprejet v objavo, vas bomo prosili za izvirno obliko prispevka.

ZA POMOČ SE ZAHVALJUJEMO:



Margento R&D je inovativen ponudnik mobilnih transakcij, kjer lahko vsak mobilni telefon pretvorijo v enostaven, priročen in varen plačilni ter transakcijski instrument. Tako, kot veliko drugih podjetij, so tudi oni žrtve zlorab, ki se dogajajo na dnevni ravni. Nekatere goljufije lahko prepozna in prepreči sistem, nekatere pa ostanejo neprepoznave.

Če želiš postati del naše ekipe, kjer bomo razvijali sistem za odkrivanje goljufij s pomočjo pridobljenih transakcij, te vabimo, da se preizkusiš v reševanju akademije o odkrivanju goljufij med uporabniki subvencionirane študentske prehrane.

Za več informacij nam piši na akademija@margento.com.